एस.सी.ई.आर.टी., बिहार
द्वारा विकसित

S7

दो वर्षीय सेवापूर्व डिप्लोमा इन एलिमेन्ट्री एजुकेशन

गणित का शिक्षणशास्त्र-2

(प्राथमिक स्तर)

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् (एस.सी.ई.आर.टी.),
महेन्द्रू, पटना, बिहार

पाठ्य पुस्तक विकास समूह

पत्र–S-7

(गणित का शिक्षणशास्त्र–2, प्राथमिक स्तर)

दिशाबोध	श्री दीपक कुमार सिंह, भा.प्र.से., अपर मुख्य सचिव, शिक्षा विभाग, बिहार, पटना श्री सज्जन राजसेकर, भा.प्र.से., निदेशक, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, महेन्द्रू, बिहार, पटना डॉ० एस.पी.सिन्हा, सलाहकार, शिक्षा विभाग, बिहार, पटना
समन्वयक	डॉ० रश्मि प्रभा, संयुक्त निदेशक (डायट) एस.सी.ई.आर.टी., पटना
लेखक समूह	श्री कनिष्क कृष्ण, व्याख्याता, डायट, सिवान
	श्रीमती सोनी कुमारी, व्याख्याता, डायट, बाँका
	श्री सुनील कुमार ताँती, मध्य विद्यालय छोटी छरियारी, थरथरी, नालंदा
	श्रीमती लीलावती कुमारी, व्याख्याता, डायट, डुमराँव, बक्सर
	श्री अमरेन्द्र कुमार सिंहा, व्याख्याता, डायट, तरार, औरंगाबाद
	श्री हरिशंकर यादव, प्रभारी प्राचार्य, पी.टी.ई.सी. पोखरैरा, मुजफ्फरपुर
समीक्षक	डॉ0 वन्दना कुमारी, प्रभारी प्राचार्या, डायट लखीसराय
	श्रीमती कुमारी दिब्या, व्याख्याता , डायट, बिक्रम, पटना

पाठ–सूची

इकाई	इकाई का नाम	पृष्ठ संख्या
1	गणित शिक्षण की प्रविधियाँ एवं संसाधन	4-23
2	गणित में सीखने की योजना और आकलन	24-33
3	ज्यामितीय आकृतियां एवं पैटर्न	34-52
4	भिन्न एवं दशमलव संख्याएँ	53-71
5	संदर्भ सूची	72

इकाई–1 : गणित शिक्षण की प्रविधियाँ एव संसाधन

- गणित शिक्षण एवं रचनावाद
- गणित सीखने का एक संभावित क्रम : अ.भा.चि.प्र.
- औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़कर सिखाना
- खेल–खेल में सिखाना
- दोहराव करके सिखाना
- बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं
- गलतियों से सीखते हैं
- गतिविधियों से सीखाना
- गणित की पहेलियाँ
- खुला प्रश्न एवं समस्याएँ
- गणित सीखने–सिखाने के विविध संसाधन

समेकन

ई–संसाधन

मूल्यांकन

संदर्भ सूची

परिचय

इस इकाई में हम गणित शिक्षण के रचनावादी नजरिए की चर्चा करेंगे। यह भी देखेंगे कि यह किस प्रकार शिक्षण में महत्वपूर्ण है। बच्चों के सीखने के तरीके, उनके स्वाभाविक अनुभव, उनकी भाषा व उनका गणित, सीखने के गहरे संबंध का एहसास। यह संबंध किस प्रकार का असर कक्षा पर डालेगा, यह भी समझने का विषय है। गणित सीखने में एक संभावित क्रम अ.भा.चि.प्र. की क्या आवश्यकता है? इसे हम उदाहरणों द्वारा समझने का प्रयास करेंगे। इस इकाई में हम यह भी देखेंगे कि औपरचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़ने की क्या जरूरत है? साथ–ही गणित को संकेतों की भाषा के रूप में देखने का प्रयास करेंगे। इसमें किस प्रकार सीखने वाली कई अड़चने आती है, यह देखेंगे। गणित सीखने–सिखाने में अनुभवों, ठोस उदाहरणों के साथ संबंध बनाने एवं प्रतीकों के इस्तेमाल के साथ कथनों की व्याख्या करने तक का सफर महत्वपूर्ण है। इस क्रम में क्या–क्या चरण हो सकते हैं, वह भी हम देखेंगे। इस इकाई में हम यह भी देखेंगे कि बच्चों को कैसे खेल–खेल में गणित सिखा सकते हैं।

इस इकाई मे यह भी देखेंगे कि गणित में दोहराव करके सिखाने के क्या–क्या तरीके प्रयोग में लाए जा सकते हैं, जिससे यह उबाऊ एवं रटना न बन कर रह जाए। हम कुछ रोचक तरीकों पर विचार करेंगे जिससे बच्चों को अवधारणा व सवालों से जुझने के कई मौके प्राप्त हों। परन्तु ऐसे मौके जो सिर्फ दोहरव के उबाऊ सवाल न हों। ऐसे मौके जिनमें बच्चे की भागीदारी हो, उसे गलती करने की व उससे सीखने की इजाजत हो, आपस में बातचीत करने, एक–दूसरे से सीखने की संभावना हो, यह भी इस इकाई में चर्चा का हिस्सा होगा। इसमें हम देखेंगे कि क्या गलतियाँ उपयोगी होती है? बच्चों द्वारा की गई कुछ गलतियों के उदाहरण से देखेंगे कि वह गलतियाँ बच्चे को गणित सीखने में किस प्रकार उपयोगी हो सकती है? गतिविधियों के द्वारा बच्चों को किस प्रकार गणित सिखा सकते हैं, इसकी भी चर्चा हम इस इकाई में करेंगे। हम कुछ ऐसे उदाहरणों को देखेंगे कि गणित की अवधारणाओं को सीखने में गणित की पहेलियाँ किस प्रकार उपयोगी हैं? गणित के संकेतों की भाषा सीखने में बच्चों को किस प्रकार की समस्याएँ आती हैं तथा गणित सीखने–सिखाने के विविध संसाधनों की चर्चा भी इस इकाई में करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्तः–

- गणित शिक्षण के संदर्भ में रचनावाद का आलोचनात्मक विश्लेषण कर सकेंगे।
- औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़कर एक संभावित क्रम में सीखेंगे।
- गणितीय अवधारणा को सीखने में रोचक तरीके का प्रयोग कर सकेंगे।
- गणितीय अधिगम को अर्थपूर्ण, आनन्ददायी और प्रभावी बनाने हेतु विभिन्न प्रकार की गतिविधियाँ कर सकेंगे।
- प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण की विभिन्न विधियों की समझ विकसित कर सकेंगे।

गणित शिक्षण और रचनावाद

गणित हमेशा से अपनी उपयोगिता, महत्त्व एवं सार्थकता के लिए प्रसिद्ध रहा है। गणित शिक्षण और रचनावादी उपागम का एक मुख्य लक्ष्य है– बच्चों को सिखाना कि गणित सीखा कैसे जाता है। आज के विद्यालयों में गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य है, 'बच्चों की सोच का गणितीयकरण करना'। विद्यालयों में गणित शिक्षण के मुख्य लक्ष्य क्या हैं? सरल शब्दों में इसका उत्तर है बच्चे की विचार की प्रक्रिया का गणितीयकरण करना। डेविड विला के शब्दों में, 'बहुत सारी गणित जानने के बजाय यह जानना अधिक उपयोगी है कि गणितीयकरण कैसे किया जाए'। गणित के विद्यार्थी और शिक्षक होने के नाते हमने गणित को बहुत ही आनंददायक सरल रोचक एवं जीवन उपयोगी विषय के रूप में देखा है। गणित बहुत ही आसान विषय है। इसे बहुत आसानी से समझा जा सकता है, वैसे जैसे इंसान संकेत की भाषा को अपने मन में अनुवाद करके समझ लेता है। मैंने बचपन में सुना था गणित बहुत–ही कठिन विषय है। पर ऐसा नहीं। यह एक आनंददायक सरस विषय है। यह अन्य विषयों से भी आसान है बशर्ते संकेत को समझ लिया जाए।

रचनावादी अधिगम उपागम में शिक्षक का प्रमुख कार्य अधिगम में शिक्षार्थी की मदद करना है। इस उपागम में विद्यार्थी के अपने पिछले अनुभवों के आधार पर जो उन्होंने अपने घर या परिवेश में प्राप्त किया है, को वर्त्तमान ज्ञान को जोड़ते हुए ज्ञान की रचना करते हैं।

प्यारे प्रशिक्षणार्थियों, गणित एक संरचनात्मक विषय है। गणित एक कला भी है। गणित अंतर्दृष्टि से प्रेरित मानव मस्तिष्क की एक अभिव्यक्ति भी है। गणित एक सहज ज्ञान भी है। संसार को समझने की एक इच्छा भी है। गणित क्या है गौर से ध्यान पूर्वक 2 मिनट रुक कर शांतचित्त से सोचिए। विभिन्न लोगों के लिए गणित शब्द के विभिन्न अर्थ होते हैं। प्रायः व्यक्ति गणित को अपने–अपने अनुभवों के अनुसार देखते, सोचते और समझते हैं।

गणित वस्तुतः संख्याओं, ज्यामितीय वस्तुओं, आकारों, विधियों एवं परिवर्तनों से संबंधित पैटर्न एवं क्रमबद्धता का एक अध्ययन है। आजकल गणित केवल बीज गणित, अंक गणित, त्रिकोणमिति, ज्यामिति इत्यादि का ही अध्ययन नहीं रह गया है बल्कि इससे और अधिक अपने आंकड़ों के विश्लेषण, ज्ञान के अनेक क्षेत्रों के अवलोकन, तार्किक निगमन, अनुमान, मानव व्यवहारों और सामाजिक व्यवस्थाओं की प्राकृतिक परिघटनाओं के अध्ययन से संबंधित एक अलग–सा विषय बन गया है। अधिकांश व्यक्तियों के सामने गणित के कुछ पहलू नहीं आते हैं जिसमें रचनावाद (कंस्ट्रक्टिविज्म) एक नया पहलू है जो NCF-2005 से संबंधित है।

गणित शिक्षण के रचनावादी मॉडल में सीखने और सिखाने की प्रक्रिया केवल पाठ्यपुस्तक पर निर्भर न रह कर बच्चों को खुद कर के सीखने के मौके मिलते हैं जिससे वे अपने ज्ञान का निर्माण स्वयं कर सकें। पाठ्यपुस्तक तो सिर्फ माध्यम है, इसमें शिक्षक की भूमिका ज्ञाता के रूप में नहीं अपितु मार्गदर्शक की होती है जो खोजबीन को प्रोत्साहित करते हैं। 1920 ई. में जीन पियाजे ने यह समझ बताई कि बच्चों द्वारा की गयी गलतियाँ हमें बताती है कि वे कैसे सोचते हैं और वो गलतियाँ उनकी गणितीय सोच में झाँकने का एक उम्दा झरोखा है।

सीखने का वह नजरिया जो सीखने वाले को सीखने की प्रक्रिया में एक सक्रियकर्त्ता मानता है, रचनावादी मॉडल कहलाता है। इसमें बच्चे आसपास की दुनिया और लोगों के साथ संपर्क बना कर अपनी समझ का निर्माण करते हैं। इसमें बच्चे विभिन्न पहलुओं पर सोचने को प्रेरित होते हैं। इसमें

कुछ–न–कुछ सीखना जारी रहता है, वह व्यर्थ नहीं जाता है। इसे समझने के लिए चलिए एक उदाहरण देखते हैं :–

एक विद्यालय की चौथी कक्षा के दो बच्चे आपस में जोड़ के सवालों को हल करने में लगे थे और शिक्षक उनके क्रियाकलापों का अवलोकन कर रहे थे।

सुनील : 12 और 7 कितने होते हैं?

सोनी : 19

सुनील : यह तुमने कैसे किया?

सोनी : गिनकर। मैने पहले 12 लिया और फिर 7 जोड़ दिए।

(सोनी ने बड़ी संख्या से आगे गिनने का तरीका अपनाया था और अपना तरीका वह शब्दों मे समझा पायी थी)

पुनः दूसरा सवाल किया।

सुनील : अच्छा बताओ 21 और 19 कितना होगा?

सोनी : 40

सुनील : कैसे किया? मुझे भी बताओ।

सोनी : मैने पहले 19 मे से 10 लिये और 3 से 21 में जोड़ी तो 31 हुए और पुनः बचे 9 को 31 में जोड़े तो 40 हुए।

(इस बार उन्होंने 'पुनः समूहीकरण' का तरीका अपनाया ताकि वह आसानी से जोड़ा जा सके)

शिक्षक अपने क्रियाकलापों को देखकर काफी खुश हुए। इसके बाद शिक्षक ने दोनो के लिए श्यामपट्ट पर जोड़ का एक सवाल दिया –

 1 7

+ 6

इसे हल करने पर सुनील का उत्तर 23 और सोनी का उत्तर था – 41। शिक्षक ने दोनो से जानना चाहा कि इसका उत्तर कैसे आया?

सुनील : मैने 17 से आगे 6 गिना और मिलाकर 23 लाया।

सोनी : मैने इकाई के कॉलम में 7 और 6 को जोड़कर पाया 13, फिर 1 को इकाई के नीचे लिखकर हासिल के 3 लिए और दहाई के 1 में जोड़ दिए। इस तरह इकाई के कॉलम में आया 4, इसलिए मेरा उत्तर आया 41

शिक्षक के ध्यान दिलाने पर वह मान गयी कि उसका उत्तर गलत था।

इस उदाहरण में दोनो ने संख्याओं को जोड़ने के लिए उचित एवं कुशल तरीकों का इस्तेमाल करने की अच्छी तरह विकसित क्षमता का प्रदर्शन किया। यद्यपि उसे औपचारिक प्रतीकों से जोड़ करना कठिन लगा। इसके कई कारण हो सकते हैं, जैसे – स्थानीय मान की पूरी समझ का न होना।

अतः हम बच्चों को गणित के सवाल अपने तरीके से करने दें, तो हमें उनके सोचने में अभूतपूर्व विविधता दिखाई देगी। अपने नये गणितीय अनुभवों को समझने के लिए बच्चे अपने पुराने तरीकों को बदलते रहते हैं, और उनके मुताबिक नये तरीके खोजते रहते हैं। अगर बच्चों पर तथाकथित सही तरीके थोपे जाएँ और अलग हट कर नये ढंग से कुछ करने की गुंजाइश न छोड़ी जाए तो धीरे–धीरे अपने तरीके निकालने ओर अवधारणाओं को समझने की उनकी क्षमता और रूचि कम होने लगती है।

यदि बच्चों को सही वातावरण व माहौल मिले तो यह स्वयं की समझ का निर्माण का सिलसिला जारी रहता है और बच्चे को स्वभाविक रूप से गणित समझने और गणितीय तौर पर सोचने के लायक बनाते हैं।

रचनावाद

रचनावाद, एक पैराडाइम हाइपोथेसिस यह कहता है कि सीखना एक क्रियाशील प्रक्रिया है, रचनात्मक प्रक्रिया है। यहाँ सीखने वाला एक सूचना का सक्रिय निर्माण करता है। रचनावाद के अनुसार सीखने वाले का पूर्व–ज्ञान भविष्य के ज्ञान का आधार होता है। उदाहरण– लेह में रहने वाले बच्चे से हम इस ज्ञान का पता नहीं लगा सकते हैं कि एक रेगिस्तान में कैसी गर्मी पड़ती है। रेगिस्तान की गर्मी को समझने के लिए हमें रेगिस्तान में रहना पड़ेगा। रचनावाद की एक महत्त्वपूर्ण बात यह है कि रचनावाद कहता है कि आप तैरना सैद्धांतिक बातों से नहीं सीख सकते। इसके लिए आपको पानी में तैरना होगा। रचनावाद ज्ञान के स्थानांतरण में विश्वास नहीं करता है। ज्ञान एक स्थान से दूसरे स्थान, एक व्यक्ति से दूसरे व्यक्ति में स्थानांतरित नहीं होता है। ज्ञान ऐसा नहीं है कि कुएँ से बाल्टी में पानी भरना। प्रत्येक विद्यार्थी अपना ज्ञान का निर्माण स्वयं करता है। यही रचनावाद है। शिक्षक केवल सीखने वाले को दिशा प्रदान करता है। रचनावाद जिसे इंग्लिश में कंस्ट्रक्टिविज्म कहते हैं, ज्ञान की रचना हेतु अधिगम के अनुमान पर आधारित है। रचनावाद सचमुच में एक सिद्धांत है। यह अवलोकन और वैज्ञानिक अध्ययन पर आधारित है। इसमें व्यक्ति कैसे सीखता है, यह पता चलता है। सीखने वाले कुछ गतिविधियों को करते हुए सीखते हैं। सीखे हुए ज्ञान पर आपस में बातचीत करते हैं और अपनी समझ बनाते हैं, अवधारणा बनाते हैं जो सीखने वालों के अनुभव में झलकती है। इसे ही रचनावाद कहते हैं। इसे पारंपरिक शिक्षण के विपरीत माना जा सकता है। NCF-2005 ने बालक को एक सहज शिक्षार्थी के रूप में पहचानने की आवश्यकता पर बल दिया और वकालत किया कि ज्ञान उसकी अपनी ही क्रियाशीलता का परिणाम है। बच्चे अपने ज्ञान की रचना स्वयं करते हैं। रचनावाद में बच्चे अंतःक्रिया करते हुए अपने अनुभवों से स्वयं सीखते हैं। बच्चे अपने आसपास की चीजों से जुड़े रहते हैं। खोजबीन करना, सवाल पूछना, करके देखना, अपने अर्थ बनाना बच्चों की स्वाभाविक प्रकृति होती है। रचनावाद जिसे कंस्ट्रक्टिविज्म कहते हैं, सीखने–सिखाने के इसी सिद्धांत को कहते हैं जिसमें विद्यार्थी अपने ज्ञान की रचना अथवा निर्माण वातावरण से अंतःक्रिया करते हुए अपने अनुभवों से स्वयं करता है। रचनावाद बाल केंद्रित शिक्षा शास्त्र का मुख्य आधारभूत सिद्धांत है। इस व्यवस्था में बच्चों के अनुभवों, उनकी जिज्ञासाओं और उनकी सक्रिय सहभागिता को केंद्र में रखकर पठन–पाठन हेतु वातावरण तैयार किया जाता है। बाल–केंद्रित व्यवस्था में शिक्षक एक सुगमकर्ता के रूप में बच्चों को सीखने हेतु यथोचित सामग्री, सीखने की सहज परिस्थितियों को उपलब्ध कराने और निरंतर उनका सतत और व्यापक मूल्यांकन करते हुए उन्हें अपनी क्षमताओं के विकास के अवसर उपलब्ध कराने की महती भूमिका का निर्वहन करता है। रचनावाद गुणवत्तापरक और सार्थक शिक्षा का स्वाभाविक व आनंददायी सिद्धांत है,

जिसमें बच्चा अपना सर्वश्रेष्ठ विकास कर सकता है और वास्तविक जीवन में अपने ज्ञान का सही मायनों में प्रयोग करते हुए कुशलतापूर्वक जीवन यापन कर सकता है।

हम सभी जानते हैं कि मस्तिष्क में ज्ञान या सूचना संग्रहित रहती है लेकिन सीखने का जैसा अनुभव वास्तव में होता है मस्तिष्क में वह अनुभव ठीक वैसा ही भंडारित नहीं होता जैसा हमने सीखा था और जो हमें याद है इन दोनों में अंतर होता है। इसका कारण जो सीखा था उसकी व्याख्या हमारे द्वारा की जाती है। यह व्याख्या हमारे ऊपर विज्ञान पर आधारित होती है। सृजित ज्ञान मस्तिष्क में व्यवस्थित होता चला जाता है। मस्तिष्क में इस तरह ज्ञान का व्यवस्थित होने वाली संरचनाओं को स्कीमा कहते हैं। ज्ञान की रचना होकर स्कीमा में लगातार अनुभव जुड़ जाते हैं, अर्थात, ज्ञान को आत्मसात किया जाता है। ज्ञान को आत्मसात करने के लिए स्वयं को बदलना होता है, अर्थात, समायोजन की प्रक्रिया होती है और ज्ञान का सृजन होता चला जाता है। विद्यालय या विद्यालय के बाहर कहीं भी ज्ञान का सृजन किया जा सकता है। वास्तव में रचनावादी सीखना–सिखाना रोचक प्रक्रिया है। बाल–केंद्रित शिक्षण रचनावाद का अच्छा उदाहरण है।

रचनावादी कक्षा में अध्यापक की भूमिका

एक अध्यापक को चाहिए कि वह बौद्धिक रूप से प्रेरक कक्षा वतावरण का सृजन करें एवं उसे कायम रखें तथा अपने बच्चों को सक्रियता से भाग लेने के लिए प्रोत्साहित करते रहें। इसमें अध्यापक कार्यकर्ता के रूप में कार्य करता है और ज्ञान की खोज में विद्यार्थियों की सहायता करता है। इसमें अध्येता सक्रिय रूप से भाग लेते हैं। समस्त कक्षा वातावरण असीमित होता है। मूल्यांकन सतत और व्यापक रूप से होता है।

रचनावाद की विशेषताएं

रचनावाद की विशेषताएं निम्नलिखित हैं:–

1. ज्ञान का सक्रिय अर्थ निर्माण की प्रक्रिया है जिसमें शिक्षार्थी अपने अनुसार ज्ञान का निर्माण करता है।
2. शिक्षार्थी की सामाजिक और सांस्कृतिक पृष्ठभूमि का उसके विचारों पर महत्त्वपूर्ण प्रभाव पड़ता है।
3. शिक्षार्थी अपने ज्ञान का निर्माण पारस्परिक क्रिया एवं अनुभव द्वारा करते हैं।
4. किसी भी परिस्थिति के बारे में शिक्षार्थी के अपने ही विचार होते हैं, जो अधूरे भी हो सकते हैं परंतु यह अर्थ निर्माण में तथा परिस्थिति समझने में अहम भूमिका का निर्वाह करते हैं।

रचनात्मक अधिगम वातावरण

एक शिक्षक होने के नाते सबसे बड़ी चुनौती एक उपयुक्त शिक्षण–अधिगम वातावरण तैयार करना है। रचनात्मक अधिगम वातावरण है क्या? यह एक ऐसा अधिगम वातावरण है जो बच्चों में अपने–आप अर्थ निर्माण और समझ के विकास को सुलभ बनाता है। रचनात्मक अधिगम वातावरण की पाँच प्रमुख प्रक्रियाओं का विवरण इस प्रकार है:–

1. वास्तविक वातावरण निर्माण
2. अनुरूप एवं प्रमाणिक अधिगम वातावरण
3. बहु दृष्टिकोण
4. सक्रिय अधिगम

5. सहयोग

सीखने का रचनावादी दृष्टिकोण (Constructivist view of learning)

NCF 2005 में अधिगम हेतु देश की शिक्षा जगत में रचनावाद (कंस्ट्रक्टिविज्म) शब्द को लोकप्रिय बना दिया है। रचनावाद सीखने के सिद्धांत एवं मीमांसा दोनों पर समान रूप से लागू होता है। हम जिस संसार में रहते हैं, सीखने के दर्शनशास्त्रीय आधार हमारे अनुभव में शामिल होते हैं। यही अनुभव अधिगमकर्ता की समझ में प्रतिबिंबित होते हैं। अधिगमकर्ता कुछ क्रियाएँ करते हुए सीखते हैं। सीखे हुए ज्ञान पर आधारित बातचीत अपने साथियों से करते हुए संबंध बनाते हैं। इसके बाद उस ज्ञान से संबंधित अवधारणा बनती है। इस तरह ज्ञान का सृजन सीखने वाले के द्वारा स्वयं किया गया जो रचनावाद है। रचनावाद शब्द व्यक्तिवादी विचार से आया है। फेयर (1994) कहते हैं कि ज्ञान उपहार में नहीं मिलता और न ही किसी व्यक्ति की संपत्ति हो सकती है। जब व्यक्ति अपने विचारों की साझेदारी या अदला–बदली करेंगे तब वह अपने ज्ञान को सामने वाले के ज्ञान से जोड़ते हैं, अपनी समस्या को पहचान कर उसे हल करने के उपाय करते हैं अर्थात, जो कुछ सीखते हैं उसका अर्थ निकालते हैं, ज्ञान का सृजन करते हैं।

रचनावादी समस्या का एक उदाहरण मैंने कक्षा 5 के कुछ बालकों को यह पता लगाने को कहा कि यदि एक बेंच पर 4 विद्यार्थी बैठें, तो कक्षा की 10 बेचों पर कितने विद्यार्थी बैठ सकते हैं? बच्चों ने इस सवाल को कई अलग–अलग तरीकों से हल किया। कुछ बच्चों ने 10 में चार को गुणा किया, कुछ ने 4 को 10 बार जोड़ा और कुछ ने 10 को चार बार। कुछ ने चार को 5 से गुणा किया या 4 को 5 बार जोड़ा और फिर उसे दोगुना कर दिया। तरीकों की विविधता को देखते हुए मैंने प्रयास किया कि प्रत्येक बच्चे को उस तरीके से आगे बढ़ाने में मदद करें, जो उसके सीखने के ढंग में मेल खाता हो। कुछ बच्चे सवाल समझ ही नहीं पाए। मुझे पता था कि यह बच्चे 40 व उससे भी आगे तक गिनती जानते थे। मैंने 10 बेंचों का चित्र बनाया और प्रत्येक पर चार–चार बच्चे बैठा दिए। इन 10 बेंचों पर बैठे विद्यार्थियों की गिनती करके वह यह देख पाए कि कुल 40 बच्चे बैठ सकेंगे। इनमें से कुछ बच्चों के साथ मैंने उस सवाल को पढ़ा। प्रत्येक वाक्य का विश्लेषण किया और फिर धीरे–धीरे उन्हें पूरा सवाल समझने में मदद की। मैंने हल करने में उनकी मदद के लिए इस तरह के सवाल पूछे कि कुल कितने बेंच हैं? एक बेंच पर कितने बच्चे हैं? अब हम गिन कर कैसे पता कर सकते हैं कि कुल कितने बच्चे हैं, इत्यादि। हर बार आगे बढ़ने से पहले मैंने इंतजार किया कि वे सवाल के हर हिस्से का विश्लेषण करके समझ लें। इसी तरह विद्यार्थियों के पहले की क्षमता को आगे बढ़ाने में मदद करते हुए मैंने धीरे–धीरे उन्हें पहाड़ों को इस्तेमाल करने की ओर प्रेरित किया। जैसे–जैसे वह क्षमता अर्जित करते गए, उन्होंने इस प्रक्रिया को आत्मसात कर लिया और मन में सवाल करने लगे। यदि हम सिर्फ बच्चों को सवाल का हल करने का तरीका दिखाकर उससे इसी तरह करने को कहते हैं, तो दरअसल हम उसे अपाहिज बना रहे हैं। मसलन, मैं कह सकता था कि वे पहाड़ों का उपयोग करके सही उत्तर निकाल कर दिखा देते। फिर मैं उन्हें उसी तरह और सवाल देकर उनसे कहता कि पहाड़ों का उपयोग करके उसे हल कर लो। हो सकता है कि कुछ बच्चे शायद समझ भी जाते कि ऐसा क्यों करते हैं। किंतु वे सही उत्तर निकालना तो सीख जाते मगर उनकी समझ अधूरी रहती और यदि उसी सवाल को थोड़ा अलग तरीके से दिया जाए तो शायद वे इसे न कर पाते। वे नियमों को जरूर आत्मसात कर लेते परंतु उन्हें यह समझ में नहीं आता कि इन नियमों का इस्तेमाल किन परिस्थितियों में किया जाता है। यहाँ सवाल का विश्लेषण करके मैं उनकी मदद कर रहा हूं कि वे खुद किसी सवाल को हल कर सकें।

2. गणित सीखने का एक संभावित क्रम : अ–भा–चि–प्र

शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया का क्रमबद्ध प्रस्तुतीकरण पाठ को सहज, बोधगम्य एवं आनन्ददायी बना देता है। हमारे गणित की कक्षा में जाने के क्रम में जब हम कक्षा–पूर्व तैयारी करते हैं तो कई अनुभवों, यथा – बच्चों को अवधारणा पर कैसे लायेंगे, उनसे विषयवस्तु से जुड़ी कौन सी गतिविधियाँ करायेंगे, उनके बीच कौन–सी सामग्री प्रदर्शित करेंगे, बच्चों की सक्रिय सहभागिता के लिए क्या करेंगे, नयी अवधारणाओं को उनके बीच कैसे प्रस्तुत एवं स्पष्ट करेंगे, बच्चों ने सीखा या नहीं, इसकी जाँच कैसे करेंगे इत्यादि को ध्यान में रखते हुए अधिगम प्रक्रिया की जो संरचना हमारे द्वारा की जाती है उसमें उपरोक्त अनुभवों को भी एक क्रमबद्ध तरीके से प्रस्तुत किया जाता है।

हमारे गणित पढ़ाने का तरीका तथा पाठ को कक्षा में प्रस्तुत करने का तरीका किस प्रकार का हो। यहाँ न केवल हमारा शिक्षण कौशल वरन् पाठ्यपुस्तक की प्रकृति, बच्चों के सीखने के तरीके, कक्षा में उपलब्ध संसाधनों एवं विषयवस्तु की प्रकृति पर भी निर्भर करता है और इसको ध्यान में रखते हुए ही हम अपनी शिक्षण विधि तय करते हैं। यही कारण है कि गणित विषय में अलग–अलग अवधारणओं को स्पष्ट करने के लिए अलग–अलग विधियों को प्रयुक्त किया जाता है।

गणित में अवधारणा को सीखने व समझने के लिए बच्चे किस हद तक तैयार हैं अथवा नहीं, यह हमें जानना होगा। हमें बच्चे के विकास के स्तर के मुताबिक ही अवधारणा उसके सामने रखनी चाहिए। बच्चे गणित की अवधारणाओं को कैसे सीखते हैं? बच्चे को गणित संबंधी अवधारणाओं के बारे में कुछ तो समझ में आ जाए। गणित सिखाते समय बच्चे के सोचने के ढंग को भी ध्यान में रखने की जरूरत है। वे किस तरीके से सवाल हल कर रहे हैं, समझ कर उस तरीके को भी ज्यादा सरल बनाया जा सकता है।

गणित के एक शिक्षक होने के नाते यह जानना जरूरी है कि हम बच्चों को अपने आसपास की दुनिया को गौर से देखने, सवाल पूछने, खोज करने और तर्कों के आधार पर उत्तर ढूंढने के लिए बढ़ावा दें, प्रेरित करें। यह भी जरूरी है कि हम उन्हें अपने तार्किक सोच को व्यवस्थित करने के लिए बढ़ावा दें। इसके लिए पहले तो, हम बच्चों को प्रश्न पूछने के लिए प्रेरित करें। हमें यह प्रश्न चाहे कितने ही कठिन या बेवकूफी भरे लगें, हमें उन्हें गंभीरतापूर्वक लेना चाहिए और तार्किक तरीके से उत्तर ढूंढने में उनकी मदद करनी चाहिए। एक बात और है कि बच्चों के सामने ऐसे प्रश्न रखना जिनका उन्हें पहले से ही निश्चित जवाब न दिए जाए। जैसे ''इस कागज को तुम कितनी तरह से एक वर्ग की शक्ल में मोड़ सकते हो?'' उन्हें अपने प्रश्न खुद बनाने का मौका दिया जा सकता है। इस तरह के मौके देने से बच्चे बहुत–सी बातें आसानी से और रोचक तरीके से सीखते हैं। ऐसा करने से बच्चों को अपनी मानसिक क्षमताएँ विकसित करने का मौका भी मिलता है। इनसे बच्चों को यह अहसास भी होता है कि एक सवाल के कई जवाब हो सकते हैं।

बच्चों में गणित की समझ बनाने कि लिए हमें उन्हें सावधानी से बनाए गए क्रम में सीखने के अनुभव देने होंगे। कुछ भी और सीखने की तरह ही गणित सीखना भी एक निरंतर प्रक्रिया है। बच्चों को ठोस अनुभवों का क्रम होना चाहिएः–

1. ठोस वस्तुओं के साथ अनुभव (जैसे कंकड़, पत्तियाँ, लकड़ियाँ या अन्य कोई भी आसानी से मिलने वाल चीजें/वस्तुएँ),
2. बोलकर अनुभवों के बारे में बताना, यानी कि भाषा का उपयोग (जैसे, शब्द/कहानी, सवालों के उपयोग से, खेलों से)

3. अनुभव को चित्रों द्वारा दिखाना (जैसे, मात्रा को चित्रों द्वारा दिखाना)

प्रश्नः अनुभव का लिखित प्रतीकों द्वारा व्यापीकरण (जैसे, संख्यांक)

चलिये, गणित सीखने के इस संभावित क्रम को देखें।

यह मानकार कि कोई बच्चा या बच्ची पूर्ण संख्यांक से परिचित है, उसकी ऋणात्मक संख्याओं की अवधारणा सीखने के संदर्भ में किस प्रकार है।

यहाँ चीजों का उपयोग कर ठोस के साथ अनुभव करवाने के संदर्भ में सोचना होगा। यहाँ प्राकृत संख्या की तरह चीजें नहीं दे कर गिनवा सकते हैं।

हमें एक ऐसा उदाहरण चुनना होगा जिसमें हम भूतल को शुन्य माने। ऊपर जाने वाली सीढियाँ धनात्मक संख्या हैं और नीचे तहखाने में जाने वाली शून्य से धीरे–धीरे कम होती जाती हैं। बच्चों को सीढियों पर ऊपर–नीचे जाने का अभ्यास करवा सकते हैं।

बार–बार तहखाने जाने को अथवा पहली मंजिल पर जाने को कह कर और उनसे संख्या धनात्मक होगी अथवा ऋणात्मक संख्या को भाषा के रूप में उपयोग करवा सकते हैं।

ऐसे चित्र बना कर बच्चों को चित्र पर अलग–अलग संख्या दिखाने को कह सकते हैं। वे चित्र लेकर आपस में खेल सकते हैं। ऋणात्मक संख्या के उदाहरण में वह प्रतीक का परिचय भी प्राप्त कर लेते हैं।

इसके बाद ठोस वस्तुओं व चित्र के बिना ऋणात्मक संख्याओं को प्रतीकों के रूप में अभ्यास करते हैं। इस क्रम में बच्चे ठोस अनुभव को महसूस करके व उसके साथ कार्य करके धीरे–धीरे अमूर्तता की ओर बढ़ते है और प्रतीकों के उपयोग करने तक उससे पूरी तरह सक्षम हो जाते हैं।

प्राथमिक विद्यालय के बच्चे मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में होते है। सीखने वालों को अगली अवस्था तक बढ़ने में मदद देने के लिए हमें ठोस व औपचारिक के बीच की कड़ियों पर जोर देना होगा। अनुभव (अ), भाषा (भा), चित्र (चि), प्रतीक (प्र) इसी तरह का एक क्रम है।

3. औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़कर सिखाना

औपचारिक गणित या मन में हिसाब अच्छी तरह कर पाने के बावजूद भी बच्चों को अवधारणाओं, संक्रियाओं, सवालों इत्यादि को समझाने के लिए वास्तविक चीजों और अनुभवों की जरूरत पड़ सकती है। उनके विकास का यह पेंचदार स्वरूप गणित सीखने की प्रक्रिया की विशेषता है।

हमें शायद ऐसा लगे कि एक बार यदि कोइ बच्ची या बच्चा कोई विशेष अमूर्त अवधारणा या प्रक्रिया समझ गयी है तो उसके बाद उसे अन्य अवधारणाएँ या प्रक्रियाएँ समझने के लिए ठोस अनुभवों की जरूरत नहीं है, लेकिन ऐसा नहीं है। उदाहरण के लिए, यदि हम एक पूर्वस्कूली बच्चे को 'दो' का अर्थ सिखाने की कोशिश कर रहे हैं, तो एक अच्छा तरीका होगा कि हम उसे 'मुझे दो पेंसिलें दो', 'मुझे तीन किताबें चाहिए' जैसे कई सवालों को दिया जाना चाहिए। इस तरह के सवालों को हल करते हुए बच्ची अभ्यास करती है व धीरे–धीरे 'दो', 'तीन' का अर्थ पूरी तरह से समझ लेती है। इसी तरह 'तुम्हारे पास पाँच पेंसिलें थी'। यदि मैने तुम्हें बारह पेंसिलें और दी तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितनी पेंसिलें हो जाएंगी? की तरह के इबारती सवाल करने से बच्चे जोड़ की अवधारणा बनाते हैं।

इसी प्रकार, जब दो अंकों वाली संख्याएं सिखायी जाती हैं, उससे पहले बच्चों को 'स्थानीय मान' समझने की जरूरत होती है। इसके लिए उन्हें समूह बनाने के ढेर सारे ठोस अनुभवों से गुजरने की जरूरत होगी। इससे उन्हें धीरे–धीरे 'दहाई' और 'इकाई' समझने में मदद मिलेगी। इसके बाद वे छोटी संख्याओं के औपचारिक गुणा और भाग करने के लिए तैयार हो जाएँगे और फिर उनमें बड़ी संख्याओं के संदर्भ में 'स्थानीय मान' की समझ विकसित करने के लिए, फिर विभिन्न प्रकार के सीखने के ठोस अनुभवों से गुजरने की जरूरत होगी।

एक उदाहरण और लेते हैं। कक्षा के एक बच्चे से $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ जोड़ने को कहा गया। उसने $\frac{2}{5}$ लिखा। ऐसा क्यों हुआ? हमें लगता है कि बच्चे अभी 'आधा' और 'तिहाई' की अवधारणा को समझ नहीं पाने के कारण इस प्रकार की गलतियाँ कर बैठते हैं। यदि उन्हें पहले किसी ठोस संदर्भ रोटी, कागज का एक पन्ना आदि को देकर उन्हे इसकी समझ का विकास किया जाय तो इस तरह की गलतियाँ करने से बच सकते हैं।

वैसे तो कोई भी पाठ्यपुस्तक ऐसे किसी एक स्तर से शूरू नहीं हो सकती है जो हरेक बच्चे के लिए उपयुक्त हो। यदि शिक्षक चाहते हैं कि वे गणितीय सोच व क्षमताओं की पक्की नींव बनाएँ, तो यह महत्त्वपूर्ण है कि प्राथमिक विद्यालय के बच्चों के लिए पाठ्यपुस्तक के अलावा अन्य शिक्षण–सामग्री का भी इस्तेमाल करें। एक बच्चे को किसी भी अवधारणा को समझने के लिए, उसे ठोस अनुभवों से शुरू करके अमूर्त स्तर तक पहुँचने के लिए, सीखने के अनुभव को एक क्रम में देना चाहिये।

4.खेल–खेल में सीखना

हमने देखा है कि कुछ बच्चे गणित को नीरस और उबाऊ विषय समझकर पढ़ने से दूर भागते हैं, जबकि कुछ बच्चों को गणित सीखने में आनंद मिलता है। कभी हमने सोचा है कि ऐसा क्यों होता है? विचार करने पर पता चलता है– गणित सीखने–सिखाने की प्रक्रिया मनोरंजक रूप से करने पर आनंद एवं खुशी मिलती हैं, परन्तु ऐसा नहीं होने पर गणित नीरस और उबाऊ लगता है। गणित सीखने–सिखाने की प्रक्रिया में मनोरंजन के साधन हैं– खेल।

बच्चे खेल–खेल में काफी कुछ सीखते हैं। अतः हमें अपने विद्यालय में ऐसे खेलों को प्रोत्साहन देना चाहिए जिससे वे खेल–खेल में सही जानकारी लें और कौशल सीखें। बच्चे गणित की कई बुनियादी अवधारणाएँ खेलों से सीख सकते हैं। उन्हें जाने–पहचाने संदर्भों से खेलने में मजा आता है। उनमें खेलों से, अपने–आप ही, मजे–मजे में बहुत सारी गणितीय गतिविधियाँ विकसित हो जाती हैं। नये विचारों और अवधारणाओं से छोटे बच्चों का परिचय खेलों व ऐसी परिचित स्थितियों से कराया जा सकता है, जो उन्हें मजेदार लगे और जिनसे उन्हें घबराहट या परेशानी न हो।

यहाँ कुछ खेलों के उदाहरण दिए जा रहे हैं –+

कक्षा 4 के 32 बच्चों के साथ शिक्षक ने एक खेल इस प्रकार खेलने के लिए निर्देश दिये–

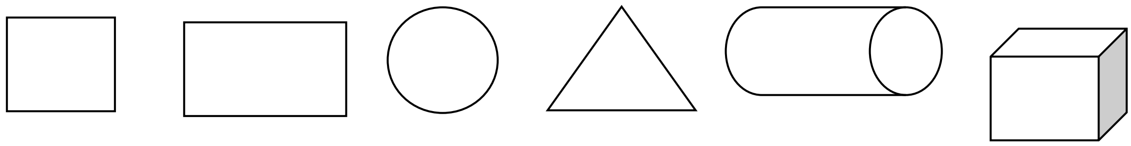
शिक्षक – बच्चों के बड़े समूह बनाकर कहेंगे – बोल भाई कितने?

बच्चे बोलेंगे– आप चाहे जितने। इस तरह क्रियाकलाप बच्चों को बड़े समूह में गोलाई में चलते–चलते कहेंगे और बच्चे बोलते रहेंगे। शिक्षक के द्वारा किसी एक संख्या के बारे में जैसे – 5 बोलने पर सभी बच्चे समूह में अलग होकर पाँच–पाँच के समूह बनाएंगे और शेष 2 बच्चे समूह से बाहर रहेंगे।

शिक्षक द्वारा यह प्रश्न किया जाना कि कितने समूह बने, हरेक समूह में कितने बच्चे हैं? प्रत्येक समूह के 5 बच्चों को, कुल समूह की संख्या 6 से गुणा करके और शेष 2 को मिलाने पर कुल संख्या 32 प्राप्त होगी। इस प्रकार दोबारा क्रियाकलाप शुरू कर अलग–अलग समूह का निर्माण, बच्चों की संख्या को मिलाने से गणितीय संक्रियाओं जोड़, घटाव, गुणा, भाग की समझ विकसित होगी।

बच्चे मैदान में अनेक खेल खेलते हैं, जैसे – कबड्डी, क्रिकेट, खो–खो, झूला झूलना इत्यादि। बच्चे विभिन्न प्रकार की रंगोली बनाते हैं। इससे बच्चे पैटर्न तथा ज्यामितीय आकृति वृत्त, त्रिभुज, आयत, वर्ग इत्यादि का निर्माण करते हैं जिससे उक्त ज्यामितीय आकृति के बारे में उनकी समझ विकसित होती है। खेल से बच्चों की गणितीय सोच और तर्क करने की क्षमता में तीव्र वृद्धि होती है। इससे अंदाज लगाने, पैटर्न पहचानने, विशिष्टीकरण करने व व्यापीकरण करने की क्षमताएँ विकसित होती हैं।

प्रायः यह देखा जाता है कि कक्षा–कक्ष में बच्चे कागज को मोड़कर–फाड़कर विभिन्न आकारों का स्वरूप प्रदान करते हैं। वे कागज की नाव, टोपी, दवात, जहाज, डब्बा, खिलाने इत्यादि बनाते हैं। इससे द्विआयामी आकृति तथा त्रि–आयामी आकारों को समझाया जा सकता है। साथ ही शीर्ष, कोना, सतह इत्यादि गणितीय पद को भी निरूपित किया जा सकता है।



बहुत सारी अन्य मजेदार गतिविधियों का उपयोग बच्चों को ज्यामिति की विभिन्न अवधारणाओं से परिचित कराने के लिए किया जा सकता है, जैसे – बच्चे सममिति के बारे में रंगोली के सममिति पैटर्न कागज पर बना कर सीख सकते हैं।

5.दोहराव करके सीखाना

हम आसपास देखते हैं तो पाते हैं कि किसी भी बच्चे के माहौल में दोहराव स्वाभाविक तौर पर अलग–अलग रूपों में होता है लेकिन सीखने के औपचारिक माहौल में बच्चों की रूचि बनाये रखने के लिए दोहराव को काफी विविधता के साथ जानबूझ कर लाना पड़ता है। दोहराव के ऐसे कई नए तरीके सोचे जा सकते हैं जिनसे कि वह मजेदार बनाया जा सके। इसे बच्चे मजेदार गतिविधियों के द्वारा कर सकते हैं। इन दोहरावों के दौरान भाग लेने वाले बच्चे हर बार कुछ नया फर्क करते और अनुभव करते हैं। रट कर सीखने में इस तरह की विभिन्नता नहीं होती क्योंकि उसमें प्रक्रिया का दोहराव नहीं होता, बल्कि 'जानकारी' ही मशीनी तरीके से दोहराई जाती है, जैसे – पहाड़े मशीनी तरीके से रट कर याद करना।

बच्चे आमतौर पर पहाड़ों से बहुत परेशान रहते है। हमें यह क्यों लगता है कि उन्हें मशीनी तरीके से बार–बार दोहराया जाए और क्या रटकर याद करने से बच्चे को पहाड़ों को समझने में मदद मिलती है? क्या यह सच नहीं है कि बच्चे एक दिए हुए क्रम में ही पहाड़ों का इस्तेमाल कर पाते हैं। यह बात उस समय साफ नजर आती है जब हम किसी और क्रम में उनसे गुणज पूछते हैं। क्या यह बेहतर नहीं है कि किसी बात को सिर्फ रटवाने के बजाय बच्चे को उसमें शामिल पैटर्न पहचानने में मदद की जाये? बच्चे के दिमाग में गुणज की समझ बैठाने के लिए और पहाड़ों में शामिल पैटर्नों को पहचानने की क्षमता विकसित करने के लिए कई गतिविधियाँ सोची जा सकती हैं।

हमें क्यों लगता है कि दोहराव का मतलब रटना है अथवा रटना नहीं है? हम देखते हैं कि बहुत छोटी उम्र से ही बच्चे कई बातों को दोहराते हैं और इससे सीखते हैं, जैसे – चीजें गिराना व उठाना, डिब्बे और टिन खेलना और बंद करना, कुछ शब्दों को बार–बार दोहराना, ताक–झाँक का खेल बार–बार खेलना, बड़ों से बार–बार कहानियाँ दोहराने को कहना इत्यादि। क्या हम इनमें से किसी भी काम को रट कर सीखना कहेंगे? दोहराव रूचिकर व अलग–अलग तरीकों से होना चाहिए ताकि बच्चों की सीखने में रूचि बन रहे।

एक उदाहरण पर विचार कीजिये। हम बच्चों से दो–दो, तीन–तीन, चार–चार सेबों के समूह को पहचानने के लिए कह सकते हैं और फिर उनसे, ''चार–चार सेबों वाले कितने समूह हैं?'' ''ये कुल कितने सेब हुए?'' जैसे सरल व आसान सवाल पूछ सकते हैं। इस तरह की गतिविधि तरह–तरह की चीजों से की जा सकती है । जब उनको इस तरह की गतिविधियों का काफी अभ्यास हो जाय, तब वे जो कर रहे हैं उसे गणितीय भाषा में लिखने के लिए उनकी मदद की जा सकती है, जैसे – वे दो–दो सेबों वाले 4 समूहों को 4˜2 = 8 लिख सकते हैं। इसे चित्र द्वारा भी दिखा सकते हैं।

2 सेब 2 सेब 2 सेब 2 सेब

4 समूह × 2 सेब = 8 सेब

$4 \times 2 = 8$

अब बच्चे पहाड़ों में मजे से पैटर्न ढूंढ पाने की स्थिति में होंगे। 2 का पहाड़ा –

पहला तरीका	**दूसरा तरीका**	
1 + 1 = 2	1	2
2 + 2 = 4	3	4
3 + 3 = 6	5	6
4 + 4 = 8	7	8
5 + 5 = 10	9	10
6 + 6 = 12	11	12
7 + 7 = 14	13	14
8 + 8 = 16	15	16
9 + 9 = 18	17	18
10 + 10 = 20	19	20

इस तरह की गतिविध बच्चों में रूचि बने रहने तक दी जा सकती है।

6.बच्चे एक–दूसरे से सीखते हैं

दैनिक जीवन में हमारा सामना गणित से होता रहता है तथा एक छोटा बच्चा भी उसे देखता और महसूस करता है। माता–पिता उसे इसमें छिपी गणित को खेलों एवं अन्य क्रियाकलापों के माध्यम से समझने–समझाने का प्रयास भी करते हैं। इसी कारण बच्चों के पास गणित से संबंधित परिवेश से प्राप्त कुछ अनुभव होते हैं। शिक्षक होने के नाते हम यह भी जानते हैं कि बच्चे गणित कैसे सीखते हैं और उनके गणित सीखने की प्रक्रिया को आनन्ददायी और सार्थक कैसे बनाया जा सकता है?

हम में से कोई कभी किसी विद्यालय में जाकर देखे होंगे कि एक शिक्षक और बच्चों के बीच किस तरह की परस्पर क्रिया होती है। इस संदर्भ में मैंने एक विद्यालय में देखा कि बच्चों को उनकी शिक्षिका ने एक सवाल दिया था और वे अपनी कॉपी में उसे हल करने में लगे हुए थे। शिक्षिका बच्चों के बीच घूम रही थी और रूक–रूक कर उनसे पूछ रही थी कि कोई एक जवाब उन्होने कैसे निकाला। ऐसा करने में अधिकतर बच्चों ने अपना लिखा हुआ हल मिटा दिया, चाहे वह सही था या गलत।

इससे क्या पता चलता है? क्या यह सवाल हल करने की अपनी क्षमता के बारे में आत्मविश्वास की कमी नहीं दिखाता है? आत्मविश्वास की यह कमी बड़ों में भी होती है जब उनका सामना किसी विशेषज्ञ से होता है।

हम समूह में खेलते हुए बच्चों को ध्यान से देखते हैं तो पाते हैं कि वे एक–दूसरे की सोच जाँचते रहते हैं।

खेलों व गतिविधियों से बच्चों को एक–दूसरे से बिना किसी डर के, एक आजाद और खुले माहौल में मेल–जोल का मौका मिलता है। ऐसे मेल–जोल के दौरान बच्चे अपनी बातों को एक–दूसरे के सामने जवाबों और सुझावों के तौर पर रखते है। जिसे जाँच कर माना भी जा सकता है या नहीं भी।

एक उदाहरण देखिए –: कक्षा 2 में घटाव का सवाल दो बच्चियों ने इस प्रकार हल किया:–

3 1	3 1
– 1 5	– 1 5
2 4	1 6

जब पहली बच्ची से पूछा गया कि उसने कैसे किया तो उसने समझाया, 5 में से 1 निकाला तो 4 बचे और 3 में से 1 निकाला तो 2 बचे। यह पूछने पर कि क्या उसका जवाब सही था। उसने का उसे नहीं मालूम। लेकिन जस दूसरी बच्ची से वही सवाल किया गया तो उसने बताया कि वह अपने तरीके से 31 में से 15 घटाये तो उसने सही जवाब (16) निकाला। उसने यह भी बताया कि उसने इस सवाल को अलग तरीके से हल किया।

7.गलतियों से सीखना (Learning by mistakes)

गलतियों से बच्चा ज्यादा सीख सकता है और वह बहुत ज्यादा देर तक याद भी रखता है। कहा भी गया है, 'करत करत अभ्यास ते जड़मति होत सुजान रसरी आवत जात ते सिल पर परत निशान'। Trial and error, गलतियों से सीखने का एक अच्छा उदाहरण प्रतीत होता है। बालक बार–बार गलती करता है और बार–बार नई ज्ञान सीखने के लिए प्रयास करता है। पियाजे के अनुसार शिक्षण को तर्कपूर्ण बनाना चाहिए। यदि बच्चे गलत उत्तर देते हैं तो उनकी गलती बताने के बदले अपने उत्तर को

सिद्ध करने कहा जाए। इससे बच्चे अपने उत्तर के लिए आवश्यक तर्क देंगे। बच्चों को गलतियों पर डाँटने के बदले गलती करके सीखने दें। उदाहरण के लिए, बच्चों से पूछा जाए या यह बताया जाय कि 4 अंक को बढ़ाते हुए 16 बनाना है। किन विधियों से ऐसा किया जा सकता है? बच्चे निम्नलिखित क्रिया कर सकते हैः–

- 3 में 4 का गुणा करके 12 आएगा।
- 4 में 4 का गुणा करके सोलह आएगा।
- 4 को चार बार जोड़कर 16 आएगा।

बच्चों को यही प्रक्रिया कंकड़ की ढेरी बनाकर करने को भी देनी चाहिए। इससे बच्चे अपनी गलती पहचान सकते हैं और सुधार कर सकते हैं।

साथी के साथ अंतःक्रिया (Peer Interaction)

पियाजे के अनुसार समाजीकरण शिक्षा का प्रमुख भाग है, जो साथी के साथ अंतःक्रिया करते हुए सीखने से आता है। इससे विचार विकसित होते हैं। भिन्न–भिन्न प्रकार की चुनौतियाँ सामने आती हैं। इस तरह की अंतःक्रिया में आवश्यक है कि बच्चे अलग–अलग बिंदुओं पर अपना नजरिया प्रस्तुत करें। साथी के साथ मिलकर चुनौती स्वीकार करना, विचार करना आदि। इसमें साथी समान ज्ञानात्मक स्तर का होना चाहिए। बच्चों को गलतियों से सीखने की प्रक्रिया का स्वाभाविक और आवश्यक भाग है। बच्चों की गलतियों से यह भी पता चलता है कि बच्चे कैसे सीखते और सोचते हैं। उदाहरण – 21 के लिए 12 लिखना हमें यह बताता है कि बच्चा अभी भी स्थानीय मान की अवधारणा समझ नहीं पाया है। उसे समूह बनाने की और अभ्यास करने की जरूरत है। प्रयास और त्रुटी से बच्चे सीखते हैं, जो यही दर्शाता है कि बच्चे गलतियों से सीखते हैं।

8. गतिविधियों से सिखाना

क्या आप मानते हैं कि गणित हमारे चारों ओर है? क्या हमारी सभी क्रियाओं में गणित शामिल है? उन लागों के लिए जो गणित को तलाशते हैं और जो जानते हैं कि इसे कहाँ ढूँढना है उनका उत्तर 'हाँ' है। जो लोग इसे नहीं तलाशते हैं उनके लिए गणित केवल वही है जो विद्यालयों में पढ़ते हैं, जिसका वास्तविक दुनिया से शायद ही संबंध होता है।

बच्चों की सभी गतिविधियाँ और अनुभव, दोनो ही गणित से ओत–प्रोत होते हैं। इन अनुभवों को उन गणितीय विचारों और संकल्पनाओं से जोड़ना चाहिए जो हम उन्हें सीखाते हैं। तभी ये विचार उन्हें उपयोगी लगेंगे और वे इन्हें आसानी से समझ सकेंगे।यदि एक बार हम अपनी ''गणितीय आँखों'' को खोल लें और हम देखना शुरू कर दे ंतो हम लगभग हर चीज में गणित देख सकते हैं और गतिविधियों से सीख सकते हैं– चाहे वह कोई गीत हो, कहानी हो, पहेली हो, ज्यामितीय आकृतियों का संदर्भ हो इत्यादि।

गणित शिक्षण में उपयोग में लायी जाने वाली कुछ गतिविधियाँ यथा– बोल भाई कितने, आप चाहें जितने, खिड़की खेलो झट से बोलो, उठक–बैठक, अंकों का खजाना, घटते जाओ–बढ़ते जाओ आदि से बच्चों की सीखने की प्रवृत्ति मनोरंजक एवं आनन्ददायी बनी रहती है। गणितीय गतिविधियों से बच्चों में तार्किकता का विकास तथा रचनात्मकता का सृजन होता है। इससे गणितीय अवधारणाओं की समझ को चिरस्थाई बनाया जा सकता है।

गणित शिक्षण में उपयोगी कुछ सुझावात्मक गतिविधियाँ निम्न हैं–

1. **सेंचुरी बनाइए–** बच्चों को गोलाई में बिठाकर बीच में 100 लिखा कार्ड रख दिजीए। हर बच्चे को कोई संख्या दिजीए, जैसे– 50,40,35............इत्यादि। बच्चों को दी गयी संख्या के साथ कोई नयी संख्या जोड़नी होगी, जिससे दोनो संख्या जोड़ने पर पूरे 100 हो जाए।

   जैसेः 50+50=100

   60+40=100, 65+35=100 इत्यादि।
2. **दूध कैसे नापा जाए?**

   एक दूधवाले के पास काफी दूध था। किन्तु दूध को नापने के निए उसके पास 4 लीटर व 7 लीटर के केवल दो बर्तन थे। किसी ग्रीक को 6 लीटर दूध वह कैसे देगा?
3. 24 व्यक्तियों को 6 कतारों में किस प्रकार खड़ा करें कि प्रत्येक कतार में 5 व्यक्ति हों।
4. 3×3 क्रम व 4×4 क्रम की वर्ग पहेली (magic square) यानी जादू वर्ग बनाइए।
5. पाँच समान अंकों से 100 लिखिए–

   जैसे– 111–11=100, $5\times5\times5-5\times5=100$ इत्यादि।

   गणितीय अवधारणाओं को सिखाने में गतिविधियाँ निम्नलिखित रूप में कारगर सिद्ध हो सकती हैं–

   - बच्चों को गणितीय अवधारणाओं को मूर्त्त रूप से समझने में मदद करती हैं। साथ ही यह अधिक अमूर्त्त चिंतनों हेतु मजबूत आधार प्रदान करती हैं।
   - गतिविधियाँ व्यक्तिगत रूप से कार्य करने के अवसर प्रदान करती हैं। ये बच्चों को स्वयं करके सीखने के लिए प्रेरित करती हैं। साथ ही बच्चा अपनी गति से सीखने का प्रयास करता है।
   - ये गतिविधियाँ बच्चों में रूचि तथा आत्मविश्वास बढ़ाने में सहायक हैं।
   - यह बच्चों को समूह में चर्चा करने, चिंतन करने तथा अवधारणाओं के समायोजन के अवसर प्रदान करती है।
   - बच्चों को एक ही गतिविधि को कई बार दोहराने के अवसर प्रदान करती है। वे पुनः करकें देख सकते हैं तथा समस्या और उसके समाधान खोजने हेतु पुनर्विचार कर सकते हैं। यह बच्चों में संज्ञानात्मक विकास को बढ़ावा देता है।
   - गतिविधियाँ विषय के नए क्षेत्रों हेतु आधार तैयार करती है तथा नए प्रयोगों हेतु अवसर प्रदान करती है।
   - यह बच्चों में अपने परिवेश में गणितीय अवधारणाओं के अनुप्रयोग के अवसर प्रदान करती है।

9.गणित की पहेलियाँ

पहेली जिसे बुझौवल भी कहा जाता है बचपन से ही गाँव–घर में अपने दादा परदादा से अक्सर कहते–सुनते आए हैं। पहेलियाँ आदिकाल से व्यक्तित्व का हिस्सा रही हैं, रहेंगी और रहना चाहिए क्योंकि यह न केवल मनोरंजन करती हैं बल्कि दिमाग को चुस्त एवं तरोताजा भी रखती हैं। पहेली है क्या? गणित में पहेली से हमारा तात्पर्य ऐसे कथन से होता है जिसका उत्तर या परिणाम प्रारंभिक तौर पर असंभव लगता है लेकिन गहनता से विवेचन व विश्लेषण करने पर हमें बिल्कुल अलग उत्तर या

परिणाम मिलते हैं। पहेली दिमागी कसरत (brain teaser) भी कहलाती हैं। पहेलियों से सोचने और समझने की शक्ति का विकास होता है।

पहेलियों की परंपरा अंग्रेजी व अन्य यूरोपीय भाषाओं में प्राचीन काल से चली आ रही है। बायबिल की पहली बहुदा सृष्टि के रहस्यों के उद्घाटन की ओर संकेत करने के लिए प्रसिद्ध है। अंग्रेजी में पहेली को पजल भी कहते हैं। संस्कृत में पहेली को प्रहेलिका या पहेली कहते हैं। पहेली यूनानीयों का प्रिय विषय था तथा इसकी प्रतियोगिता में पुरस्कार भी दिए जाते थे। कुछ महत्वपूर्ण पहेलियों के उदाहरण निम्नलिखित हैं:–

1. वह कौन–सी वस्तु है जो प्रातः 4 पैरों से दोपहर 2 पैरों से तथा संध्या समय 3 पैरों से टहलती है।
2. एक थाल मोती से भरा, सबके सिर पर औंध धरा, चारों ओर थाली फिरे, मोती उससे एक न गिरे।
3. एक बाग में 5 कतार,
   हरेक में पेड़ लगे हैं चार,
   पूरे बाग में हैं कुल 10 पेड़,
   कैसे बता मेरे यार।

10.खुला प्रश्न एवं समस्याएँ (Open-ended questions and problems)

खुला प्रश्न एक ऐसा प्रश्न होता है, जिसका उत्तर 'हाँ' या 'नहीं' प्रतिक्रिया के साथ या स्थिर प्रतिक्रिया के साथ नहीं दिया जा सकता है। खुले प्रश्नों को एक कथन के रूप में तैयार किया जाता है, जिसके लिए लंबी प्रतिक्रिया की आवश्यकता होती है। प्रतिक्रिया की तुलना उस जानकारी से की जा सकती है जो प्रश्नकर्त्ता को पहले से ज्ञात है। खुला प्रश्न एक विस्तृत उत्तर और कुछ स्पष्टीकरण की आवश्यकता लिए होती है। ऐसे प्रश्नों की शुरुआत कैसे? कौन? क्या? क्यों? कितना? इत्यादि से होता है। खुला प्रश्न शैक्षणिक और सामाजिक पढ़ाई को बढ़ावा देते हैं। इसमें बच्चों की स्वाभाविक जिज्ञासा बढ़ती है। खुले प्रश्नों से बच्चों को स्वयं सोचने की चुनौती मिलती है। इसके फलस्वरूप ऐसे विद्यार्थी तैयार होते हैं जो स्वयं से प्रेरित होते हैं। खुले प्रश्न का मतलब होता है कि 'इसमें लिखने में कितना लिखें' इसकी बाध्यता नहीं होती है। व्यक्ति अपनी इच्छा के अनुसार इसकी लंबाई निर्धारित कर सकता है। हमें गणित के विद्यार्थियों से खुला प्रश्न क्यों करना चाहिए? इस प्रश्न का जवाब देने से पहले खुला प्रश्न के बारे में हमें जानना आवश्यक होगा। खुला प्रश्न चिंतन, उत्सुकता, जिज्ञासा इत्यादि पैदा करने के लिए किया जाता है।

खुला प्रश्न क्यों?

1. खुला प्रश्न विद्यार्थियों से इसलिए किया जाता है क्योंकि खुले प्रश्न की समस्याएँ शिक्षार्थी में उच्च स्तर के चिंतन कौशल (High Order Thinking Skills) विकसित करता है।
2. खुला प्रश्न विद्यार्थियों में आत्मविश्वास विकसित करता है।
3. खुला प्रश्न विद्यार्थियों को समस्या समाधान में संलग्न करता है।
4. खुला प्रश्न विद्यार्थियों में सृजनात्मकता विकसित करता है।
5. इससे बच्चों के सोचने का दायरा बढ़ता है।
6. जब समस्याओं को उनके परिवेश या वास्तविक अनुभवों से जोड़ा जाता है तो बच्चे अपने तरीकों से सोचते हैं।

7. खुला प्रश्न के बहुत से उत्तर आने का अर्थ है कि प्रत्येक बच्चा अपने अनुभव के अनुसार सोच सकता है।
इस प्रकार खुले प्रश्न के रहने से विद्यार्थियों में चिंतन, तर्क, सृजनात्मकता आदि प्रतिबिम्बित होते हैं।

- गणित सीखने–सिखाने के विविध संसाधन

हम सभी के लिए गणित हमेशा से बौद्धिक चिंतन का विषय रहा है। यह मस्तिष्क में नई रचनात्मक कल्पनाएँ उत्पन्न करता है तथा विचारों को सही दिशा प्रदान करता है। गणित का अमूर्त तत्वों, संकेतों और कल्पनाओं से अधिक संबंध रहता है, जिसके कारण गणित सीखना कठिन समझा जाता रहा है। समस्त गणितीय ज्ञान केवल मौखिक वर्णन कर देने से स्पष्ट नहीं होता है। इसे स्पष्ट करने के लिए मूर्त्त वस्तुओं की आवश्यकता परती है, मूर्त्त वस्तुओं की सहायता से अमूर्त्त अवधारणाओं को आसानी से समझा जा सकता है। इन वस्तुओं की उपलब्धता स्थानीय परिवेश में भी संभव है। अतः गणित सीखने–सिखाने के विविध संसाधन विद्यालय के अंदर और विद्यालय के बाहर खोजे जा सकते है।

विद्यालय के अंदर उपलब्ध संसाधनों में कमरा, श्यामपट्ट, पुस्तक, घंटी, कंकड, ईंट, दीवार, छत, झिटकी, चॉक, फुल–पत्ते इत्यादि हो सकते है। विद्यालय के बाहर संसाधनों में मॉडल, चार्ट, गिनतारा, 3-D ज्यामितीय वस्तुएँ इत्यादि हो सकते है।

आप सीखने–सिखाने के संदर्भ में BALA शब्द से परिचित भी होंगे। BALA का अर्थ Building as learning Aid से है। इसे हम इस रूप में समझे कि यह विद्यालय की दीवारों, जमीनों या खेल के मैदानों को रंगीन करने से नहीं है अपितु विद्यालय में उपलब्ध विभिन्न वस्तुओं की शिक्षण–अधिगम के लिए प्रयोग में लाने से है। चाहे वह खिड़की, दरवाजे, पंखा हो या विद्यालय में आने वाली धूप, रोशनी या आवाजें। इससे बच्चे किताबों की दुनिया से बाहर अधिगम के सभी संसाधनों और उनके तरीके व प्रत्यय खोजते है और सीखते है।

गणित सीखने–सिखाने के विविध संसाधनों की लंबी सूची हो सकती है जिनमें से कुछ इस प्रकार है–

ठोस वस्तुएँ मॉडल, चित्र, चार्ट, ज्यामितीय बोर्ड, पेंटिंग बोर्ड, पाठ्यपुस्तक, लकड़ी/धातु/प्लास्टिक के गणित सेंट, कम्प्यूटर, श्रव्य–दृश्य सामग्री, (जैसे– प्रोजेक्टर, रेडियो, टेलीविजन, टेप रिकार्डर इत्यादि) बुलेटिन बोर्ड, अबेकस, कार्य पुस्तिकाएं, फ्लैश कार्ड्स, लूडो, गिनतारा, डायस, इत्यादि।

गणित को सीखने–सिखाने में विविध संसाधन इस प्रकार भी हो सकते है–

- गणित की पाठ्यपुस्तक
- पुस्तकालय
- गणित कोना
- गणित प्रयोगशाला
- गणितीय खेल
- गणितीय पहेलियाँ
- औपचारिक बात–चीत

- अवलोकन
- परियोजना कार्य

इसके अतिरिक्त क्या आप भी अन्य संसाधनों के बारे में बता सकते है? विचार कीजिए।

आप अपने साथिचों से चर्चा करके सीखने–सिखाने में गणित के लिए और क्या–क्या संसाधन हो सकते है? उसकी सूची बनाइये।

समेकनः

इस इकाई में हमने जाना कि गणित सीखने–सिखाने के लिए गणित शिक्षण की क्या–क्या प्रविधियाँ उपयोगी हो सकती है। हम यहाँ गणित शिक्षण के रचनावादी नजरिए को देखते है। गणित सीखने का एक संभावित क्रम–अ (अनुभव–Experience), भा (भाषा–Language), चि (चित्र–Picture) तथा प्र (प्रतीक–Symbol) की आवश्यकता को महसूस किया है। साथ ही इस इकाई में औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़कर सीखने पर बल देने की चर्चा की गई है। बच्चे खेल–खेल में कैसे और किस प्रकार सीखते है और साथ ही वे किसी तथ्यों अवधारणाओं, संप्रत्ययों, संकेतों आदि को किस प्रकार पुनरावृत्ति यानी दोहराव करके सीख लेते है। इस पर भी हमने काफी विस्तृत चर्चा किया है। अधिगम की संप्राप्ति एक–दूसरे से भी होती है। अतः यहाँ, बच्चें भी एक–दूसरे से किस प्रकार सीखते हैं और गलतियों से सीखते है, की चर्चा की गई है।

सीखने–सिखाने में गतिविधियों एवं क्रियाकलापों की अहम् भूमिका के चलते हमने इस इकाई में इस पर विशेष रूप से प्रकाश डाला है। गणित की पहेलियाँ, माथापच्ची, जादुई वर्ग, कथन के बिना गणित मनोरंजक एवं आनंददायी हो ही नहीं सकता। अतः इस इकाई में इस पर काफी विस्तृत चर्चा किया गया है जिसे जानकर बच्चों में चिंतन एवं तर्कशक्ति का विकास हो सके। गणित शिक्षण में खुले प्रश्न और समसयाओं के बारे में बताया गया है। साथ ही गणित सीखने–सिखाने के सामग्री और विविध संसाधनों के बारे में विस्तार से प्रकाश डाला गया है।

मूल्यांकन

1. गणित शिक्षण में रचनावाद के महत्व को बताइए।
2. रचनावाद की क्या–क्या विशेषताएँ हैं? अपने विचार व्यक्त कीजिए।
3. बच्चो को गणित का कोई एक सवाल देने पर क्या सभी बच्चे को इसे हल करने का एक–ही तरीका होता है या अलग–अलग? अवलोकन करते हुए चर्चा कीजिए।
4. क्या आप सीखने के क्रम अ–भा–चि–प्र की आवश्यकता से सहमत हैं? यह ज्यामितीय आकृतियों के उपयोग में किस तरह से मदद करेगा?
5. बच्चों को गुणा की अवधारणा सिखाने के लिए एक खेल का उदाहरण बताइए। यानी आप खेल–खेल में बच्चों को गुणा की अवधारणा कैसे सिखा पाऐंगे?
6. "दोहराव का मतलब रटना नहीं है"–क्या आप इस कथन से सहमत हैं? उदाहरण से स्पष्ट कीजिए।
7. क्या आप बच्चों के आपसी मेल–जोल और एक–दूसरे से सीखने के और फायदे सोच सकते हैं? यदि हाँ, तो क्या?

8. एक शिक्षिका ने कक्षा–5 के बच्चों को सवाल दिये–
251 में कितनी दहाई है? ज्यादातर बच्चों के जवाब थे 5, मगर एक बच्चे ने कहा 25 है। आप के ख्याल से जवाब में ये अलग–अलग अंतर क्यों आए होंगे।
9. क्या गलतियां उपयोगी होती है? बच्चो द्वारा की गई कुछ गलतियों का उदाहरण देकर बताएं कि वे गलतियां बच्चें के गणित सीखने में किस प्रकार उपयोगी हो सकती है?
10. आप दैनिक समाचार पत्रों में दिये गये 'सूडोकू' के प्रश्न, जादुई वर्ग, माथापच्ची के इबारती सवालों को हल कीजिए और अपने सहपाठियों से चर्चा कीजिए।

- **संदर्भ सूची**

  - बिहार पाठ्यचर्या की रूप रेखा (BCF)–2008
  - बिहार राज्य की गणित की प्राथमिक स्तर की पाठ्य–पुस्तकें
  - गणित शिक्षण का आधार पत्र, एन.सी.ई.आर.टी. नई दिल्ली
  - राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूप रेखा (एन.सी.एफ)–2005

इकाई–2

गणित में सीखने की योजना और आकलन

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरांत आपः–

1. गणित में सीखने की योजना की आवश्यकता एवं महत्व को समझ सकेंगे।
2. गणित में सीखने की योजना क्यों वह कैसे पर चर्चा एवं विश्लेषण करेंगे।
3. गणित में सीखने के आकलन पर प्रकाश डालेंगे।
4. सतत व व्यापक मूल्यांकन को समझेंगे।
5. प्राथमिक स्तर पर सतत व व्यापक व्यापक मूल्यांकन का उद्देश्य बता पायेंगे।
6. सतत व व्यापक मूल्यांकन के वर्तमान स्वरूप के अनुसार क्रियान्वित करेंगे।
7. सतत व व्यापक मूल्यांकन के द्वारा विद्यार्थियों के शैक्षिक व सहशैक्षिक पक्षो के आकलन को प्रभावी तरीके से कर पायेंगे।
8. सीखने–सिखाने की प्रक्रिया में सिखने के संकेतक का महत्त्व बतायेंगे।
9. कक्षा–कक्ष में प्रयोग में लाए जाने वाली आकलन की कुछ प्रविधियों को समझ सकेंगे एवं उसका उपयोग कर पायेंगे।
10. सिखने के संकेतक का निर्माण कर पायेंगे।
11. गणित में सीखने की योजना के चरणों एवं अव्ययो का जान सकेंगे एवं सिखने के योजना का निर्माण कर सकेंगे।
12. प्राथमिक स्तर पर गणित के संदर्भ में सतत एवं व्यापक मूल्यांकन को समझेंगे।

गणित में सीखने की योजना

प्रत्येक प्रक्रम चाहे एक संस्था हो या एक समुदाय हो या एक राष्ट्र हो उसकी उन्नति एवं वांछित लक्ष्यों की प्राप्ति के लिए एक उचित योजना की आवश्यकता होती है। ठीक इसी प्रकार एक प्रभावी गणित शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया हेतु भी एक उचित ठोस योजना की आवश्यकता होती है। एक शिक्षक के लिए गणित सिखने की योजना की अपेक्षाओं से संभावित निर्णय लेना होता है। प्रत्येक विषय हेतु पाठकों की विशिष्ट इकाइयों की योजनाएं स्वीकृत की जाती हैं। शिक्षक के द्वारा ध्यानपूर्वक रचित सिखने की योजनाओं से, पूर्व निर्दिष्ट लक्ष्यों को प्राप्त करने में सहायता मिलती है क्योंकि योजना एक दिशा देती है, जिससे शिक्षक को कक्षा को प्रभावी नेतृत्त्व करने में सहायता मिलती है। किसी कार्य को क्रमबद्ध एवं सफलतापूर्वक करते हुए निर्धारित उद्देश्य अथवा लक्ष्य को प्राप्त करने के साधन को योजना कहते हैं। इस योजना के निर्माण की प्रक्रिया को नियोजन (Planning) कहते हैं। नियोजित ढंग से कार्य करना सुविधाजनक तथा नियमित होता है। योजना बनाकर कार्य करने से उस कार्य की अनुमानित रूपरेखा के संबंध में कार्य निर्देशन प्राप्त होती है। इसलिए व्यक्ति को प्रत्येक कार्य को नियोजित ढंग से करना चाहिए। इसके लिए उसे किसी कार्य को प्रारंभ करने से पूर्व उसकी योजना बना लेनी चाहिए। वर्तमान समय में किसी भी शिक्षा के शिक्षक से यह आशा की जाती है कि वह प्रत्येक विषय वस्तु एवं कालांश के लिए योजना बनाकर ही पढ़ाए ताकि निर्धारित उद्देश्यों की पूर्ति हो सके। अतः कक्षा शिक्षण से पूर्व सीखने की योजना बनाना एक महत्त्वपूर्ण एवं आवश्यक कार्य माना जाता है। किसी भी शिक्षक प्रशिक्षण संस्थान में सीखने की योजना बनाना अवश्य सिखाया जाता है। अध्यापक द्वारा कक्षा शिक्षण हेतु सीखने

की योजना बनाने की प्रक्रिया ही पाठ नियोजन कहलाती है। पाठ नियोजन का परिणाम ही सीखने की योजना है।

हम सब जानते हैं कि

- 10 वर्ष की योजना को 10 वर्षीय योजना कहते हैं।
- 5 वर्ष की योजना को पंचवर्षीय योजना कहते हैं।
- 12 माह की योजना को वार्षिक योजना कहते हैं।
- छह माह की योजना को छमाही योजना कहते हैं।
- एक माह की योजना को मासिक योजना कहते हैं।
- 1 सप्ताह की योजना को इकाई योजना कहते हैं।
- प्रतिदिन की योजना को पाठ योजना कहते हैं।

सीखने की योजना में दो शब्द सीखना और योजना शामिल है। सीखने की योजना का अभिप्राय उस पूर्व निर्धारित योजना से है जिसके अनुसार शिक्षक नए ज्ञान को उचित विधियाँ एवं सहायक सामग्री के माध्यम से शिक्षार्थियों के सामने एक निश्चित अवधि के अंदर प्रस्तुत करता है। सीखने की योजना एक आलेख है जिसमें शिक्षक एक निश्चित समय पर पाठ्यवस्तु तथा उसके निर्धारित लक्ष्यों के अनुरूप विद्यार्थियों को विभिन्न गतिविधियों में शामिल कर उन्हें विभिन्न प्रकार के अनुभव प्रदान करते हैं ताकि उनका अपेक्षित व्यवहार परिवर्तिन हो सके।

गणित शिक्षण की योजना क्यों?

जीवन के हर क्षेत्र में योजना का महत्त्व होता है। कोई भी कार्य सफल तभी होता है जब कार्य की उचित रूप से योजना बना ली जाती है। योजना के बिना कोई भी कार्य उद्देश्य रहित होता है। जिस प्रकार योजना का हमारे दैनिक जीवन में महत्व है, उसी प्रकार शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया में भी योजना का अद्वितीय महत्व है। अनुभवी शिक्षक होने के नाते हमने हमेशा महसूस किया कि हमारे विद्यार्थी कभी–कभी बहुत बेचैन हो जाते हैं, और जो सामग्री उन्हें दी जाती है उन में उनकी दिलचस्पी कतई नहीं होती परंतु जब शिक्षण की योजना उद्देश्य आधारित (Objectivist) होती है जिसमें उचित शिक्षक सहायक सामग्री का उपयोग किया जाता है एवं योजना पूर्व ज्ञान पर आधारित होती हैं तब विद्यार्थि रूची पूर्वक शिक्षक अधिगम प्रक्रिया में सहभागिता दिखलातें हैं।

बच्चों को गणित सिखाने की योजना बनाते समय कुछ प्रमुख बातों पर ध्यान रखा जाना चाहिए जो निम्नलिखित हैं:–

1. गणित सीखना एक विकासशील प्रक्रिया है।
2. योजना बनाने से लक्ष्यों को स्पष्ट करने में मदद मिलती है।
3. योजना बनाने से इस बात की पुष्टि हो जाती है कि विषय–वस्तु के संपूर्ण आवश्यक पहलू शामिल कर लिए गए हैं।
4. योजना बनाने से समय को आवश्यकता के अनुसार बाँटा जा सकता है।
5. योजना बनाने से बालकों की रूचि व ध्यान लगाए रखने में सहायता मिलती है।
6. योजना बनाने से अनावश्यक दोहराव से बचा जा सकता है और अभ्यास के लिए आवश्यक दोहराव कराया जा सकता है।

7. योजना बनाने से शिक्षक का स्वयं का आत्मविश्वास बढ़ता है और उससे अपने काम से खुशी मिलती है।
8. गणित का शिक्षण संगापुर मॉडल पर आधारित हो सकता है जिससे विद्यार्थियों में समस्या समाधान तथा चिंतन कौशल विकसित होता है।
9. गणितीय अवधारणा को क्रमबद्ध ढंग से प्रस्तुत करना चाहिए। गणितीय अवधारणाओं की प्रकृति सीमित होती है। इसमें एक निश्चित कर्म होता है। उनके लिए आवश्यक तार्किक सोच बच्चे समझ सकें।
10. गणित सीखने में बच्चों की सक्रिय भागीदारी हो। सक्रिय भागीदारी का अर्थ है कुछ करना। भागीदारी को बढ़ावा दें और पुरस्कृत करें।
11. गतिविधियों, खेलों में भाग लेने से गणित सीखने में मदद मिलती है। गणितीय सोच का विकास तब होता है जब बच्चों को अंको से खेलने का मौका मिले और उन्हें उनके सामने गणितीय समस्याएं सार्थक संदर्भ में रखी जाएँ। गणितीय अवधारणा का उपयोग खेलों और चित्रण सामग्री के उचित प्रयोग से बच्चों को गणित अनुभव करने में और सीखने में मदद मिलती है।

गणित सीखना तभी प्रभावशाली होता हो सकता है जब अध्यापक बच्चों को उनके विकास के स्तर के अनुरूप गणित को खोजने और अनुभव करने के लिए एक सही वातावरण तैयार कर सके। गणित सीखने के लिए अमूर्त विचारों को समझने व आत्मसात करने की क्षमता की आवश्यकता होती है। लेकिन बच्चों में अमूर्त विचारों को समझने की क्षमता धीरे–धीरे विकसित होती है। विशेषतौर पर प्राथमिक विद्यालय के बच्चे उन प्रतीकों का प्रयोग कर पाते हैं जो उनको सार्थक लगे। गणित का जो ज्ञान विकसित किया जा रहा है, यदि यह प्रतीक उससे ठोस या मानसिक रूप से सीधे जुड़े हैं तो इनका अर्थ स्वयं स्पष्ट हो जाएगा। इस कड़ी को जोड़ने में ठोस चीजों की उपस्थिति से मदद मिलती है। यदि सीखने के उपयुक्त संसाधन मिले तो प्राथमिक विद्यालय के बच्चे चित्रों व रेखा चित्रों के माध्यम से आसानी से प्रतीकात्मक स्तर पर पहुंच जाते हैं।

सीखने की योजनाः योजना क्यों और कैसे बनाएँ?

विद्यार्थि बेहतर तरीके से तभी सीखते हैं जब विषयवस्तु को इस ढंग से व्यवस्थित किया जाए कि किसी कालांश में शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया से गुजरने के दौरान विद्यार्थि आनन्द का अनुभव करें। ऐसा तब होता है जब शिक्षक ऐसे वातावरण का निर्माण करें जिसमें विद्यार्थि रूचिपूर्वक सीख सकें। इसके लिए शिक्षक को उचित विधियों, प्रविधियों गतिविधियों, शिक्षण–अधिगम सामग्रियों, प्रक्रियाओं एवं आकलन की विधियों का चयन विषय वस्तु की प्रकृति एवं कठिनता के स्तर के अनुसार करना होता है।

प्रत्येक विद्यार्थि के पास गणित से संबंधित परिवेश से प्राप्त सामान्य और विशिष्ट अनुभव होते हैं तथा एक शिक्षक यह जानते हैं कि विद्यार्थि गणित कैसे सीखते है। तथा उनके गणित सीखने की प्रक्रिया को आनंददायी और सार्थक कैसे बनाया जा सकता है। साथ ही सीखने की प्रक्रिया के समाप्त होने के उपरांत प्राप्त हुए अनुभव से विद्यार्थि के व्यवहार में हुए परिवर्तन का आकलन एवं मूल्यांकन किन विधियों एवं उपकरण का प्रयोग कर किया जा सकता है।

इसलिए गणित के सफल शिक्षण के लिए तथा विद्यार्थिओं के व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन लाने के लिए शिक्षक, शिक्षण के पूर्व प्रत्येक कक्षा की प्रत्येक विषय के, प्रत्येक पाठ के विभिन्न अवधारणाओं को पढ़ाने के पूर्व एक सीखने की योजना तैयार करते है। यह प्रत्येक शिक्षक व्यक्तिगत रूप से तैयार करते है तथा यह सीधे तौर पर शिक्षक की योग्यता से जुड़ी होती है।

- **एक आदर्श सीखने की योजना तैयार करने के निम्नलिखित लाभ होते हैं।**
  - ⇨ सीखने की योजना के द्वारा विषयवस्तु को क्रमबद्ध सुव्यवस्थित तथा प्रभावी ढंग से पढ़ाया जा सकता है।
  - ⇨ सीखने की योजना द्वारा उपयुक्त एवं प्रभावी शिक्षण विधि, प्रविधियां, गतिविधियाँ शिक्षण सहायक सामग्री तथा आकलन की विधियाँ तय करने में मदद मिलती है।
  - ⇨ इसके इस्तेमाल से शिक्षक दोहराव से बचते है तथा समय एवं साधनों की बचत होती है।
  - ⇨ इसके द्वारा विद्यार्थिओं की रूचि बढ़ाने में मदद मिलती है तथा विषयवस्तु के प्रति उनमें धनात्मक अभिवृत्ति का विकास होता है।
  - ⇨ इसके इस्तेमाल से शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया में विद्यार्थिओं की सहभागिता बेहतर होती है।
  - ⇨ शिक्षकों में आत्म–विश्वास का स्तर बढ़ता है तथा वे निश्चित किए गए शैक्षिक उद्देश्यों को प्राप्त करने में सफल होते है।

सीखने की योजना तैयार करने के विभिन्न सोपान

सीखने की योजना तैयार करने में सर्वप्रथम विषयवस्तु का निर्धारण किया जाता है। उसके उपरान्त विद्यार्थिओं की कक्षा, उनकी अवस्था, मानसिक स्तर, कक्षा की अवधि, उपलब्ध संसाधन आदि के अनुसार सीखने की योजना तैयार की जाती है जिसके निम्नलिखित पद होते है।

1. शीर्षकः इसके अंतर्गत सीखने की योजना की संख्या सबसे ऊपर पेज के बीच में लिखी जाती है। उसके नीचे अन्य आरम्भिक विवरण जैसे शिक्षक/शिक्षिका का नाम, कक्षा, कालांश, विषय, इकाई, विषयवस्तु का शीर्षक आदि लिखा जाता है।
2. विषयवस्तु से संबंधित पूर्व समझ की समीक्षाः
   इसके अंतर्गत पढ़ाये जाने वाले विषयवस्तु/प्रकरण से विद्यार्थि कैसे परिचित हैं? क्या विषयवस्तु के अंदर चर्चित बातें विद्यार्थिओं के परिवेश में शामिल है या नहीं? क्या शिक्षक को पूर्व से इस विषयवस्तु को पढ़ाने का अनुभव है या नहीं? क्या शिक्षक को इस विषयवस्तु की व्यप्ति समझ है या नहीं? तथा यह विषयवस्तु पढ़ाये जपने वाली कक्षा के पाठ्यक्रम में उल्लेखित किन बिन्दुओं से जुड़ा हुआ है? कक्षा के और किन विषयो या इकाइयों से जुड़ा हुआ है आदि के संबंध में चर्चा की जाती है।
3. विषयवस्तु के शिक्षणशास्त्रीय योजना का निर्माणः
   इसके अंतर्गत विषयवस्तु/उप विषयवस्तु का विवरण एवं सीखने का महत्व बताया जाता है, विषयवस्तु के शिक्षण के लिए चुनी गई विभिन्न विधियों एवं गतिविधियों को चुनने का आधार बताया जाता है तथा कालांश के दौरान किये जाने वाले शिक्षण का संक्षिप्त विवरण लिखा जाता है।
4. शिक्षक/शिक्षिका द्वारा स्वमूल्यांकनः
   चौथा चरण शिक्षण प्रक्रिया के बाद किये जाने वाले कार्य से जुड़ा है। इसके अंतर्गत शिक्षक/शिक्षिका खुद से किये गये शिक्षण कार्य का स्वमूल्यांकन करते है। जिसके लिए वे किया गये शिक्षण कार्य का विभिन्न सुझावात्मक बिन्दुओं के आलोक में आकलन करते है।
5. अवलोकनकर्त्ता की टिप्पणीः
   पाँचवे चरण में शिक्षण अधिगम प्रक्रिया के दौरान अवलोकनकर्त्ता के द्वारा अवलोकन किए गए कक्षा का आंखोदेखी वर्णन किया जाता है तथा उसपर एन.सी.एफ.–2005, बी.सी.एफ.2008 तथा

एन.सी.एफ.टी.ई.–2009 द्वारा सुझाये गए मार्गदर्शी सिद्धांतो के आलोक में समीक्षात्मक टिप्पणी की जाती है। तथा शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया को बेहतर बनाने के लिए कुछ महत्वपूर्ण सुझाव दिए जाते हैं।

सीखने की योजना की सबसे महत्वपूर्ण खुबी इसका लचिलापन हैं। साथ ही सीखने की योजना के द्वारा शिक्षक/शिक्षका को स्वयं द्वारा किए गए शिक्षण कार्य का स्वमूल्यांकन करने का अवसर भी प्राप्त होता है तथा अनुभवी एवं योग्य शिक्षकों द्वारा उनके द्वारा की गई शिक्षण कार्य की समिक्षा भी की जाती है।

सीखने की योजना बहुत लचीली हैं इसके शिक्षण में आनेवाली सम्भावति चुनौतियों को भी शामिल किया गया है। इसके द्वारा बालकेन्द्रित शिक्षा, लोकतांत्रिक सोच, सृजनशीलता, नवाचार, आलोचनात्मक शिक्षणशास्त्र आदि अवधरणाओं को बल मिलता है। सीखने की योजना द्वारा शिक्षक, शिक्षण की प्रक्रिया तथा उसमें अपनी भूमिका को बेहतर ढंग से समझ पातें है। तथा अलग–अलग नीतिगत दस्तावेजों, पाठ्यपुस्तक एवं पाठ्यक्रम से अपने विषयवस्तु को जोड़ पाते है।

गणित के संदर्भ में सीखने के आकलन क्यों, क्या और कैसे?

विद्यार्थिओं के वास्तविक व्यवहार परिवर्तन का अपेक्षित व्यवहार परिवर्तन से तुलना करने के लिए शिक्षक आकलन की विभिन्न विधियों एवं प्रक्रियाओं का चुनाव करते हैं। अतः आकलन की अवधारणा को जानना एवं उसका उचित एवं प्रभावी उपयोग करने में पारंगत होना प्रत्येक शिक्षक के लिए नितांत आवश्यक है।

आकलन से तात्पर्य उन प्रक्रियाओं से है जो अधिगमकर्त्ता की उपलब्धियों को निरंतर सभी क्षेत्रों में मापने के लिए किया जाता है आकलन के लिए अभिष्ट आँकड़ो का संग्रह कर व्याख्या के लिए उसे व्यवस्थित किया जाता है। यह आँकड़े विभिन्न स्तरों पर विभिन्न उपकरणों, क्षेत्रों एवं प्रक्रियाओं द्वारा एकत्रित किए जाते हैं। आकलन के उद्देश्य हमेशा विद्यार्थिओं की शैक्षिक प्रगति की जानकारी एवं उसके स्तर में सतत् सुधार करना होता है। आकलन के द्वारा सीखने में आने वाली कठिनाइयों का पता लगाया जाता है तथा उसका उचित समाधान किया जाता है। आकलन हेतु विभिन्न विषयों में उपयुक्तता के अनुसार अंकन एवं ग्रेडिंग दोनो का उपयोग किया जाता है।

आकलन के प्रकार

उद्देश्य के आधार पर आकलन के मुख्य रूप से तीन प्रकार में बाँटा जा सकता है।

1. **रचानात्मक आकलनः–** जब कोई शिक्षण प्रक्रिया अपनी प्रारंभिक या निर्माण अवस्था में हो और उसका आकलन कर उसमें सुधार किया जा सकें तो इस प्रकार के आकलन को रचनात्मक आकलन कहते हैं। इसका इस्तेमाल शिक्षण प्रक्रिया की प्रभावशीलता, गुणवत्ता, वांछनीयता या उपयोगिता को बढ़ाने के लिए किया जा सकता है। इसके माध्यम से विद्यार्थिओं की क्षमता को पहचानने में तथा उनके उपलब्धि–स्तर को बढ़ाने में मदद मिलती है।
2. **संकलनात्मक आकलनः–** संकलनात्मक आकलन का इस्तेमाल कर निर्धारित समय पर जैसे किसी प्रोग्राम, कोर्स या इकाई के अंत में विद्यार्थिओं के ज्ञान, बोध, धनात्मक अभिवृति, कौशल आदि के बारे में जानने के लिए किया जाता है। इसका उपयोग नेक विकल्पों में से

सर्वोतम विकल्प का चयन करने में तथा किसी शैक्षिक कार्यक्रम की प्रभावशीलता का अध्ययन करने के लिए भी किया जाता है।

3. **निदानात्मक आकलनः—**

निदानात्मक आकलन का प्रयोग विद्यार्थिओं में किसी प्रकार की अधिगम कठिनाई का पता लगाने के लिए किया जाता है। इसके द्वारा शिक्षक यह जानने का प्रयत्न करते है कि पाठ्यवस्तु का कौन सा भाग विद्यार्थिओं के लिए कठिन है तथा किस भाग में विद्यार्थि पारंगत है। इसके द्वारा विद्यार्थिओं की विषयगत विशेषताओं या कमियों का पता लगाकर उनका समाधान किया जाता है।

प्राथमिक स्तर पर गणित के संदर्भ में सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन

परिचयः—

स्तत् एवं व्यापक मूल्यांकन में विद्यार्थियों के जीवन के संज्ञानात्मक पक्ष के साथ—साथ उनके भावात्मक, सामाजिक, नैतिक, आध्यात्मिक क्रियात्मक आदि सभी पक्षों के आकलन पर समान रूप से बल दिया जाता है ताकि विद्यार्थियों के व्यक्तित्व के सभी पक्ष मजबूत हो सकें और विद्यार्थियों का सर्वांगीण विकास हो सके।

पूर्व में मूल्यांकन की जगह पर सार्वधिक परीक्षाओं का प्रयोग किया जाता था जिसमें विद्यार्थियों के संज्ञानात्मक पक्ष के भी सिर्फ कुछ भागों का ही आकलन हो पाता था जबकि सह—संज्ञानात्मक पक्षों का तो बिल्कुल भी नहीं। ऐसे मूल्यांकन से विद्यार्थिओं की वास्तविक प्रगति, उपलब्धि समझ, भावात्मक एवं क्रियात्मक पक्षों का वास्तविक आकलन नहीं हो पाता था। तथा अंक आधारित होने के कारण विद्यार्थिओं के उपलब्धि के वर्गीकरण करने के अत्यधिक बिंदु होते थे जिससे उनमें अंकों के लिए अत्यधिक प्रतिस्पर्धा होती थी तथा वे अत्यधिक तनाव के शिकार हो जाते थे।

पारंपरिक मूल्यांकन की इन्हीं सीमाओं को ध्यान में रखते हुए सतत एवं व्यपक मूल्यांकन की अवधारणा को विकसित किया गया। इसकी जरूरत एवं उपयोगिता की चर्चा NCF-1975 तथा 1986 की शिक्षा नीति में भी मिलती है। तथा आज यह सर्वविदित है कि विद्यार्थिओं के व्यक्तित्व के सतत एवं सर्वांगीण विकास हेतु सतत एवं व्यापक मूल्यांकन आदि आवश्यक है।

सतत एवं व्यापक मूल्यांकन का शाब्दिक अर्थ सीखने के सभी क्षेत्रों का लगातार आकलन है। विद्यार्थिओं की सीखने की क्रियाओं के दौरान उनकी सक्रियता, सहभागिता कठिनाइयां, विशेषताओं, सीमाओं आदि को पहचानना और उनके अनुरूप उनके व्यक्तित्व के क्षेत्रों का लगातार विकास करने हेतु अपनी शिक्षण पद्धति, विधियां, प्रविधियां शिक्षण—आधिगम सामग्री आदि में आवश्यकतानुरूप बदलाव लाना सतत् के अंतर्गत आता है।

तथा विद्यार्थी के व्यक्तित्व के सभी आयामों संज्ञानात्मक, भावात्मक, क्रियात्मक, सामाजिक, नैतिक, सौदर्यात्मक आदि सभी पक्षों का विकास सर्वांगीण कें अंतर्गत आता है।

सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन हेतु सतत् एवं व्यापक शिक्षण करना तथा मूल्यांकन के विभिन्न विधियों एवं उपकरणों की जानकारी एवं उनका उपयोग करने में पारंगत होना नितांत आवश्यक है। सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन की अवधारणा वास्तव में परीक्षा सुधार के निम्न सिद्धांतों पर आधारित है।

1. जो शिक्षक, शिक्षण कार्य करते हैं, उसी के द्वारा विद्यार्थिओं का मूल्यांकन किया जाये न कि किसी बाहरी परीक्षक द्वारा

2. मूल्यांकन कार्य सार्वधिक या सत्र के अंत में न होकर सम्पूर्ण सत्र में निरंतर होता रहें।

3. मूल्यांकन द्वारा वर्त्तमान स्थिति की जानकारी प्राप्त हो।

गणित में सतत एवं व्यापक मूल्यांकन का महत्वः—

NCF 2005 परम्परागत मूल्यांकन पद्धति के बजाय नयी तथा सार्थक मूल्यांकन पद्धति अपनाने पर बल देता है RTE Act -2009 के अनुसार शिक्षक को प्रत्येक विद्यार्थी संचर्या प्रगति पत्रक तैयार करना तथा NEP 2020 के अनुसार शिक्षक के अलावा विद्यार्थिओं के मूल्यांकन में उनकी स्वयं की ओर उनके सहपाठियों की भी भूमिका महत्वूपर्ण होगी ताकि बच्चों के सीखने का समग्र रूप से मूल्यांकन किया जा सके और बच्चे बिना डरे मूल्यांकन की प्रक्रिया में भाग ले सकें। शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया अपने दो प्रमुख घटकों शिक्षक और विद्यार्थी, उनके बीच होने वाली अंतःक्रिया और उनके आपसी व्यवहार और सामंजस्य पर निर्भर करती है।

प्राथमिक स्तर पर गणित में CCE —गणित में मूल्यांकन गणित शिक्षण के उद्देश्य से जुड़ा है। विद्याालय के आरंभिक वर्षों में गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य दैनिक जीवन में उपयोग में आने वाली अवधारणाओं से संबंधित क्षमताओं, दक्षताओं, कौशलों, रूचियों, सोच व तर्क शक्ति को विकसित करना है। ताकि वे अपने आस—पास के वातावरण की छानबीन कर सकें तथा उनसे संबंध स्थापित कर सकें, आकारों एवं आकृतियों को समझ सकें तथा उनके अवलोकनीय गुणों में समानता और अंतर स्पष्ट कर सकें, दैनिक जीवन में संख्याओं पर संक्रियाएं (जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग) करने के अपने तरीकों का विकास कर सकें, गणितीय भाषा और प्रतिकों की समझ विकसित कर सकें, पूर्ण के हिस्से को भिन्न के रूप में समझ सके, अपने परिवेश से सरल आंकड़ों का संकलन, प्रदर्शन एवं व्याख्या कर सकें तथा दैनिक जीवन में इनका प्रयोग कर सकें, आकृतियों तथ संख्याओं के सरल पैटर्न की पहचान निरंतर कर सके आदि।

कक्षा—कक्ष में प्रयोग में लाये जाने वाली आकलन की कुछ प्रविधियाँ

उद्देश्य की प्राप्ति तभी संभव है जब शिक्षक को प्रत्येक विद्यार्थी की सीखने संबंधी प्रगति की समझ विकसित करने, सीखने संबंधी कमियों को पहचानने तथा उनको दूर करने का पर्याप्त तथा समुचित अवसर मिलें और यह तभी संभव है जब परम्परागत मूल्यांकन की जगह सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन का प्रयोग हो। क्योंकि सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन के अंतर्गत गणितीय अधिगम के विभिन्न आयामों एवं स्तरों के आकलन के लिए आकलन की प्रभावी विधियां, उपकरण एवं तकनीक मौजूद है। जैसे— अवलोकन, समवयसमूह द्वारा अवलोकन, स्व—अवलोकन, प्रदत्त कार्य, परियोजना कार्य, औपचारिक एवं अनौपचारिक बातचीत, पोर्टफोलियो, रेटिंग—स्केल, अवलोकन सूची, अनुभव रिकॉर्ड, समग्र प्रगति ़पत्रक, प्रश्नावली, विभिन्न प्रकार की एकल एवं समूह गतिविधियाँ आदि।

इन सभी का प्रयोग विद्यार्थिओं के मूल्यांकन को व्यापक एवं उद्देश्यात्मक तरीके से तथा लगतार करने में सहायक होते हैं। तथा किसी भी समय उनकी उपलब्धि का वर्तमान स्तर बता पाने में भी मदद करते है।

अधिगम प्रतिफल

प्रायः शिक्षकों में इस तथ्य की स्पष्टता नहीं होती कि विद्यार्थिओं की कक्षाओं के स्तर के अनुसार किस प्रकार का सीखना आवश्यक है। तथा वे कौन से मापदंड हैं जिनका इस्तेमाल कर इसे मापा जा सकता है। प्रायः शिक्षक उपलब्ध पाठ्यपुस्तक को ही संपूर्ण पाठ्यक्रम मानकर अध्ययायों के अंत में दिए गए एकांशों के आधार पर अपने विद्यार्थिओं की समझ की विभिन्नाताओं तथा शिक्षण के विभिन्न सिद्धांतों को वे ध्यान में नही रख पाते। पाठ्यसामग्रियों में संदर्भानुसार विभिन्नताएं और अपनाई गई शिक्षण सिद्धांतों, विधियों एवं तकनीकों में विविधता पर सामान्यतया उनका ध्यान नहीं जाता क्योंकि इनके आकलन की कोई निश्चित कसौटी नहीं है।

अतः सतत् विकास के लक्ष्य के अनुरूप किसी विषयवस्तु के शिक्षण के उपरांत विद्यार्थिओं में अपेक्षित ज्ञान, बोध, दक्षता, कौशल, अभिवृत्ति आदि को प्रत्येक कक्षा में प्रत्येक विषय के अनुसार विभिन्न अधिगम प्रतिफलों के रूप में निश्चित किया गया। ये अधिगम प्रतिफल, तरीके अपनाने में ही मदद नहीं करते बल्कि अन्य साझेदारों जैसे– संरक्षक, माता–पिता, समुदाय, विद्यालय प्रबंध समिति के सदस्यों, अधिकारियों आदि का गुणवत्तापूर्ण शिक्षा सुनिश्चित करने में उनकी भूमिका के प्रति सतर्क और जिम्मेवार भी बनाता है। स्पष्ट रूप से परिभाषित अधिगम प्रतिफल विभिन्न पाठ्यचर्या क्षेत्रों की अपेक्षाओं को पूर्ण करने में बहुत ही सहायक सिद्ध होते हैं।

अधिगम प्रतिफल की अवधारणा

विद्यार्थिओं के व्यवहार के सभी पक्षों में अपेक्षाकृत स्थायी परिवर्तन लाने के लिए पाठ्यचर्या के उद्देश्यों के आलोक में पाठ्यक्रम में सीखने के जो लक्ष्य निर्धारित किए जाते हैं तथा जिन्हें ध्यान में रखकर शिक्षक अपने दैनिक शिक्षण कार्य को संपादित करते हैं तत्पश्चात उनके विद्यार्थियों में जो वांछित परिवर्तन आता है उसे ही अधिगम प्रतिफल कहा जाता है। किसी एक इकाई, अवधारणा, दक्षता या कौशल से जुड़े हुए एक से अधिक अधिगम प्रतिफल हो सकते हैं। इस प्रकार यह किसी विशिष्ट दक्षता या कौशल के भाग होते हैं।

अधिगम प्रतिफल एक विशिष्ट कथन होता है जिसके द्वारा किसी अवधारणा से संबंधित दक्षता, ज्ञान, बोध, कौशल अभिवृति आदि के अर्जित उपलब्धि का मापन किया जाता है।

अधिगम संकेतक

सीखने के संकेतक शिक्षण अधिगम प्रणाली एवं शिक्षण प्रक्रिया में आई प्रगति के प्रमाण हैं। यह अपेक्षित अधिगम प्रतिफल को प्रज्ञप्त करने के लिए सहायक होते हैं। अधिगम संकेतकों का निर्माण/निर्धारण पाठ्यक्रम के उद्देश्यों के आलोक में अधिगम प्रतिफल के अनुसार तय किए जाते हैं। उनका निर्माण विद्यार्थियों की कक्षा, आयु, मानसिक स्तर, परिवेश तथा आवश्यकता के अनुसार किया जाता है। इसके द्वारा विद्यालयों में सीखने की गुणवत्ता को बढ़ाया जा सकता है तथा शिक्षकों को भी प्रत्येक अवधारणा/प्रकरण से जुड़े विशिष्ट उद्देश्यों को तय करने, शिक्षण विधियों, प्रविधियों, गतिविधियों, शिक्षण अधिगम सामग्रियों एवं वातावरण को निश्चित करने में काफी मदद मिलती है तथा इसकी मदद से अधिगम प्रतिफल एवं शैक्षिक आकांक्षाओं की प्रतिपूर्ति करने में मदद मिलती है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद ने विभिन्न कक्षाओं के विभिनन विषयों के सीखने के प्रतिफल तय किए है। जो पुस्तक के रूप में संबंधित वेबसाइट पर उपलब्ध है। विभिन्न राज्यों ने अपने क्षेत्रीय परिप्रेक्ष्य में उसमे परिवर्तन कर अपने राज्य की आवश्यकताओं के अनुसार विभिन्न कक्षाओं की विभिन्न विषयों की अधिगम प्रतिफल तय किया है। ताकि शिक्षक बिना किसी विलंब सभी विद्यार्थियों

के लिए सीखने के कौशलों को अधिक उपयुक्त रूप से सुनिश्चित करें एवं आवश्यक तथा अपेक्षित सुधारात्मक कदम उठाएं।

शिक्षकों को निश्चित किए गए अधिगम प्रतिफल के अनुसार अधिगम संकेतकों का निर्माण करना होता है तथा उसके अनुसार वे शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया निश्चित करते हैं एवं आवश्यक एकल एवं सामुहिक गतिविधियों का चुनाव करते हैं। तथा अंत में निश्चित किए गए अधिगम प्रतिफल के आकलन हेतु एकांशों का निर्माण करते हैं

उदाहरण हेतु कक्षा 6 के विज्ञान विषय में वर्णित पाठ "भोजन कहा से आता है" के लिए निश्चित किया गया पहला अधिगम प्रतिफल विभिन्न खाद्य सामग्री, उनके प्राप्ति स्त्रोत आदि की पहचान, सूचीकरण, अंतर और वर्गीकरण करते हैं के निम्नलिखित अधिगम संकेतक हो सकते हैं

1. प्रतिदिन खाये जाने वाले खाद्य पदार्थों के बारे में बताना।
2. खाद्य सामग्री/व्यंजन बनाने में प्रयुक्त सामग्री की सूची बनाना।
3. खाद्य सामग्री/व्यंजन बनाने में प्रयुक्त स्त्रोतों के आधार पर अंतर और वर्गीकरण करना। जैसे पौद्यों, जन्तुओं एवं अन्य स्त्रोत से प्राप्त खाद्य पदार्थ।

इस प्रकार स्पष्ट है कि अधिगम संकेतक शैक्षिक उद्देश्यों की प्राप्ति में काफी सहायक हैं तथा इनको निश्चित करने से शिक्षकों को अपनी शिक्षण विधियां, गतिविधियाँ, शिक्षण अधिगम सामग्री को तय करने में मदद मिलती है तथा वे आत्मविश्वास के साथ प्रभावी शिक्षण अधिगम प्रक्रिया का संचालन कर पाते हैं।

स्वमूल्यांकन

1. परंपरागत मूल्यांकन और सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन में क्या अंतर है?
2. शैक्षिक प्रक्रिया के सफल संचालन हेतु सीखने की योजना की उपयोगिता पर प्रकाश डालें।
3. आकलन, मूल्यांकन से कैसे संबंधित है, इसकी चर्चा करें।
4. अधिगम प्रतिफल और अधिगम संकेतक से आप क्या समझतें है?
5. अधिगम संकेतक शिक्षकों के लिए सहायक है। इसके लिए प्रर्याप्त तर्क दीजिए।

ई–संसाधन

एन०सी०इ०आर०टी० (2005), राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005, नई दिल्लीः एन०सी०इ०आर०टी०

एन०सी०इ०आर०टी०(2017), प्रारंभिक स्तर पर सीखने के प्रतिफल–2017, नई दिल्ली, एन०सी०इ०आर०टी०

एन०सी०इ०आर०टी०(2009), सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन शिक्षक निर्देशिका 2009, नई दिल्ली–सी०बी०एस०ई०

इकाई–3

ज्यामितीय आकृतियाँ एवं पैटर्न

- ❖ परिचय
- ❖ उद्देश्य
- ❖ इकाई के विषय
    - आकृतियाँ : खुली व बंद, नियमित व अनियमित
    - ज्यामिति के अवयव : बिन्दु, रेखा, किरण
    - रेखाखण्ड एवं कोण का प्रत्यय
    - द्विविमीय आकृतियों एवं त्रिविमीय वस्तुओं की समझ
    - सममित आकृतियाँ
    - पैटर्न की अवधारणा
- ❖ समेकन
- ❖ ई– संसाधन
- ❖ मूल्यांकन
- ❖ संदर्भ सूची

इकाई–3

ज्यामितीय आकृतियाँ एवं पैटर्न

परिचय

हर बच्चे का स्थान संबंधी कुछ सहज विचार जैसे दूर, पास, लम्बा, छोटा इत्यादि होता है। इन्हीं सहज विचारों पर ज्यामिती आकृतियों के पाठों की बुनियाद रखी जानी चाहिये लेकिन ऐसा होता नहीं है। आज भी हममें से अधिकांश लोग बिन्दु, रेखा, अर्ध रेखा, रेखाखण्ड, वर्ग, आयत जैसी ज्यामितीय अवधारणाओं को सिखाने के लिए औपचारिक परिभाषाओं या मौखिक वर्णन का सहारा लेते हैं। नतीजा यह होता है कि बच्चे सिखाई गई अवधारणाओं का मानसिक चित्र निर्मित नहीं कर पाते हैं। यदि आप अपने विद्यालय या अपने आसपास के विद्यालय के कक्षा 3,4,5 के बच्चों के साथ इससे संबंधित बातचीत करें या उनकी गणित की कक्षा का अवलोकन करें तो आपको शायद ऐसे कई बच्चें मिल जाएँ जो आपको वर्ग, वृत, शंकु, आयात अथवा अन्य किसी आकृति की परिभाषा तो बता देंगे लेकिन यदि आप उनसे पूछे कि वर्ग आयत है या नहीं अथवा वर्ग किस तरह का आयत है तो शायद वे इसका जवाब न दे पाएं। क्या इसका मतलब है कि बच्चे ऐसी आकृति की कल्पना करने में सक्षम नहीं हैं अथवा उन्हें इस तरह की आकृतियों को देखने का मौका कभी नहीं मिला या वे अपने दिमाग में इन आकृतियों की छवि नहीं बना पाते है। किसी बच्चे को कक्षा में दो बेलनाकार आकृतियों के आकार की तुलना करने में कठिनाई होती है जबकि घर पर वह बड़ी आसानी से 2 किलो ग्राम चीनी रखने के लिए बड़ा बर्तन ढूंढ निकालता है। यह इकाई इस तरह के प्रश्नों व इन प्रश्नों के संदर्भ में बच्चों के साथ काम कैसे किया जाए समझने में हमारी मदद करेगी।

सीखने के उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरांत आपः

- ज्यामितीय अवधारणाओं में बच्चों की दक्षता हासिल कराने के लिए उनके रोजमर्रा के अनुभवों का इस्तेमाल कर पाएँगे।
- ज्यामितीय अवधारणाओं को समझने कि लिए विभिन्न प्रकार के खेल व गतिविधि का निर्माण कर पाएँगे।
- अपनी शिक्षण विधियों की उपयोगिता का आकलन कर पाएंगे।
- विभिन्न ज्यामितीय अवयवों, बिन्दु, रेखा, किरण, रेसाखंड, कोण की अवधारणा को समझ पाएँगे।
- विभिन्न आकृतियों के क्या ज्यामितीय निहितार्थ हैं, बता पाऐंगे।
- द्विविमीय आकृतियों एवं त्रिविमीय वस्तुओं की पहचान करने तथा उनके विशेष गुणों को जानने में सक्षम होंगे।
- पैटर्न की अवधारणा को समझेंगे तथा उनका आवश्यकतानुसार प्रयोग कर पाऐंगे।

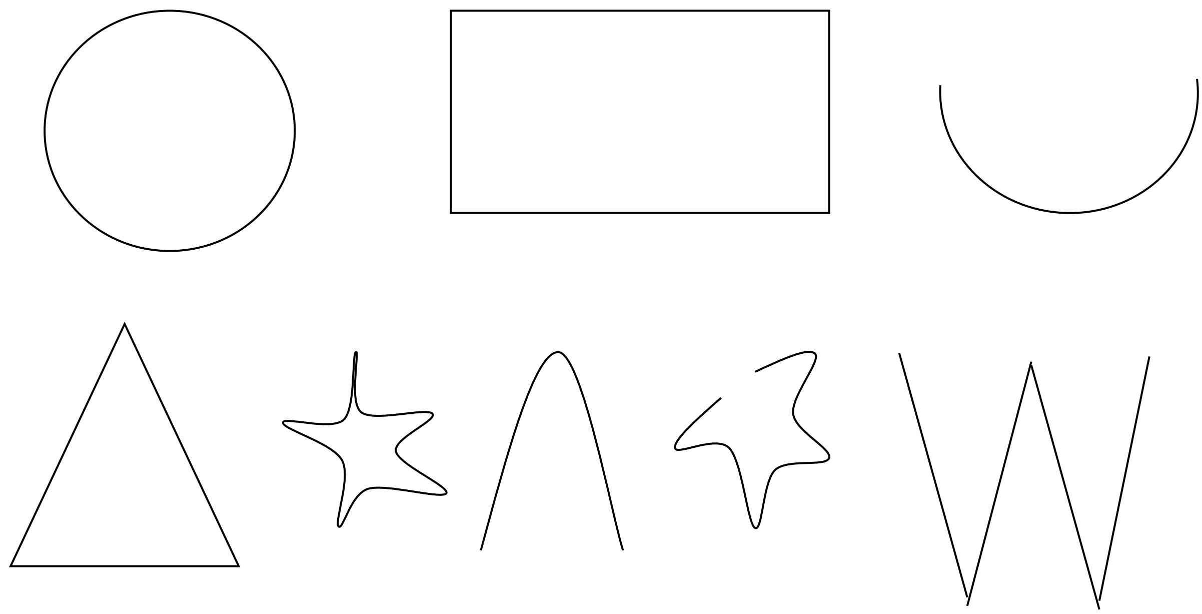
ज्यामितीय अवधारणाएँ

ज्यामितीय आकृतियाँ सीधे–सीधे हमारे दैनिक जीवन पर आधारित होती है। अपने आस–पास के वस्तुओं के अवलोकन के आधार पर ही हम उनके बारे में अपनी धारणा बनाते हैं। पारंपरिक पद्धति से कक्षा में पढ़ाए जाने पर छोटे बच्चे ज्यामिती की मूलभूत अवधारणाएँ आमतौर पर नहीं समझ पाते हैं। इसके कई

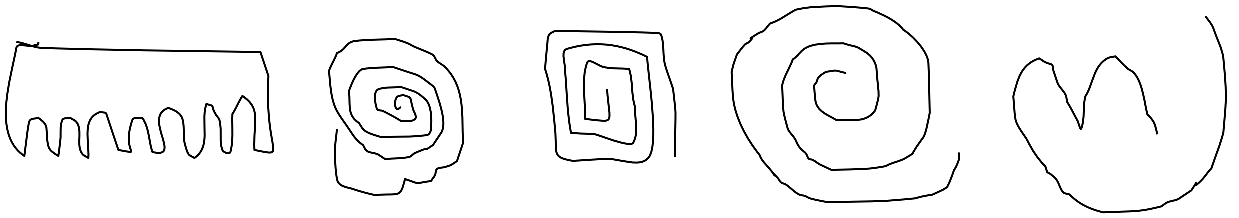
कारण हो सकते हैं, जैसे–इन अवधारणाओं के लिए जरूरी पूर्व जानकारी बच्चों के पास नहीं होती है। ऐसा भी संभव है कि कभी भी उन्हें जाने पहचाने प्रयोंगों के जरिये नई अवधारणाओं को समझने का मौका ही नहीं मिला हो। हो सकता है कि शिक्षक ये मानकर चलते हैं कि ये अवधारणाऐं बहुत ही आसान है तथा उन्हें समझाने की जरूरत ही नहीं है क्योकि बच्चे के दिमाग में इनके बारे में सहज विचार तो हैं ही। ज्यामितीय अवधारणाओं को स्पष्ट करने के लिए कई बार हमें इससे संबंधित अपने मुर्त अनुभव का प्रयोग करना आवश्यक हो जाता है। विभिन्न उदाहरणों से अमुर्तीकरण की प्रक्रिया को बच्चों के साथ करना ही हमारे लिए आवश्यक हो जाता है। ऐसा नहीं करने पर इन अवधारणाओं को समझना या समझाना शिक्षक और बच्चों दोनों के लिए कठिन हो जाता है। आईए यहाँ ज्यामिती से जुड़ी कुछ अवधारणाओं को एक एक करके समझने की कोशिश करें।

खुली व बंद, नियमित एवं अनियमित आकृतियाँ

गणित विषय के कक्षा तीन के एक शिक्षक से यह पूछने पर कि वे बच्चों को बंद व खुली आकृतियों से कैसे परिचय कराते हैं, उन्होंने बताया कि वे बच्चों की चित्र बनाने की क्षमता का यहाँ भरपूर उपयोग करते हैं। उनका कहना था कि पहले वे बच्चों से बहुत से भिन्न-भिन्न चित्र बनाने को कहते हैं। फिर उन्हीं के कुछ चयनित चित्रों को बोर्ड पर बनाकर उनका बंद व खुली, नियमित एवं अनियमित आकृतियों से परिचय करवाते है जैसे.

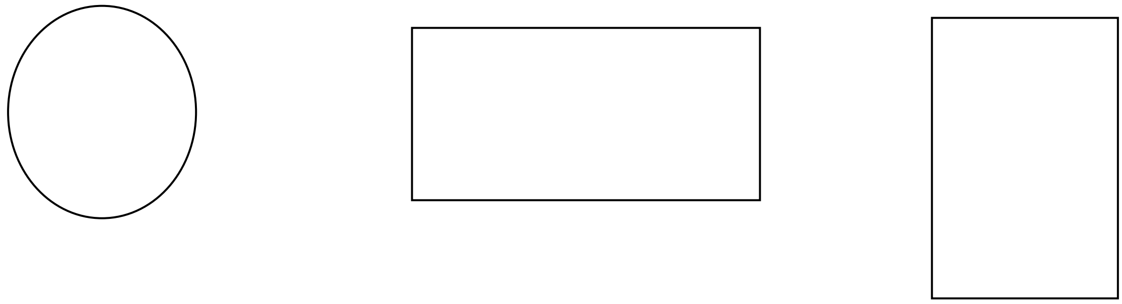


शिक्षक उनसे पूछते हैं कि कौन-सी आकृति खुली है व कौन-सी बंद साथ ही वो यह भी जानने का प्रयास करते हैं कि कौन सी आकृति नियमित है और कौन अनियमित । वे उनसे बातचीत करके यह जानने का भी प्रयास करते है कि उनका किसी आकृति को बंद व खुली एवं नियमित व अनियमित कहने का आधार क्या है। अधिकांश बच्चे यह बता पाते है कि कौन-सी आकृति बंद है व कौन सी खुली। समस्या तब आती है जब उनका सामना नीचे दिए कुछ इस तरह की आकृतियों से होता है।

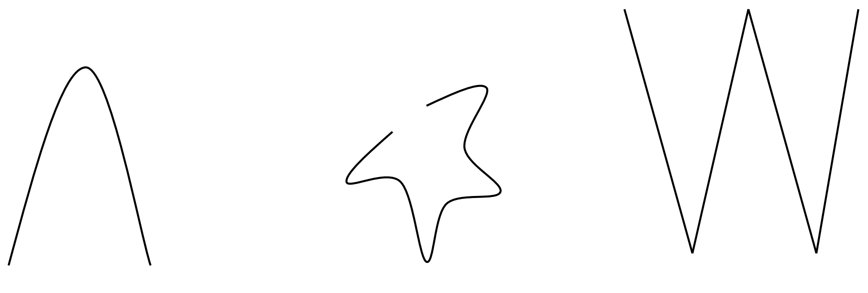


तब वे कहते हैं कि अब मैं बच्चों का परिचय बंद व खुली आकृतियों की परिभाषा से करवाता हूँ।

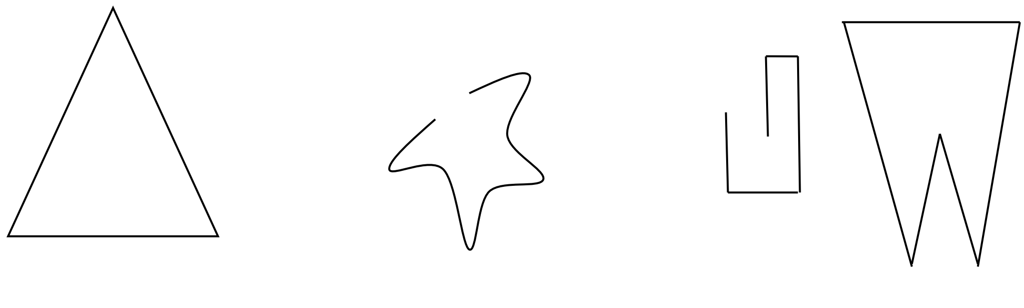
वैसी आकृतियां जिनका प्रारंभिक बिन्दु व अंतिम बिन्दु एक ही होता है बंद आकृतियां कहलाती हैं, जैसे—



ठीक इसी प्रकार वैसी आकृतियां जिनका प्रारंभिक बिन्दु व अंतिम बिंदु अलग अलग होता है खुली आकृतियां कहलाती है, जैसे—

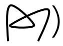


शिक्षक उनको ऐसे ही चित्र अपनी कॉपी पर बनाने के लिए कहते हैं जिससे वे स्वयं तथ्य को जाँच सकें। वे बच्चों द्वारा बनाये चित्रों में कहाँ खुली आकृति है व कहाँ बंद आकृति है यह पहचानने को कहते हैं।



प्रश्न– उपरोक्त आकृतियों में बंद व खुली आकृतियों को पहचानें

यह काफी नहीं है कि खुली व बंद आकृति को परिभाषित कर दिया जाय या फिर बच्चे की समझ का मूल्यांकन कर लिया जाए, उसे इस अवधारणा का उपयोग अलग–अलग संदर्भ में करना आना भी चाहिए इसके लिए कठिन परिस्थितियों में अभ्यास भी जरूरी है। इसके लिए बढ़िया तरीका यह हो सकता है कि दिलचस्प और चुनौतिपूर्ण आकृतियों का इस्तेमाल किया जाए।

कई बच्चे और वयस्क भी य निश्चित नहीं कर पाते हैं कि () जैसी आकृति बंद है या खुली। उनका मत होता है कि आकृति का एक हिस्सा बंद है हालांकि आकृति बंद नजर नहीं आती। यही स्थिति ( ) आकृति के साथ भी होती है।

गतिविधिः–

एक पेंसिल लीजिए। अपने नोटबुक पर एक बिन्दु अंकित कीजिए अब उस बिन्दु पर पेंसिल की नोक रखते हुए पेंसिल को आगे बढ़ाते जाईए तथा जिस बिन्दु से चलना आरंभ किए थे पुनः उसी बिन्दु पर पहुँचिए लेकिन ध्यान रहे कि रेखा आपस में कटे नहीं। सोचिए, क्या आपके द्वारा बनाई गई आकृति में बाहर से प्रथम बिन्दु तक जाने के लिए रास्ता है? यदि हाँ तो आपके द्वारा बनी आकृति खुली आकृति है अन्यथा वह बंद आकृति होगी?

बिन्दु ,रेखा, किरण, रेखाखण्ड एवं कोण

बिन्दु

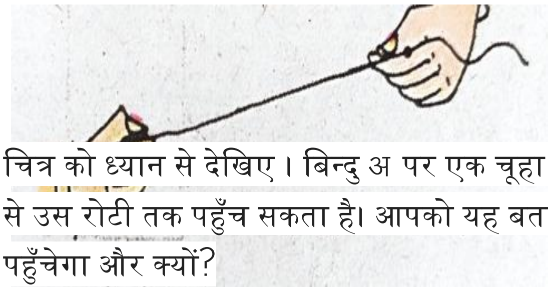
आप एक बारीक नुकीली पेंसिल लीजिए तथ उसे अपने नोटबुक पर रखिए। इससे बनने वाली आकृति बिन्दु का विचार प्रस्तुत करता है। कई बार बिन्दु को परिभाषित करते हुए हम यह कह जाते हैं कि बिन्दु एक ऐसा वृत है जिसकी त्रिज्या शून्य है या बिन्दु एक ऐसी आकृति है, जिसमें लम्बाई चौड़ाई या मोटाई न हो। क्या कोई वैसी आकृति दिखना सम्भव है जिसमें लम्बाई, चौड़ाई और मोटाई न हो ऐसा कहना सही नहीं है। हमें बिन्दु को परिभाषित करने से बचना चाहिए क्योंकि इससे बिन्दु के बारे में हमारी अवधारणा अस्पष्ट ही रह जाती है।

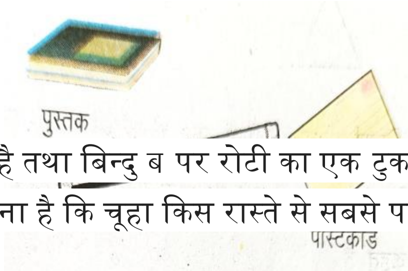
रेखाखण्ड

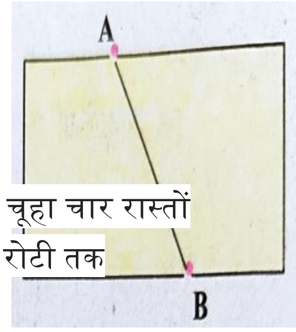
अपनी कॉपी का कागज लीजिए तथा उसे मोड़िए और फिर उसे खोल लीजिए। आपको कागज के टुकड़े पर जो निशान दिखाई देता है वह आपको रेखाखण्ड का ऐहसास कराता है। इसके दो अंत बिन्दु अ और ब हैं।

इसी प्रकार पुस्तक का किनारा, पोस्टकार्ड का किनारा, टेबल का किनारा रेखाखण्ड को निरूपित करता है।

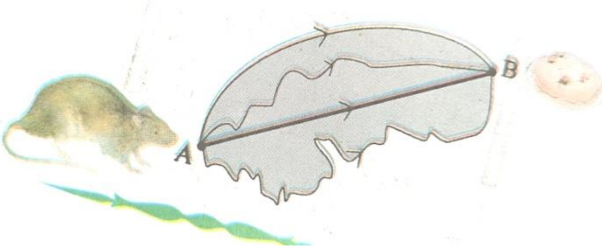
रेखा खण्ड के कुछ उदाहरण निम्न चित्रों में हैं–







चित्र को ध्यान से देखिए। बिन्दु अ पर एक चूहा है तथा बिन्दु ब पर रोटी का एक टुकड़ा। चूहा चार रास्तों से उस रोटी तक पहुँच सकता है। आपको यह बताना है कि चूहा किस रास्ते से सबसे पहले रोटी तक पहुँचेगा और क्यों?



आपने देखा कि तीसरे रास्ते से चूहा सबसे पहले रोटी तक पहुँचेगा। यह अ और ब के बीच सबसे छोटी दूरी है। हम कह सकते हैं कि दो बिन्दु अ और ब के बीच की सबसे छोटी दूरी अ—ब रेखाखंड को दर्शाती है। इसे अ—ब या ब—अ से व्यक्त किया जाता है। बिन्दु अ तथा ब इस रेखाखंड के अंत बिन्दु हैं।

किरण

कल्पना कीजिए कि ट—ठ रेखाखंड को ठ बिन्दु से आगे एक दिशा में बिना किसी अंत के आगे बढ़ाया गया है। यह एक किरण है।

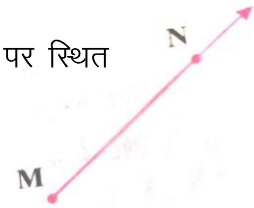
ट ठ

किरण के कुछ उदाहरण निम्न हो सकते हैं-

मोमबत्ती से निकली किरणें   टार्च से निकली प्रकाश की किरणें   सूर्य की किरणें

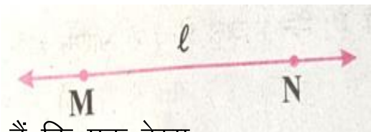
किरण एक बिन्दु से आरम्भ होती है तथा एक ही दिशा में बिना किसी अंत के बढ़ती जाती है। किरण जिस बिन्दु से आरम्भ होती है वह उसका प्रारम्भिक बिन्दु कहलाता है।

दाईं ओर किरण की आकृति दी गई है इसका प्रारंभिक बिन्दु म है। न इस किरण पर स्थित कोई और बिन्दु है। इस किरण को हम म न से व्यक्त करते हैं।



रेखा

एक ही आरंभ बिन्दु से विपरीत दिशा में बढ़े व बिना रूके बढ़े तो निम्नलिखित चित्र के अनुसार दिखेगा। ऐसा करने पर हम पाते हैं कि प्राप्त नई आकृति रेखा है। रेखा में न कोई प्रारंभिक बिन्दु है न ही कोई अंत बिन्दु। ऐसा भी समझ सकते हैं कि एक रेखा अनंत



बिन्दुओं का समुच्चय भी होता है। यहाँ हम रेखा को म न से प्रदर्शित कर रहे हैं। दोनो तरफ का तीर उसके दोनों दिशा में सीमित प्रसार को बताता है।

$\overleftrightarrow{MN}$ – MN रेखा है, जो दोनों तरफ बढ़ती है।

$\overrightarrow{MN}$ – MN किरण है जो N दिशा की ओर बढ़ती है।

$\overline{MN}$ – MN रेखाखंड है जिसका एक सिरा M और दूसरा N है

क्या आप कह सकते हैं कि किरण रेखा का ही एक भाग है?

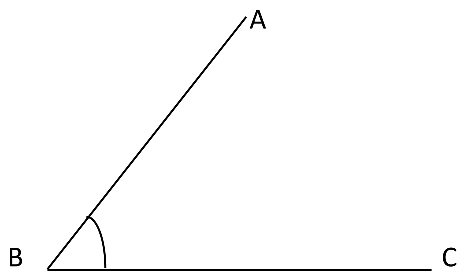
कुछ करें

सही पर (✓) का निशान लगाएँ–

एक रेखा में अंत बिन्दु होते हैं	:	एक / दो / कोई नहीं
एक रेखाखंड में अंत बिन्दु होते हैं	:	एक / दो / कोई नहीं
एक किरण में अंत बिन्दु होते हैं	:	एक / दो / कोई नहीं

कोण का प्रत्यय:–

दो कोणों का अन्यत्य बिंदु उभयनिष्ठ की कोण बनाता है या दो सरल रेखाएँ जिस बिन्दु पर मिलती है उनके बीच के झुकाव को कोण कहते हैं।



चित्र में AB तथा AC परस्पर बिन्दु B पर मिलते हैं। अतः ABC एक कोण हैं। बिन्दु B कोण का शीर्ष है और AB तथा BC कोण की भुजाएँ हैं।

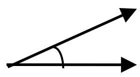
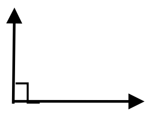
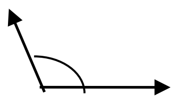
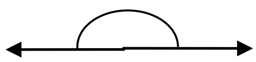
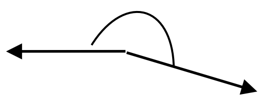
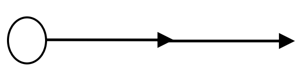
कोण को मापना:– कोण के मापने की इकाई (o) होती है। यदि उपरोक्त चित्र में हम यह मान ले कि दोनों किरणों के बीच का कोण x अंश है तो इसे x डिग्री द्वारा व्यक्त करते हैं।कोण को मापने का मापक चाँदा कहलाता है।

कोण मापने की प्रक्रिया में भी चार मूलभूत गणितीय चार मूलभूत गणितीय विचार शामिल होते हैं। वे निम्न हैं:–

1. तुलना

2. संक्रामकता
3. संरक्षण
4. इकाई की समझ

कोण के विभिन्न प्रकार–

कोण का नाम	कोण की रचना	कोण का माप
शून्य कोण		जिस कोण की माप 0 डिग्री हो
न्यून कोण		जिस कोण की माप 0 डिग्री से बड़ा तथा 90 डिग्री से छोटा हो
समकोण		जिस कोण की माप 90 डिग्री हो
अधिक कोण		जिस कोण की माप 90 डिग्री से बड़ा तथा 180 डिग्री से छोटा हो
ॠजु कोण		जिस कोण की माप 180 डिग्री हो
पुनर्यक्त कोण		जिस कोण की माप 180 डिग्री से बड़ा तथा 360 डिग्री से छोटा हो
पूर्ण कोण		जिस कोण की माप 360 डिग्री हो

प्रश्न

1. अपने आस–पास के वस्तुओं की एक सूची बनाये जिनमें निम्नलिखित कोण प्रदर्शित होते हैंः– अ. न्यून कोण–,ब. अधिक कोण–, स. समकोण–
2. बच्चों का कोण की अवधारणा की समझ का मूल्यांकन हेतु आप कौन– कौन सी गतिविधियों का उपयेाग करेंगे?

3. कोण मापने के तरीके क्या—क्या हो सकते हैं?
4. घड़ी की सुईयों की बीच बनने वाले कोणो को देखें तथ अपनी कॉपी में आकृति के साथ लिखें।

द्विविमीय आकृतियों एवं त्रिविमीय वस्तुओं की समझ

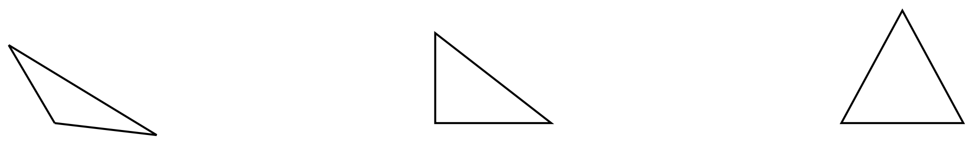
त्रिभुज

नीचे दिए गए तीन बिन्दुओं को सरल रेखा से घेरकर बंद आकृति बनाएं।

अ .   . ब

. स

बनाई गई बंद आकृति तीन सरल रेखाओं से घिरी है, ऐसी आकृति त्रिभुज कहलाती हैं। त्रिभुजो के कुछ प्रकार निम्नवत हो सकते हैं।

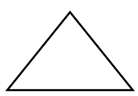


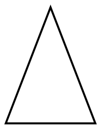
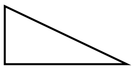
एक बार वे सम आकृतियों से परिचित हो जाएं तो बच्चों को विभिन्न प्रकार के त्रिभुज दिखाए जा सकते हैं। इसके लिए अलग-अलग लम्बाई की तिल्लियां जुटा सकते हैं। बच्चों से कहें कि वे निम्नानुसार तिल्लियों से त्रिभुज बनाएं

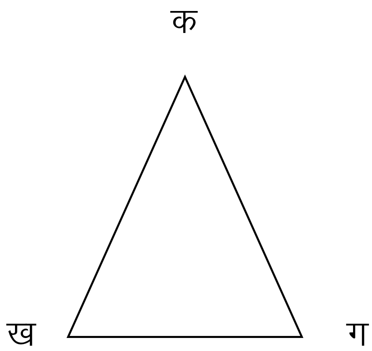
1. जिसमें सारी तिल्लियां एक लम्बाई की हों।
2. दो तील्लियां एक ही लम्बाई की हों और तीसरी तील्ली अलग लम्बाई की हो।
3. तीनों तील्लियां अलग-अलग लम्बाई की हो।

बच्चों के द्वारा स्वयं बनाए गये त्रिभुजों को साथियों द्वारा बनाये गये त्रिभुजों से मिलान कर उनमें एकरूपता ढूंढने को कह सकते हैं । आप यह सुझा सकते हैं कि वैसे तो ये सारे त्रिभुज ही हैं मगर भुजाओं की लम्बाई के आधार पर इनके बीच भेद करने के लिए इन्हें अलग-अलग नाम देना जरूरी है। इस तरह आप उनका परिचय समबाहु, समद्विबाहु और विषमबाहु त्रिभुज से करा सकते हैं।

भुजा के आधार पर त्रिभुज के तीन प्रकार होते हैं

त्रिभुज का नाम	त्रिभुज का चित्र	त्रिभुज के गुण
समबाहु		जिस त्रिभुज की तीनों भुजा बराबर हो समबाहु त्रिभुज कहलाती है।

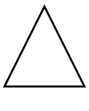
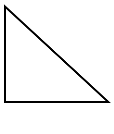
समद्विबाहु		जिस त्रिभुज की दो भुजा बराबर हो समद्विबाहु त्रिभुज कहलाती है।
विषमबाहु		जिस त्रिभुज के तीनों भुजाओं की लम्बाई अलग–अलग हो विषमबाहु त्रिभुज कहलाती है।

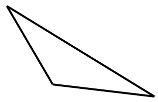


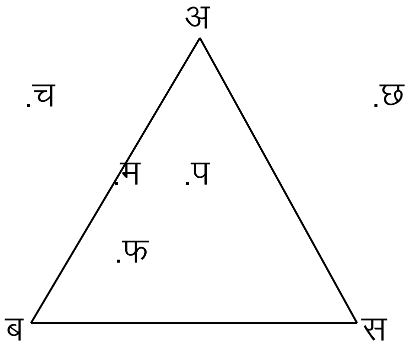
त्रिभुज में न केवल तीन भुजाएं होती है बल्कि तीन कोण तथा तीन शीर्ष भी होता है। बच्चों से किसी दिए गए त्रिभुज की भुजा, कोण एवं शीर्ष का नाम लिखने का भी अभ्यास किया जाना चाहिए। जैसा कि उपर के त्रिभुज में नामकरण किया गया है। त्रिभुज का नाम क ख ग है तथा तीन शीर्ष 'क' 'ख' एवं 'ग' है।

बच्चों में त्रिभुज की अवधारणा विकसित करने के लिए उन्हे ज्यादा अभ्यास कराना चाहिए। बच्चों को यह अवश्य समझ में आ जाए कि किसी भी लंबाई की तीन तिलियों से त्रिभुज बने यह जरूरी नहीं है इसके लिए आवश्यक यह है कि किसी भी दो तिलियों की लम्बाई का जोड़ तीसरी तिली की लम्बाई से ज्यादा होना चाहिए। जब ये शर्त पूरी होगी तभी त्रिभुज बनेगा।

कोण के आधार पर त्रिभुज के तीन प्रकार होते हैं:–

त्रिभुज का नाम	त्रिभुज का चित्र	त्रिभुज के गुण
न्युनकोण		इस त्रिभुज में तीनों कोणो की माप 0 डिग्री से बड़ी तथा 90 डिग्री से कम होती है। अर्थात तीनों कोण न्यून कोण है।
समकोण		इस त्रिभुज में एक कोण की माप 90 डिग्री होती है तथा शेष दो कोण न्यून कोण होते हैं। अर्थात एक कोण समकोण है।

अधिककोण		इस त्रिभुज में एक कोण की माप 90 डिग्री से बड़ी तथा 180 डिग्री से कम होती है अर्थात एक कोण अधिक कोण है।



त्रिभुज अ ब स में बिन्दु प तथा फ त्रिभुज के अंदर यानि अभ्यंतर भाग में हैं तथा बिन्दु च तथा छ त्रिभुज के बाहर यानि बहिर्भाग में है जबकि बिन्दु म त्रिभुज की भुजा यानि त्रिभुज पर है।

प्रश्न– तीन बिन्दुओं को एक सीध में लीजिए। उन बिन्दुओं को आपस में मिलाईए। क्या त्रिभुज बना? यदि नहीं बना तो उसका कारण क्या है? सोचिए।

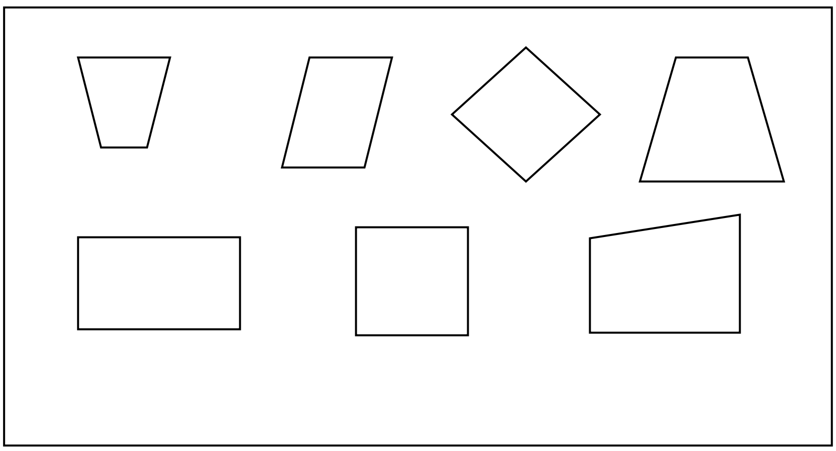
चतुर्भुज

त्रिकोण से परिचित कराने के बाद इसी तरह बच्चों का परिचय चतुर्भुज से करवाया जा सकता है। गतिविधियां इस तरह की हो जिससे बच्चों की वर्तमान समझ को विकसित करने में मदद मिले। यहां हम बच्चो के लिए एक गतिविधि सुझा रहे हैं।

गतिविधि : चार अलग-अलग लम्बाइयों की 50 तीलियां एकत्र कर लें। इन्हें 4 ढेरियों में रख दें। हर ढेरी में एक ही लम्बाई की तील्लियां हो। बच्चे आपके निर्देश के अनुसार अपनी पसन्द की चार तील्लियां उठा लें।

1. एक ढेरी में से एक ही लम्बाई की चार तीलियां।
2. एक ढेरी में से 2 तथा दूसरी ढेरी में से 2 तीलियां।
3. एक ढेरी में से 3 तथा दूसरी में से 1 तीली
4. प्रत्येक ढेरी में से 1–1 तीली।

अब उनसे कहिए कि वे अपनी तीलियों को फर्श पर सजाकर चौकोर आकृति बनाएं। उनके द्वारा बनाई गई आकृतियां कुछ इस तरह हो सकती हैं।



बच्चों को पहले इन आकृतियों को अच्छी तरह से देखने दीजिए। फिर उनसे यह पूछ सकते है कि प्रत्येक आकृति में कितने किनारे हैं कितने छोर हैं वगैरह।

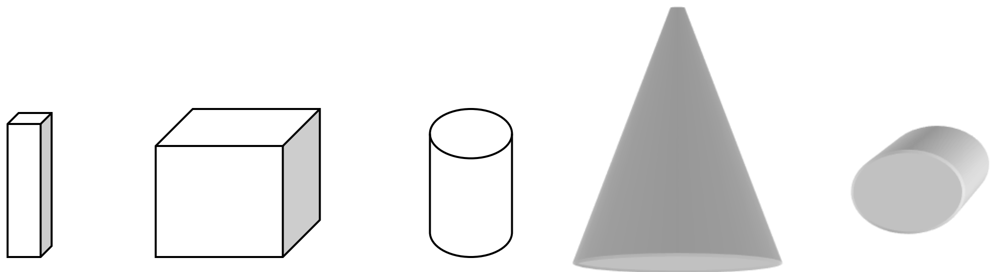
सभी आकृतियों की विशेषताओं का परिचय दीजिए ताकि बच्चे हर आकृति और उसके खास गुण को पहचान सकें जैसे कि :

1. चार किनारे वाली सभी आकृतियां चतुर्भुज हैं।
2. चतुर्भुज की चारों भुजाएं अलग-अलग लम्बाई की भी हो सकती है और समान लम्बाई की भी हो सकती हैं।
3. समलम्ब में एक जोड़ी भुजाएं समदूरस्थ होती हैं।
4. समान्तर चतुर्भुज में आमने-सामने की भुजाएं बराबर लम्बाई की होती हैं।
5. हर समान्तर चतुर्भुज समलम्ब चतुर्भुज होता है।
6. हर आयत समान्तर चतुर्भुज भी होता है।
7. हर वर्ग एक समान्तर चतुर्भुज भी होता है और आयत भी होता है।

इसी तरह हम कह सकते है कि चार भुजाओं से घिरी एक बंद आकृति चतुर्भुज है किसी चतुर्भुज में चार भुजा, चार कोण एवं चार शीर्ष होते हैं। दो आमने सामने के शीर्षों को मिलाने वाली रेखाखण्ड चतुर्भुज का विकर्ण कहलाती है। जब हम त्रिभुज के बाद चतुर्भुज से बच्चों को परिचित कराते है तो ये ध्यान रखना है कि गतिविधियों में बच्चों को किसी आकृति को दिखाकर उसका नाम बताना या किसी आकृति की नकल उतारकर उसे नाम देने से बच्चों का शब्द ज्ञान विकसित होगा।

द्विविमीय आकृतियों एवं त्रिविमीय वस्तुओं की समझ

द्विविमीय आकृतियों में लम्बाई और चौड़ाई दो माप होते है इस तरह की आकृतियों में कोण, वृत, त्रिभुज, आयात, चतुर्भुज इत्यादि आते है। जबकी ठोस वस्तुओं में लम्बाई, चौड़ाई के साथ ऊँचाई का भी माप होता है।

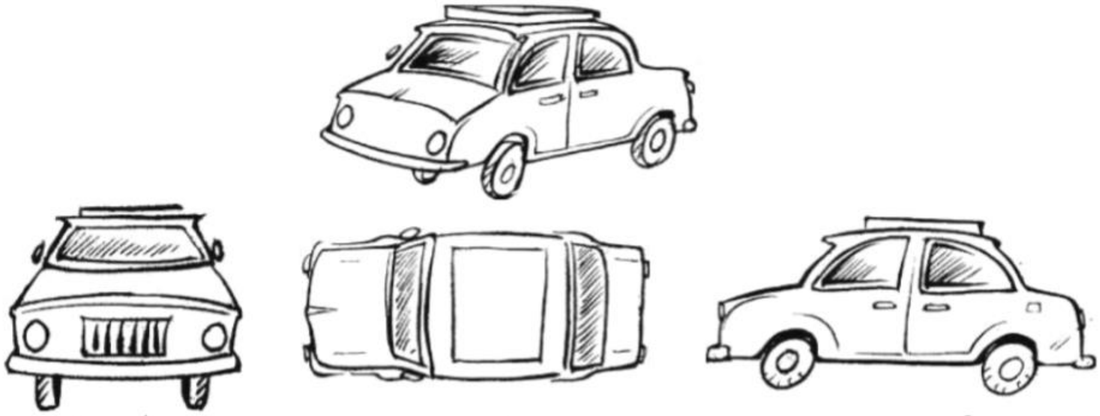


त्रिवीमिय आकृतियाँ

प्रत्येक ठोस में कई सतह होते हैं। इस सतह को किनारा कहते है। गेंद में कोई किनारा नहीं होता। लेकिन ईट में आपको कई किनारें एवं सतह मिलेंगे। अबतक के आकृतियों के आधार पर हम कह सकते हैं कि अलग-अलग तलों पर रखने पर त्रिवीमिय आकृतियाँ अलग-अलग दिखाई पड़ सकती है।

अलग–अलग तलों पर रखने पर त्रिविमीय आकृतियाँ अलग–अलग दिखाई दे सकती हैं। इसी प्रकार त्रिविमीय वस्तुएँ विभिन्न स्थानों से भिन्न–भिन्न रूप में दिखाई दे सकती हैं। इसलिए इनको विभिन्न परिप्रेक्ष्यों (दृष्टियों) से खींचा जा सकता है। उदाहरणार्थ

नीचे एक कार दिखाई गई है जिसे एक ही तल पर अलग–अलग तरफ से देखने पर निम्न तरह से दिखाई देती है–



सामने ऊपर पार्श्व

इसी प्रकार झोंपड़ी के निम्नलिखित दृश्य हो सकते हैं–

एक झोंपड़ी सामने से दृश्य पार्श्व दृश्य ऊपर से दृश्य

इसी प्रकार एक गिलास के निम्नलिखित दृश्य हो सकते हैं :

एक गिलास पार्श्व दृश्य ऊपर से दृश्य

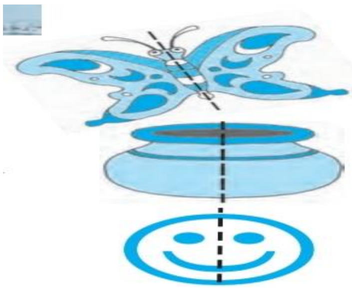
सममित आकृतियाँ

सममिति हमारे दैनिक जीवन में प्रयोग होने वाला आम शब्द है। जब हम ऐसी आकृति या आकृतियों को देखते हैं जो बराबर संतुलित अनुपात में हो तब हम कहते हैं "ये आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं।"

कल्पना कीजिए कि हम एक आकृति को आधे से इस तरह मोड़ें कि उसका आधा दायाँ भाग तथा आधा बायाँ भाग एक-दूसरे से पूर्णतया मिलता जुलता हो तब हम कहेंगे कि आकृति में सममित रेखा उपस्थित है। इस रेखा को आकृति का सममिति अक्ष कहा जाता है।

हमारे आस-पास सममिति के कई उदाहरण मौजूद होते है। चाहे फिर वह पेड़ों की पत्तियाँ हो अथवा घर की दीवार, कक्षा का बोर्ड हो अथवा कॉपी का पृष्ठ सभी में सममिति है।

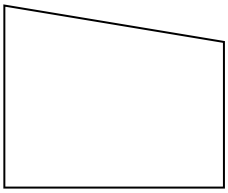
चित्र



यहाँ पर आप जो भी आकृतियाँ या आकार देख रहे हैं वे सभी आकृतियाँ सममित आकृतियाँ है इसका कारण यह है कि जब आप इन्हें बिंदुकित रेखा की तरफ से मोड़ते हैं तो आकृति का आधा भाग दूसरे आधे भाग को पूर्णतया ढक लेता है।

प्रश्न–

दी गयी आकृति सममित आकृति नहीं है बता सकते हैं क्यों?



सममित आकृति बनाना

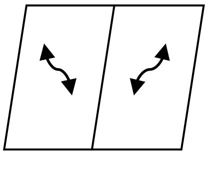
कागज का एक टुकड़ा लीजिए। इसे आधे भाग से मोड़िए। स्याही की कुछ बूंदों को आधे-भाग पर डालिए। अब दोनों भागों को दबाइए। आप क्या देखते हैं?

क्या प्राप्त आकृति सममित आकृति है यदि हाँ तो बताइए सममित रेखा कहाँ है?

क्या ऐसी कोई रेखा भी है जहाँ से मोड़ने पर दो समान भाग प्राप्त हो सकते हो ?

ऐसे ही कुछ प्रतिरूपों का प्रयास कीजिए।

तितली

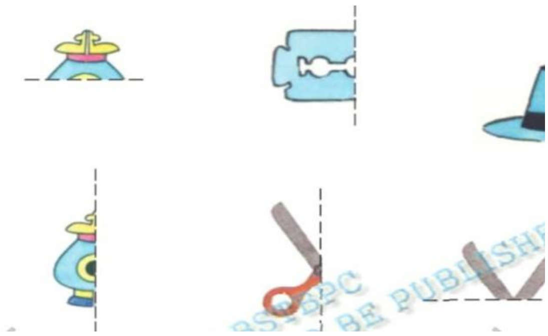


एक कागज को आधे भाग से मोड़िए। उनमें से एक आधे भाग पर कम लंबाई के धागे को स्याही में डुबोकर व्यवस्थित कीजिए। अब दूसरे आधे भाग को बंद करके दबा दीजिए। अब कागज को खोलकर धागे को धीरे-धीरे उठा लीजिए। प्राप्त आकृति का अध्ययन कीजिए। क्या यह एक सममित आकृति है?

सममित आकृतियों का अध्ययन करने में सबसे महत्वपूर्ण यह समझना है कि वह रेखा कौन-सी है जिसके सापेक्ष वह आकृति सममित है। यद्यपि बच्चे ऐसे बहुत से चित्र बनाते रहते हैं जिनमें सममिति होती ही है लेकिन उन्हें इस गुण का पता नहीं होता। हमें बस उनकी इस गुण की तरफ ध्यान आकर्षित करने व समझने में मदद करनी है। बच्चे पत्तियों, फूलों, घर के दरवाजे, रंगोली, साड़ी व चादर के डिजाइनों में सममिति देख सकते है। इस तरह से वे अपने आसपास के तमाम चीजों में सममिति खोज सकते हैं। वर्ग, आयत, वृत्त जैसी परिचित ज्यामितीय आकृतियों में सममित दिखाई जा सकती है।

बच्चे कागज पर विभिन्न प्रकार की आकृतियों को बनाकर उनको काटकर और उसे मोड़कर पता लगा सकते कि क्या कोई ऐसी लाइन है जिसपर से आकृति को मोड़ने पर एक हिस्सा दूसरे से मेल खाता है।

नीचे दिये गये चित्रों को सममित रूप से बनवाया जा सकता है।



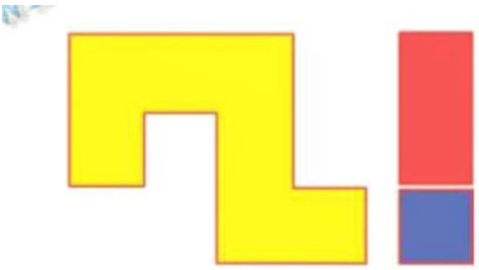
निम्नलिखित अवधारणाएँ सिखाने के लिए आप क्या गतिविधि सुझायेंगे?

(क) किसी आकृति में हर रेखा सममिति रेखा नहीं होती।

(ख) सममिति-अक्ष के दोनों ओर के संगत बिंदु अक्ष से बराबर दूरी पर होते है।

(ग) वर्ग में चार सममिति-अक्ष होते है, जबकि आयत में सिर्फ दो होते है।

खेल-खेल में पता लगाइए?



आप कितने अलग अलग तरीकों से इन तीन टुकड़ों को आपस में जोड़ सकते हैं जिससे बनी आकृति में सममित रेखा खींची जा सकें।

पैटर्न की अवधारणा

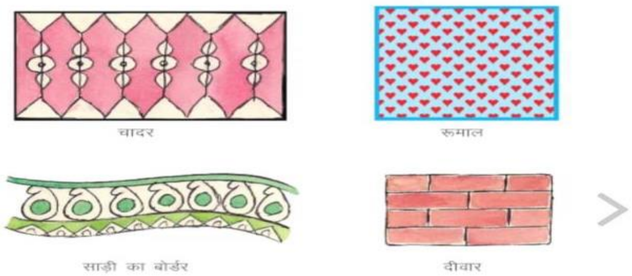
कई बार आपने आस-पास मौजूद चीजों को देखकर कहा होगा या लोगों को कहते सुना होगा कि –

- आपकी साड़ी का डिजाइन बहुत सुंदर है
- अरे वाह ! तुम्हारी मेहंदी बहुत अच्छी लग रही है

- देखो तो कितनी सुंदर रंगोली है

पैटर्न चारों ओरः

हम प्रतिदिन कई तरह के पैटर्न देखते हैं। उदाहरण के लिए

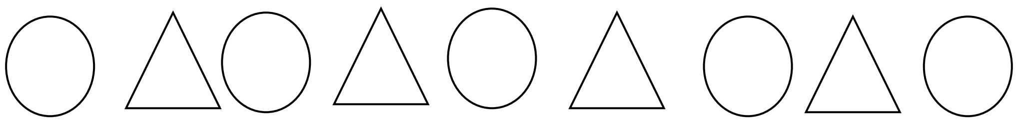


क्या इन चित्रों में बनी डिजाइनों में कोई विशेषता नजर आ रही है

हाँ इन चित्रों में बनी डिजाइनों को एक निश्चित क्रम में रखा गया हैं। इसी प्रकार के व्यवस्थित क्रम में सजे "डिजाइन हमें अक्सर देखने को मिलते है।

इन डिजाइनों की सुंदरता एवं आकर्षकता के पीछे दो कारण हो सकते है

1. सममिति 2. क्रम



इसमें आकृति के दुहराव का निश्चित क्रम है। इसमें सममिति एवं क्रम भी है।

पैटर्न की पहचान गणित के लिए अहम है। पुनरावृत्ति करने वाले साधारण आकार वाले पैटर्न से शुरू करके जटिल पैटर्न की ओर बच्चे को बढ़ाया जा सकता है जिसमें आकार तथा संख्याएँ दोनों शामिल होंगे।

पैटर्न की परिभाषा

पैटर्न में एक श्रृंखला या अनुक्रम शामिल होता है जो आमतौर पर खुद को दोहराता है। हम अपने दैनिक जीवन में जो पैटर्न देखते हैं वे रंग क्रिया, आकार, संख्या आदि के होते हैं। वे किसी भी घटना या वस्तु से संबंधित हो सकते हैं, परिमित या अनंत हो सकते है। गणित में पैटर्न एक क्रम में व्यवस्थित संख्याओं का एक समूह है जिसमें संख्याएँ एक विशिष्ट नियम में एक दूसरे से संबंधित होती हैं। ये नियम समस्याओं की गणना या समाधान करने के तरीके को परिभाषित करते हैं।

उदाहरण के लिए 3, 6, 9, 12, ... के अनुक्रम में प्रत्येक संख्या 3 से बढ़ रही है। इसलिए पैटर्न के अनुसार अंतिम संख्या 12 + 3 =15 होगी।

पैटर्न के साथ काम करते समय याद रखने योग्य कुछ प्रमुख बिंदु निम्न है –

- संख्या पैटर्न कुछ प्रकारों तक ही सीमित नहीं है। वे आरोही, अवरोही, एक निश्चित संख्या के गुणक या सम संख्याओं की श्रृंखला, विषम संख्याएँ आदि हो सकते है।
- लर्निंग पैटर्न, पैटर्न को देखने की हमारी क्षमता को बढ़ाता है। एक पैटर्न का अवलोकन हमें उस नियम को सोचने और पहचानने के लिए प्रेरित करता हैं और पैटर्न को जारी रख सकता है।
- पैटर्न आकृतियों, वस्तुओं और रंगों के भी हो सकते है न कि केवल संख्याओं के।

गणित में एक पैटर्न वस्तुओं, आकृतियों या संख्याओं को दोहराने का एक क्रम है। हम पैटर्न को किसी प्रकार की घटना या वस्तु से संबंधित कर सकते हैं। प्रत्येक पैटर्न में एक नियम होता है जो हमें बताता है कि कौन सी वस्तुएँ पैटर्न से संबंधित है और कौन सी वस्तुएँ पैटर्न से संबंधित नहीं है।

पैटर्न के लिए दो बातें आवश्यक है..

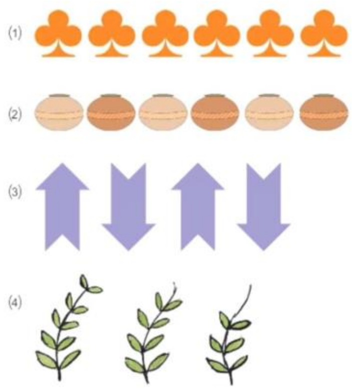
1. संबंध स्थापित करना
2. लगातार दुहराना

कुछ पैटर्न के उदाहरण

अक्षर आधारित पैटर्न अ ब अ ब अ ब अ...................................

अबस अबस अबस अ_स_ब_

चित्र आधारित पैटर्न



गुणा में पैटर्न

IX I = 1

11 x 11 = 121

111 x 111 = 12321

1111 X1111 = 1234321

ऊपर का पैटर्न देखकर नीचे के खाली स्थान को पूरा करें –.

11111 x 11111 =

111111 X 111111 =

आप कुछ ऐसे ही पैटर्न बनाइए तथा उसमें निहित तर्क को स्पष्ट कीजिए।

पैटर्न का महत्व

गणित में संख्याओं, आकृतियों, रंगों आदि की दोहराव वाली व्यवस्था है किसी विशेष नियम के लिए संख्याओं के समुच्चय को आपस में जोड़ा जाता है तो उस नियम की प्रतिमान कहा जाता है। पैटर्न में अंतर्निहित संबंध या नियम को पहचानना सबसे महत्वपूर्ण होता है। इससे हमारी तर्क क्षमता का विकास होता है। नए–नए पैटर्न को बनाने की गतिविधि से बच्चों में सृजनात्मकता का विकास होता है। दैनिक जीवन में पैटर्न खोजने की क्षमता गणितीयकरण में सहायक सिद्ध होती है।

निष्कर्ष

बच्चों में ज्यमितिय आकृतियों की अवधारणा विकसित करने के लिए जाने पहचाने अनुभवों का प्रयोग करना बेहतर होता है। बंद व खुली आकृतियों व अन्य कोई नई अवधारणाएं सिखाने के लिए अलग.अलग तरीकों का उपयोग किया जा सकता है।

कई बार बच्चे समतल और असमतल सतहों को चिकनी व खुरदुरी सतह के समकक्ष मान लेते हैं। गेंद, अंडा व बेलनाकार बर्तन की सतह को भी वह समतल समझते हैं। इसके लिए उन्हें कुछ चिकनी व खुदरी सतह महसूस करने को दे सकते है। दैनिक जीवन में बहुत सारी सममित आकृतियाँ बच्चों को देखने को मिलती हैं, जिससे वे अनभिज्ञ रहते हैं। सममित वस्तुओं को दिखाकर उनकी पहचान करायी जा सकती हैं। बच्चों को हम उनके आस–पास के वस्तुओं में पैटर्न ढूंढने को कह सकते हैं।

- सीधी एवं घुमावदार रेखाओं के प्रयोग से बनी आकृतियाँ रैखिक आकृतियाँ कहलाती है।
- एक बिन्दु से होकर असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती है।
- एक रेखाखंड दो भिन्न बिन्दुओं को मिलाता है यानी एक रेखा खंड में दो अंत बिन्दु होते हैं।
- जब दो रेखाओं को एक तीसरी रेखा दो अलग-अलग बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है तो वह तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है।
- जब दो रेखाएँ एक-दूसरे पर लम्ब हो यानी उनके बीच का कोण 90 डिग्री हो तो वे लम्वबत रेखाएँ कहलाएंगी।
- तीन सरल रेखाओं से घिरी बंद आकृति त्रिभुज कहलाती है। त्रिभुज में तीन कोण, तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ होती हैं।
- पैटर्न किसी गणितीय संबंध या तर्क आधारित संबंध को दोहराने की क्रिया है। पैटर्न के लिए दो बातें आवश्यक है : संबंध स्थापित करना तथा लगातार दोहराना।

ई–संसाधन

https://ncert.nic.in

https://scert.ca.aov.in

e-LOTS

स्वमूल्यांकन

1. ठोस और समतल आकृति आपस में कैसे भिन्न है उदाहरण के साथ प्रदर्शित करें।
2. बिन्दु को परिभाषित करना क्यों मुश्किल है अपने उत्तर को सही साबित करें।
3. आप अपनी कक्षा में बच्चों के बीच बिन्दु, रेखा, किरण की अवधारण कैसे रखेंगे?
4. कोण कितने प्रकार के होते हैं सभी प्रकारों का वर्णन करते हुए प्रकृति से जुड़ी हुई एक-एक उदाहरण दें।
5. कोई त्रिविमीय वस्तु अलग-अलग तलों पर रखकर देखने पर अलग-अलग क्यों दिखाई देती है?
6. पैटर्न से आपका क्या अभिप्राय है? बच्चें के गणितीयकरण के लिए पैटर्न को आप कितना महत्वपूर्ण समझते है?
7. हमलोग अपने आस-पास की वस्तुओं में दिखाई पड़ने वाले ज्यमितिय आकृतियों के संदर्भ में अपने साथियों से बातचीत कर सूची तैयार करें तथा उनमे सममिति तथा पैटर्न ढूंढने का प्रयास करें ।
8. अपने घर में विद्यालय तक जाने का जो नक्शा आपने तैयार किया है उसमें आप और आपके बच्चों ने किन- किन प्रतीकों एवं चिन्हों का प्रयोग किया है उस पर चर्चा कीजिए तथा उसकी सूची तैयार करें।
9. ज्यामितीय आकृतियों/अवधारणाओं को समझने के लिए विभिन्न खेल तथा गतिविधियों का निर्माण करें।

संदर्भ सूची

1. गणित शिक्षक का अधिगम, 16 नवम्बर, नई दिल्ली
2. गणित शिक्षक के विभिन्न पक्ष/आयाम 16 नवम्बर, नई दिल्ली
3. गणित की गतिविधियाँ, एकलव्य प्रकाशन
4. NCF-2005
5. BCF - 2008
6. बिहार राज्य की गणित की पाठ्यपुस्तकें 1 से 8 कक्षा तक
7. Mathematics (Class 1-5) NCERT, New Delhi

8- Carrythers, Elizabeth, children Mathematics SAGE Publication, New Delhi

9- LMT-01 IGNOU, Learning Mathematics, New Delhi

इकाई–4
भिन्न एवं दशमलव संख्याएं

परिचय

प्राचीन काल सें कई देशों में भिन्नों को लिखने के अलग–अलग तरीके थे। भारत में भी अति प्राचीन काल से भिन्न का ज्ञान था। ऋग्वेद मे (1/2) को अर्द्ध और (3/4) को त्रिपाद कहते थे। भिन्न लिखने का आधुनिक ढंग भारत की देन है।

वैसे तो भिन्न संख्याओं से बच्चों का सामना रोजाना होना है, परन्तु आमतौर पर इसके वास्तविक अर्थ को लेकर उनके विचार काफी उलझे हुए होते हैं। बच्चे भी अपने दैनिक जीवन में कई बार भिन्न संख्याओं का प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, जब ऐसी चर्चा होती है, 'आधी रोटी खाऊँगॉ' अथवा दुकान पर आधा किलो चीनी देना तो ये भिन्न संख्याओं का प्रयोग है। दैनिक जीवन में होने वाले उपयोग जरूरी नहीं कि उपयुक्त तरीकों से मापकर बिल्कुल सही मात्रा में ही प्राप्त हो, लेकिन उस हिस्से की एक धारणा मन में व्याप्त हो जाती है।

अंको को दस चित्रों के माध्यम से व्यक्त करने की प्रथा का प्रादुर्भाव सर्वप्रथम भारत में हुआ था। लगभग पाँचवी शताब्दी में भारत में आर्यभटट द्वारा अंक संज्ञाओ का अविष्कार हुआ था। इस प्रकार एक (इकाई) दस (दहाई) शत (सैकड़ा) सहस्त्र (हजार) इत्यादि संख्याओं को मापने के उपयोग में लाया जाने लागा। गणित विषयक विभिन्न हल करने के लिए भारतीय विद्वानों ने वर्गमूल, घनमूल और अज्ञात संख्याओं को मालूम करने के ढंग निकाले। संख्याओं के छोटे भागों को व्यक्त करने के लिए दशमलव प्रणाली प्रयोग में आई।

भिन्नात्मक संख्याओ का ही एक हिस्सा दशमलव भिन्नात्मक संज्ञाएँ है जिनका उपयोग गणना में बहुत मदद करता है। गणीतीय संख्याओं को लिखने का एक प्रतीक है। प्रायः यह दाशमिक संख्या पद्धति में प्रयुक्त होता है और संख्या के पूर्णांक भाग एवं अपूर्णांक भागों के बीच में लगाया जाता है। किन्तु अन्य पद्धतियों में भी यह अलग अर्थ में प्रयुक्त हो सकता है। एतिहासिक रूप से दशमलव के लिए कई चिन्ह प्रयुक्त किये जा रहे हैं, जैसे – भारत मे डेढ़ को 1.5 सवा दो को 2.25 और ढाई को 2.5 आदि लिखने की प्रथा रही है।

उददेश्य

गणित शिक्षण विषय–वस्तु की निम्नलिखित उददेश्य हैः–

- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के शिक्षण विधियों को जान सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के शिक्षण विधियों की कार्य कुशलता में सुधार कर सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के भिन्न सम्बन्धी विषय–वस्तु की व्यवहारिक परख को समझ सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के भिन्न सम्बन्धी विषय–वस्तु का दैनिक जीवन में उपयोग कर सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के भिन्न सम्बन्धी विषय–वस्तु की परिकल्पना की समझ को विकसित कर सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के भिन्न सम्बन्धी आँकड़ों का विश्लेषण कर सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के भिन्न से सम्बन्धित आँकड़ों का सतत् मूल्यांकन कर सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के दशमलव संख्या सम्बन्धी विषय–वस्तु की व्यावहारिक परख को समझ सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के दशमलव संख्या सम्बन्धी विषय–वस्तु का दैनिक जीवन में उपयोग कर सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु को गणित विषय के दशमलव संख्या सम्बन्धी विषय–वस्तु पर आधारित गतिविधियों का निर्माण व प्रयोग कर सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के दशमलव संख्या सम्बन्धी विषय–वस्तु की परिकल्पना की समझ को विकसित कर सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के दशमलव संख्या से सम्बन्धित आँकड़ो का विश्लेषण कर सकेंगे।
- डी.एल.एड. प्रशिक्षु गणित विषय के दशमलव संख्या से सम्बन्धित ऑकड़ों का सतत् मूल्यांकन कर सकेंगे।

इकाई के विषय

भिन्नात्मक संख्याएं – एक भिन्न संख्या और एक परिमेय के बीच बहुत बड़ा अन्तर है। 'भिन्न संख्या' और 'परिमेय संख्या' की अवधारणा निकट से सम्बन्धित है लेकिन विभिन्न पहलुओ में भिन्न है। यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि 'एक भिन्नात्मक संख्या हमेशा एक परिमेय संख्या होती है लेकिन एक परिमेय संख्या भिन्नात्मक संख्या हो सकती है या नहीं हो सकती है।'

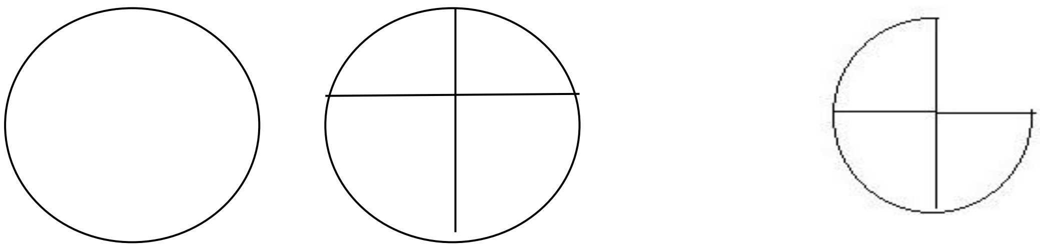
अक्सर भिन्नात्मक संख्याओं को टुकड़ों अथवा हिस्सों के रूप में ही देखा जाता है। यह माना जाता है कि भिन्न सिखाने में सबसे महत्त्वपूर्ण है इसका प्रतीकीकरण चित्रों में करना। अतः बच्चों की अध्ययन सामग्री और वर्कशीट आदि का भी बहुत बड़ा हिस्सा भिन्नात्मक संख्याओं के चित्रों में प्रस्तुतिकरण पर जाता हैं। इसको चित्रों में प्रस्तुत करने के लिए कई तरह के अभ्यास देखे जाते हैं। ये अभ्यास भिन्नात्मक संख्या द्वारा प्रदर्शित मात्रा का अहसास करने में मददगार होती है। इससे यह समझ में आता है कि 1/4, 1/3, 1/2, 1/5, 1/7, 2/13......... इत्यादि में बड़ी संख्या कौन–सी है। किन्तु यह इन

संख्याओं के साथ काम करने का अन्तिम पड़ाव नही है। ज्यादातर भिन्न संख्याओं को आसानी से चित्र रूप में प्रदर्शन नहीं हो सकता है।

भिन्न

भिन्न शब्द अँग्रेजी भाषा के 'फ्रैक्शन' शब्द का हिन्दी रूपान्तरण है। 'फ्रैक्शन' शब्द लैटिन भाषा के शब्द 'फ्रैक्टस' से बना है जिसका अर्थ टूटा–फूटा होता है। सामान्यतः भिन्नात्मक संख्याओं में ऐसी संख्याएँ शामिल होती है, जिन्हें व्यक्त करने के लिए पूर्ण के आपस में बराबर हिस्सों की जरूरत होती है। भिन्नात्मक संख्या को दो पूर्ण संख्याओं के अनुपात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी सम्पूर्ण वस्तु या संख्या का कोई भाग निरूपित करती है, जैसे – एक सेब के चार भाग किये जाते है जिनमें से उनके एक हिस्से को निकाल दिया जाता है तो उसे 1/4 के रूप में प्रदर्शित किया जाता है जबकि शेष बचे हुए भाग को 3/4 के रूप में निरूपित किया जाता है



सेब चार बराबर भाग तीन भाग

उपरोक्त चित्र में सेब को चार बराबर भागों में विभाजित किया गया है। सम्पूर्ण सेब एवं 1 कटे भाग सेब का अनुपात 1/4, तथा सम्पूर्ण सेब एवं शेष 3 कटे भाग सेब का अनुपात 3/4 अर्थात, सम्पूर्ण वस्तु का कोई भाग निरूपित करना भिन्न कहलाता है।

भिन्न के उदाहरण – 4/9, 5/7, 3/8, 1/4 ... आदि सभी भिन्न के उदाहरण हैं।

भिन्न के भाग

एक भिन्न के दो भाग होते हैं:–

1. अंश
2. हर

1. **भिन्न का अंश –** अंश भिन्न का वह भाग होता है जो ऊपर लिखा जाता है, जैसे – 4/9 में 4 अंश है क्योंकि यह ऊपर लिखा जा रहा है।
2. **भिन्न का हर –** हर भिन्न का वह भाग होता है जो अंश के नीचे लिखा जाता है, जैसे – 7/8, में 8 हर है क्योंकि यह अंश के नीचे लिखा जा रहा है।

भिन्नों के प्रकार

भिन्नों को मुख्यतः निम्नलिखित दो प्रकार में बाँटा गया है:–

1. साधारण भिन्न
2. दशमलव भिन्न

1. **साधारण भिन्न** – ऐसे भिन्न जिसमें अंश को हर से भाग देने पर वह पूर्ण विभाजित नहीं होती है तो इस प्रकार के भिन्न को हम साधारण भिन्न कहते हैं, जैसे – 5 को 6 से भाग दिया जाता है तो यह पूर्ण विभाजित नहीं होती है।
   जैसे – 5/6 एक साधारण भिन्न है।

साधारण भिन्न के प्रकार

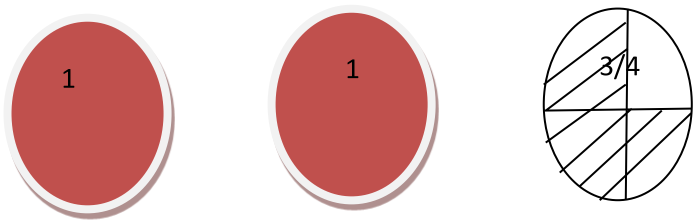
i. संक्षिप्त भिन्न (Lowest Terms Fraction)
ii. उचित भिन्न (Proper Fraction)
iii. अनुचित भिन्न (Improper Fraction)
iv. मिश्र भिन्न (Mixed Fraction)
v. मिश्रित भिन्न (Complex Fraction)
vi. व्युत्क्रम भिन्न (Reciprocal Fraction)
vii. वितत भिन्न (Continued Fraction)

i. **संक्षिप्त भिन्न** – जिस भिन्न के अंश तथा हर संख्या 01 के अतिरिक्त किसी दूसरी संख्या से विभाजित न हो, संक्षिप्त भिन्न कहलाता है, जैसे – 3/4, 5/11, 5/13, 11/13, 2/7 इत्यादि।

ii. **उचित भिन्न** – यह भिन्न जिस भिन्न में उसका अंश उस भिन्न के हर की अपेक्षा कम हो, तो ऐसे भिन्न को उचित भिन्न कहते हैं, जैसे – 2/3, 3/4, 4/7, 1/2, 3/4 इत्यादि।

iii. **अनुचित भिन्न** – वह भिन्न जिस भिन्न में उसका अंश उस भिन्न के हर की अपेक्षा ज्यादा हो तो ऐसी भिन्न को अनुचित भिन्न कहते हैं, जैसे – 3/2, 5/2, 7/3, 8/3 इत्यादि।

iv. **मिश्र भिन्न** – ऐसे भिन्न जो एक पूर्णांक एवं भिन्न से मिलकर बनी हो, तो ऐसे भिन्न को मिश्र भिन्न कहते हैं, जैसे – 2–1/3, 6–3/4 इत्यादि।



v. **मिश्रित भिन्न** – यदि किसी भिन्न के अंश तथा हर दोनों भिन्न के रूप में हो तो उसे मिश्रित भिन्न कहा जाता है। जैसे :– $\frac{2/3}{5/7}$ $\frac{11/13}{15/19}$ $\frac{2/7}{5/6}$ इत्यादि।

vi. **व्युत्क्रम भिन्न** – यदि किसी भिन्न के अंश तथा हर का आपस में बदलने पर प्राप्त भिन्न व्युत्क्रम कहलाता है, जैसे – 7/12 का व्युत्क्रम भिन्न 12/7

vii. **वितत् या सतत् भिन्न** – वितत् भिन्न की कोई निश्चित परिभाषा नहीं दी जा सकती है क्योंकि इनके अंश और हर में कोई नियमन नही होता है। इन भिन्नों के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैंः–

3+4

1+5

2+1 इत्यादि

2. दशमलव भिन्न

दशमलव भिन्न वह भिन्न होता है जिसमें हर 10 अथवा 10 की कोई घात हो तो ऐसी भिन्न को दशमलव भिन्न कहते हैं, जैसे–

2–3/4 का मतलब क्या है?

क्या 2–3/4 2+3/4 = 2+0.75 समतुल्य है?

हम जानते हैं कि दशमलव भिन्न संख्याओं में किये गये भाग 10 के गुणांक है यानि 10,100,1000 अर्थात 10,10^2,10^3, है। हर बार हिस्से को 10 गुणा और भाग किये चार्ट पर रख कर देखा जाता है कि वह कितना है। इस स्थानीय मान की समझ के लिए कुछ उदाहरण इस प्रकार हैंः–

संख्या 222 को इस तरह से लिख सकते है

= (2*100), (2*10) +(2*1)

= 200+20+2

हम यह जानते है कि बायीं ओर से दाईं तरफ जाते हैं तो मान 10 गुना बढ़ता जाता है, जैसे – 1,10,100,1000 लेकिन जब हम दायीं से बायीं आते हैं तो यह 10 गुना कम होता जाता है, अर्थात, यदि हजार से शुरू करें तो 1000, 100,10, इसे हम ऐसे भी लिख सकते हैंः– 1000, 1000/10 (यानी 100) 100/10 (यानी 10) और 10/10 (यानी 1) और फिर 1/10 1/100, 1/1000 ....इत्यादि ।

उदाहरण के लिए 25.25 को हम ऐसे भी लिख सकते हैंः– (2*10)+5*1+2*1/10+5*1/100

दशमलव भिन्न के प्रकार

Fraction - दशमलव भिन्न दो प्रकार की होते हैंः–

1. साधारण आवृत दशमलव भिन्न
2. मिश्रित आवृत दशमलव भिन्न

1. साधारण आवृत दशमलव भिन्न

ये भिन्न जिनमें दशमलव बिन्दु के बाद आने वाले सभी अंको की पुनरावृत्ति होती है तो ऐसे भिन्न को साधारण आवृत दशमलव भिन्न कहते हैं, जैसे – 10/3 – 3.3333,,,,,,

2. मिश्रित आवृत दशमलव भिन्न

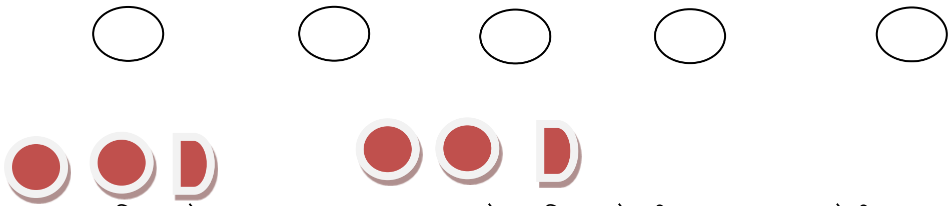
वे भिन्न जिनमें दशमलव बिन्दु के 1 या 2 अंकों के बाद अंकों की पुनरावृत्ति होती है, तो ऐसे भिन्न को मिश्रित आवृत दशमलव भिन्न कहते हैं, जैसे – 17/6 – 2.833333333........

भिन्न के विभिन्न अर्थ

1. **भिन्न व भाग** – भाग का उपयोग हम बाँटने में हिस्से के निर्धारण के लिए करते हैं। भाग के सवाल को भी हम भिन्न के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जैसे – 25 लडडू को 5 बराबर भागों में बाँटना है। इसका मतलब प्रत्येक को 25 भागा 5 लडडू मिलेगा। भिन्न में बटा का चित्र भाग

को दर्शाता है। हम 25 भागा 5 को 25/5 भी लिख सकते हैं। हम कह सकते हैं कि प्रत्येक को 25/5 लडडू प्राप्त हुआ।

इसी तरह 5 रोटी को दो लोगों में बाँटे तो प्रत्येक को 5/2 रोटी प्राप्त होगी। इसका अर्थ यह हुआ कि भिन्नात्मक संख्या का एक अर्थ भाग को प्रदर्शित करने में है।



एक व्यक्ति को तथा दूसरे व्यक्ति को भी रोटी प्राप्त होगी।

2. **गुणक के रूप में भिन्न** – किसी समूह के हिस्से को लेकर उस पर गणना करनी हो तो भी भिन्न का उपयोग करेंगे, जैसे–आधा दर्जन केले अथवा 3/4 सेब का दाम अगर 1 किलो सेब का दाम 80 रू है तो 3/4 सेव की कीमत क्या होगीध
3. **पूर्ण का हिस्सा** – यह भिन्न की सामान्य स्थिति है जब हम किसी मात्रा को पूर्ण से जोड़कर देखते है। ये पूर्ण एक वस्तु भी हो सकती है और एक समूह भी जैसे– 5/6 भिन्न का मतलब हो सकता है कि किसी एक वस्तु को 6 भागों में बाँट दिया हो तथा उसमें से 5 भाग ले लिए गये हों या 6 सेबों के समूह में से 5 सेब किसी ने ले लिये हों। यह दोनों एक के 6 में से 5 भाग अर्थात 5/6 को दर्शाता है।
4. **अनुपात**–भिन्नात्मक संख्याओ को अनुपात के रूप में भी देखा जाता है, जैसे – बालू और सीमेन्ट का मिश्रण का अनुपात 3:5 है। इसे हम 3/5 के रूप में भी लिख सकते हैं। इसी तरह कभी–कभी हम किसी पूर्ण के हिस्से की तुलना भी अनुपात से कर सकते हैं, जैसे – प्रतिशत यह 100 हिस्सों में से कितने हिस्से हैं यह भी कह सकते हैं।
5. **मापक**–यह आधा या तिहाई या चौथाई को मापने की तरह ही है, जैसे–आधा मीटर या आधा किलो या 1/4 सेंटीमीटर या 1/3 घण्टे इत्यादि।

भिन्न का जोड़ कैसे होता है? नियम

भिन्नों का जोड़ करने से पहले आपको कम–से–कम दो संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य निकालना आना चाहिए।

भिन्न का जोड़ कैसे बनता है?

- अगर दी गयी भिन्नों के हर समान हैं तो हम समान हर रखकर दोनों अंशों को जोड़ देंगे एवं भिन्न को सरल कर लेते हैं।
- अगर दोनों भिन्नों के हर अलग–अलग है तो भिन्नों का योग करने के लिए हमें सबसे पहले दोनों या तीनों भिन्नों के हर को समान करना पड़ता है।
- भिन्नों के हर को समान करने के लिए इन भिन्नों के हर का हम लघुतम समापवर्त्य निकालेंगे। यही हमारी हल की गयी भिन्न का हर होता है।
- हर को समान करने के बाद हम सरल किये गये हर को नीचे लिखकर दोनों भिन्नों के अंशों को जोड़कर ऊपर लिख देते हैं।
- अब जो भिन्न बनी है उसे हम सरल कर लेते हैं। इस तरह हम भिन्न का योग करते हैं।

भिन्न के जोड़ के उदाहरण

उपरोक्त बिन्दुओं के आधार पर भिन्न की प्रक्रिया को उदाहरण के साथ समझते हैं।

- पहले हम समान हर वाली भिन्नो का जोड़ करना सीखेंगे।

  1/5+ 2/5

- किसी भी भिन्न को हल करने से पहले हमें यह पता लगाना होगा कि इनका हर समान है या नहीं। हम ऊपर देख सकते हैं की इन दोनों भिन्नों का हर समान है।
- हमने देखा कि दोनों भिन्नों का समान हर है तो हम हर को वैसा ही रखकर अंशों को जोड़ देते हैं।

  1+2 = 3

- तो अब हम इन भिन्नों को निम्न प्रकार से जोड़ते हैं:–

  1/5+2/5 = 3/5

जैसा कि आपने देखा उत्तर में सिर्फ अंशो को जोड़ा गया है लेकिन अंश वैसे–का–वैसा ही है।

अब हम विभिन्न हरों वाली भिन्नों को जोड़ना सीखते हैं।

3/5+ 7/8

- जैसा कि हम देख सकते हैं यहाँ दोनों भिन्नों के हर असमान हैं, तो सबसे पहले हमें इनके हरों को समान करना पड़ता है।
- इनके हरों को समान करने के लिए हमें इनका लघुतम समापवर्त्य निकालना होता है।

  5,8 का लघुतम समापवर्त्य = 40 है

  40 दोनों भिन्नों का हर होगा

  = 3/5+ 7/8 = ?/40+ ?/40 = /40

- अब हम नए हर को पहली भिन्न के हर से विभाजन करेंगे एवं जो संख्या आएगी उसे पहली भिन्न के अंश से गुणा करते हैं। ऐसा ही हम दूसरी भिन्न के साथ करते हैं।

  40/5 = 8 , 8x8 = 24

- पहली भिन्न का अंश 24 होगा। इसी तरह हम दूसरी भिन्न का अंश निकालेंगे

  40/8 = 5, 5x7 = 35

- दूसरी भिन्न का अंश 35 होगा।
- अब हमें दो समान हर वाली भिन्न मिल गयी है तो हम हर को समान रखते हुए दोनों अंशों को जोड़ देंगे। इस प्रकार भिन्न का योग = 24+35/40 = 59/40

  इसी प्रकार हम विभिन्न हर वाली भिन्नों को हल करते हैं।

  हम भिन्न वाली भिन्नों का योग एक और उदाहरण द्वारा सीखेंगे।

  2/3+4/5

- जैसा कि हम देख सकते हैं कि यहाँ दोनों भिन्नों के हर अलग–अगल हैं तो हम सबसे पहले इन भिन्नों के हरों को समान करते हैं। इनको समान करने के लिए हम 3 और 5 का लघुतम समापवर्त्य निकालते हैं।
- 15 दोनों भिन्नों का हर बन जायेगा।

  2/3+4/5 =

  = ?/15+ ?/15
- अब हम नए हर को पहली भिन्न के हर से विभाजन करते है, एवं जो संख्या आएगी उसे पहली भिन्न के अंश से गुणा करते हैं। ऐसा ही हम दूसरे भिन्न के साथ करते हैं।

  15/3 =5 , 5x2 = 10
- पहली भिन्न का अंश 10 होगा। इसी तरह हम दूसरी भिन्न का अंश निकालेंगे। = 15/5 =3, 3X4 = 12
- दूसरी भिन्न का अंश 12 होगा।
- अब हमें दो समान हर वाली भिन्न मिल गयी है। हम अब हर को समान रखते हुए दोनों अंशों को जोड़ लेंगे।

  = 10/15+12/15 = 22/15

  अतः भिन्नों का योग = 22/15 होगा।

  भिन्न का घटाव कैसे होता है? नियम

भिन्नों का घटाव करने में भी हमें कम–से–कम दो संख्याओ का लघुतम समापवर्त्य निकालना आना चाहिए।

भिन्न का घटाव कैसे बनता है?

- जिन दो भिन्नों को हम घटा रहे हैं अगर उनका हर समान है तो उनको घटाना आसान होता है। इन भिन्नों को घटाने के लिए हमे बस अंशो का प्रयोग करना पड़ता है।
- लेकिन अगर दोनों भिन्नों का हर अलग है तो हमें सबसे पहले उन भिन्नों के हर को समान करना पड़ता है। हर को समान करने के लिए हम दोनों या तीनों भिन्नों के हरो का लघुतम समापवर्त्य निकालते है।
- जिन हरो का लघुतम समापवर्त्य निकालते हैं वहीं होने वाला समूह का हर होता है।
- अब हमें बस अंशो को एक–दूसरे से घटाना पड़ता है।
- घटाने के बाद जो अंश आता है उसे लघुतम समापवर्त्य के ऊपर लिखते हैं। इससे जो भिन्न बनती है उसे सरल करने पर हल प्राप्त हो जाता है।

भिन्न के घटाव के उदाहरण

उपरोक्त बिन्दुओं के आधार पर भिन्न की प्रक्रिया को उदाहरण के साथ समझते हैं।

1. **समान हर वाली भिन्नों को घटाना**

   6/7 – 2/7

   - ऊपर दी गयी भिन्न में जैसा कि आप देख सकते हैं, दोनो भिन्नों के हर एक–समान हैं। हमें घटाने में ज्यादा मुश्किल नही होती है।

- हम सबसे पहले हर को आगे लिख लेते हैं, जैसा कि हम जानते है कि आने वाली भिन्न के हर 7 ही होने वाला है

  6/7 – 2/7 = / ?/7

- अब हमें अंशों को एक–दूसरे में से घटाना है।

  6-2 = 4

  इस भिन्न का हल होगा

  = 4/7

- इस प्रकार हम किन्हीं दो भिन्न जिनका हर एक समान होता है, उन्हें घटा सकते हैं।

2. अब हम विभिन्न हरो वाली भिन्नों का घटाना सीखेंगे

5/6 – 3/4

- जैसा कि आप ऊपर दी गयी दो भिन्नों में देख सकते हैं, यहाँ दोनों भिन्नों के हर असमान हैं। हम यह जानते हैं कि सबसे पहले हमें असमान हरो का सामना करना पड़ता है।
- हमें हरो को समान करने के लिए उनका लघुतम समापवर्त्य निकालना पड़ता है। अतः हम 4,6 का लघुतम समापवर्त्य निकालेंगे। 4, 6 का लघुतम समापवर्त्य = 12
- 12 आने वाली दोनों भिन्नों का हर होता है। अतः हम 12 को आगे हर में लिख लेते हैं।

  5/6 – ¾ = ?/12 - ?/12

- अब हम अंशों को ज्ञात करते हैं। पहली भिन्न के हर से भाग देते हैं एवं जो संख्या आती है उसे हम अंश से गुणा कर देते हैं।

  12/6 = 2, 2x5 = 10

- इसी तरह हम दूसरी भिन्न का अंश निकालते हैं। 12 को दूसरी भिन्न के हर से भाग देते हैं एवं जो संख्या आती है, उसे अंश से गुणा कर देते हैं।

  12/4 = 3, 3x3 = 9

- अब हमारे पास दोनों भिन्नों के अंश आ गए हैं तो अब हम दोनों अंशो को घटा देते हैं

  = 10-9 = 1

- हमारे पास अंश 1 बच गया है एवं 12 हर हमें पहले से ही ज्ञात है।

  अतः हल होगा = 1/12

इस प्रकार हम किन्ही दो भिन्नों जिनका हर समान नहीं होता है उसका उत्तर ज्ञात कर सकते हैं।

भिन्न का गुणा कैसे होता है? नियम

- भिन्नों को गुणा करने से पहले हमें उन्हें उनको सरल रूप में लाना पड़ता है। भिन्न करने के लिए भी यह प्रक्रिया को अपनाना होता है। अगर भिन्न सरल रूप में नहीं है तो उन्हें सरल रूप में लाइए।
- इसके बाद हमें दोनों पहली भिन्न के हर को दूसरी भिन्न के हर से एवं पहली भिन्न के अंश को दूसरी भिन्न के अंश से गुणा करते हैं। अर्थात अंश का गुणा अंश में और हर का गुणा हर में।
- अंशxअंश/ हरxहर

- यह करने के बाद जो भिन्न आती है अगर सरल रूप में है तो वही हल है लेकिन वह सरल रूप में नहीं है तो हम उसे सरल करते हैं।

भिन्न के गुणा के उदाहरण

- अब हम दो भिन्नों को उदाहरणों के साथ गुण करना सीखते हैं।

  4 ⁄ 7 x 6 ⁄ 11

जैसा कि आप देख सकते हैं कि ऊपर दो भिन्न दी गयी है जिसे हम भिन्न मे अंश कहते हैं। दो भिन्न अपने सरल रूप में है। हम इनको और सरल रूप में नहीं लिख सकते हैं।

- अब हम पहली भिन्न के हर को दूसरी भिन्न के हर से गुणा करते हैं।

7x11 = 77

- जैसा कि हम देख सकते हैं कि आने वाली भिन्न का हर 77 है। अब हम भिन्नों के अंश को ज्ञात करने के लिए दोनों भिन्नों के अंशों का गुणा कर देते हैं।

4x 6 = 24

- हम देख सकते हैं अब हमने अंश भी ज्ञात कर लिया। अब आगे अंश एवं हर को एकसाथ लिख देते हैं। अतः इन भिन्नों के गुणा का हल होता है।

  = 24/77

भिन्नों का गुणा करना एक और उदाहरण के साथ सीखते हैं।

= 3/15 x 4/24

- ऊपर दी गयी भिन्नों में जैसा कि हम देख सकते हैं कि ये अपने सरलतम रूप में नहीं है। अतः हम सबसे पहले इन्हें हम सरलतम रूप में लिखते हैं।

  = 1/5 x1/6

- जैसा कि आप देख सकते हैं कि अब ये भिन्न अपने सरलतम रूप में आ गयी है। अतः अब हम इन्हे आगे हल करते हैं, जैसा हमने पिछले उदाहरण में किया था।
- हम सबसे पहले पहली भिन्न के हर को दूसरी भिन्न के हर से गुणा करते हैं। इससे हमें आने वाली भिन्न का हर मिल मिल जाता है।

  5 x 6 = 30

जैसा कि हम देख सकते है कि हमने हर ज्ञात कर लिया है। अतः हम अब पहली भिन्न के अंश को दूसरी भिन्न के अंश से गुणा करते हैं।

1x1 = 1

जैसा कि आप देख सकते हैं यहाँ हमने अंश भी ज्ञात कर लिया है जो 1 है। अब हम अंश एवं हर को लिख देते हैं। जो भिन्न होता है वह भिन्न ही हमारा हल है।

अतः हल होगा = 1/30

भिन्न का भाग कैसे होता है? नियम

भिन्न का भाग इस प्रकार से किया जाता है–

- सबसे पहले हमें दोनों भिन्न में से पहली भिन्न को कुछ नहीं करना है एवं दूसरी भिन्न के अंश को हर की जगह एवं हर को अंश की जगह लिखना है।

- भिन्न को उलटने से जो विभाजन का चिन्ह है वह गुणा के चिन्ह में परिवर्तित हो जायेगा।
- अब हम पहली भिन्न के हर को दूसरी भिन्न के हर से गुणा करते हैं एवं पहली भिन्न के अंश को दूसरी भिन्न के अंश से गुणा करते हैं।
- अब जो हमें भिन्न मिलती है उसे हम उसके सरलतम रूप में लिखते हैं।
- इस प्रक्रिया से भिन्नों का भाग किया जाता है।

भिन्न के भाग के उदाहरण

दो भिन्नों के भाग की प्रक्रिया को उदाहरण द्वारा समझते हैं:–

2/3 ÷ 5/7

जैसा कि आप ऊपर देख सकते हैं कि हमारे पास दो भिन्न हैं जिनका हमें विभाजन करना है। जैसा कि हम जानते हैं कि विभाजन करने के लिए सबसे पहले हमें दूसरी भिन्न के अंश को हर की जगह एवं हर को अंश की जगह लिखना है। इससे दूसरी भिन्न उलटी हो जाती है एवं भाग का चिन्ह बदलकर गुणा का चिह्न बन जाता है।

2/3 x 7/5

ऊपर दी गयी भिन्नों में जैसा कि आप देख सकते है यहाँ अब भाग की जगह पर गुणा का चिन्ह आ गया है। अतः अब हम निकालने के लिए पहली भिन्न के अंश को दूसरी भिन्न के अंश से गुणा करते हैं एवं पहली भिन्न के हर को दूसरी भिन्न के हर से गुणा करते है।

2x7 = 14 , 3x5 = 15

अंश एवं हर को गुणा करने पर हमारे पास एक नयी भिन्न आ जाती है जो कि निम्न है:–

= 14/15

जैसा कि हम देख सकते हैं कि ऊपर दी गयी भिन्न अपने सरलतम रूप में है तो अब हम इसे और सरलतम रूप में नहीं लिख सकते हैं। इसलिए यही इन भिन्नों को हल हो जाता है।

भिन्नों का भाग का हल = 14/15

दशमलव संख्या का जोड़ कैसे होता है? नियम

- जिन दो दशमलव संख्याओं का हमें योग करना है, हम सबसे पहले उन्हें ऊपर नीचे लिखते हैं। हमें यह ध्यान रखना है कि दोनों संख्याओं के दशमलव बिन्दु एक–दूसरे के ऊपर ही दोनों संख्याओं के दशमनव बिन्दु एक ही पंक्ति में होने चाहिए।
- अब अगर किसी संख्या में दशमलव बिन्दु के बाद दूसरी संख्या से कम अंक हैं तो हम कम अंक वाली संख्या में शून्य लगा देते हैं जिससे वह दूसरी संख्या के बराबर हो जाए। इससे हमें योग करने में आसानी होती है।
- अब हम इन दोनों संख्याओं को वैसे ही जोड़ते हैं जैसे बिना दशमलव वाली संख्याओं को जोड़ते हैं।

दशमलव संख्याओं के योग के उदाहरण

हम दशमलव संख्याओं के जोड़ को उदाहरण के साथ सीखते हैं। उदाहरण के लिए

42.689

+6.75

- जैसा कि हम देख सकते हैं कि ऊपर दी गई दो दशमलव संख्याओं में दशमलव बिन्दु एक पंक्ति में नहीं हैं तो हम सबसे पहले उन्हें एक पंक्ति में लगायेंगे।

42.689

+6.75

- अब जैसा कि आप देख सकते हैं कि हमने दोनों संख्याओं के दशमलव बिन्दुओं को एक पंक्ति में लगा दिया है, अब हम देखेंगे कि दोनों संख्याओं में दशमलव बिन्दु के दायीं ओर (Right side) कितने–कितने अंक हैं। जैसा हम देख सकते हैं पहली संख्या में दशमलव के बाद तीन अंक हैं लेकिन दूसरी संख्या में दशमलव बिन्दु के बाद केवल दो ही अंक हैं।
- हम दोनों संख्याओं को बराबर करने के लिए दूसरी संख्या में एक शून्य जोड़ देंगे। इससे दोनों संख्याओं में सामान मात्रा में अंक हो जायेंगे।

42.689

6.750

- जैसा कि हम देख सकते हैं अब दोनों संख्याओं का दशमलव बिन्दु ही पंक्ति में है एवं दोनों ही संख्याओं में दशमलव बिन्दु के बायीं तरफ सामान वाले अंक हैं, अब हम इन दोनों संख्याओं को बिल्कुल उसी तरह जोड़ेंगे जिस तरह हम बिना दशमलव वाली संख्याओं को जोड़ते हैं।

42.689

6.750

49.439

- जैसा कि आपने उपर देखा दशमलव बिन्दुओं को पंक्ति में लाने एवं बिन्दु के दायीं ओर वाली संख्याओं को समान करने के बाद वैसे ही हल किया जाता है जैसे बिना दशमलव वाली संख्याए हल होती हैं।

हम एक और उदाहरण के साथ दशमलव संख्याओं का योग सीखते हैं

66.32+5.493

- जैसा कि आप ऊपर देख सकते हैं, यहाँ दो दशमलव वाली संख्याए हैं। सबसे पहले हमें यह देखना है कि दो दशमलव संख्याओं में दशमलव बिन्दु एक पंक्ति में नही हैं, तो हम सबसे पहले हम उन्हें एक पंक्ति में लगायेंगे।

66.32

+5.493

- जैसा कि हम देख सकते हैं यहाँ हमने दशमलव बिन्दुओं को एक पंक्ति में कर दिया है। अब हमें यह देखना है कि दोनों संख्याओं में दशमलव बिन्दु के दायीं ओर समान अंक हैं या नहीं। अगर नहीं है तो जिस संख्या में कम अंक हैं हम वहाँ शून्य लिखकर दूसरी संख्या के बराबर कर देंगे।

66.320

+5.493

➢ जैसा कि आप ऊपर देख सकते हैं कि हमने दोनों संख्याओं के दशमलव बिन्दुओं को एक पंक्ति में कर दिया है एवं दशमलव बिन्दु के दायीं ओर भी समान मात्रा में अंक कर दिये हैं। अब हम इन दोनों संख्याओं को बिलकुल वैसे ही जोड़गे जैसे हम बिना दशमलव वाली संख्या को जोड़ते हैं।

66.320

5.493

71.813

- जैसा कि आपने उपर देखा हमने इन संख्याओं को आम संख्याओं की तरह जोड़ कर हल कर दिया।

इसी प्रक्रिया से आप कोई भी दशमलव संख्याओं का योग कर सकते हैं।

दशमलव संख्या का घटाव

दशमलव संख्याओं को घटाने की प्रक्रिया

- जिस दशमलव संख्या को हमें घटाना है उसे हम नीचे लिखते हैं एवं जिस संख्या में से घटाना है उसे उपर लिखते हैं अर्थात, बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाते हैं। हमें यह ध्यान रखना है कि दोनों संख्याओं के दशमलव बिन्दु एक ही पंक्ति में होने चाहिए।
- जब किसी संख्या में दशमलव बिन्दु के बाद दूसरी संख्या से कम अंक हैं तो कम अंक वाली संख्या में शून्य लगा देते हैं जिससे वह दूसरी संख्या के अंको के बराबर हो जाए। इससे हमें घटाने में आसानी होती है।
- घटाने की प्रक्रिया ठीक उसी प्रकार करते हैं जैसे बिना दशमलव वाली संख्याओं को घटाते हैं।
  उदाहरण – 3.25 को 45.2 में से घटाइए
- सबसे पहले हम बड़ी संख्या को ऊपर लिखते हैं एवं छोटी को उसके नीचे लिखते है। संख्याओं को ऊपर नीचे लिखते समय यह ध्यान देना चाहिए कि दोनों दशमलव का बिन्दु एक–ही पंक्ति मे एक–दूसरे के ऊपर नीचे ही होने चाहिए।

 45.2
–3.25

- उपरोक्त संख्याओं को लिखते समय हमने दशमलव को ध्यान में रखकर ठीक एक–दूसरे के ऊपर नीचे क्रम मे व्यवस्थित करके लिख दिया है। अब आगे हमें यह ध्यान देना है कि दोनों संख्याओं के अंकों की संख्याओं में दशमलव बिन्दु के दायीं ओर समान मात्रा में अंक है या नहीं।
- जिस संख्या में दशमलव बिन्दु की दायीं ओर दूसरी संख्या से कम मात्रा में अंक हम उस संख्या में शून्य लगाकर अंकों की मात्रा को दूसरी संख्या के बराबर कर देंगे जिससे संख्याओं को घटाने में आसानी होगी।

45.20
 3.25
41.95

- जैसे कि 45.20 में से 3.25 को बिलकुल उसी प्रकार घटाये जैसे 4520 मे से 325 को घटाते हैं, इससे एक दशमलव का अन्तर था। अतः हम दशमलव वाली संख्याओ में दशमलव को एक पंक्ति में लगाकर एवं शून्य लगाकर अंकों को समान करके इन्हे बिना दशमलव वाली संख्या की तरह ही घटाते हैं।

दशमलव संख्याओं का गुणा करने की प्रक्रिया

- दशमलव संख्याओं को गुणा करना बहुत ही आसान होता है। सबसे पहले हमें दोनों दशमलव संख्याओं को ऊपर नीचे लिख लेते हैं। इन संख्याओं को बिना दशमलव वाली संख्याओं की तरह ही गुणा करते हैं।

- जब इन दशमलव वाली संख्याओं को गुणा करने पर जो उत्तर आता है हम उसमें दशमलव बिन्दु लगाते हैं। दशमलव बिन्दु को किस जगह लगाना है। हम इस प्रकार से ज्ञात करते हैं कि जिन दो संख्याओं का हमने गुणा किया है। हम उन संख्याओं को दायीं ओर से संख्याओं के दशमलव स्थानों का योग कर लेते हैं। जो योग आता है वह उन दो संख्याओं के गुणनफल का दायीं ओर से गणना करके संख्या में दशमलव लगा लेते हैं।

  उदाहरण – दो दशमलव संख्याएं

  7.32 x 0.25

- अतः हमारे पास दो दशमलव वाली संख्या है जिसका हमे गुणा करना है। तो सबसे पहले सामान्य गुणा की तरह हम गुणा करते हैं।

```
        732x 0.250
=       7.32
        x 0.250
           0000
          3660
         1464
        183000
```

- दशमलव की दोनों संख्याओं को सामान्य गुणा की तरह गुणा करने पर प्राप्त संख्या त्र 183000 है। बस हमें इसमें दशमलव बिन्दु लगाना है। ये ज्ञात करने के लिए हम दोनों संख्याओं के दायीं ओर दशमलव का स्थान का योग कर लेते हैं।

  7.32 = 2 (दशमलव स्थान)

  0.250 = 3 (दशमलव स्थान)

गुणनफल का दशमलव स्थान = 2+3 = 5 (दायीं ओर से पाँच अंक के बाद दशमलव)

अतः दशमलव संख्याओं का गुणनफल = 1.83000

दशमलव संख्याओं का भाग करने की प्रक्रिया

- दशमलव संख्याओं का भाग करने के लिए हमें सबसे पहले यह देखना है कि भाजक एक पूर्ण संख्या है कि नहीं।
- यदि भाजक एक पूर्ण संख्या नहीं है तो हमें भाजक को एक पूर्ण संख्या बनाते हैं। एक भाजक को पूर्ण संख्या बनाने के लिए हम 10 से गुणा करते हैं। गुणा तब तक करते हैं जब तक भाजक एक पूर्ण संख्या न बन जाय। जितनी बार भाजक को 10 से गुणा किया है उतनी ही बार भाज्य में भी 10 से गुणा करते हैं।
- ऐसा करने के पश्चात हमारे पास जो संख्या प्राप्त होती है, हम उन संख्याओं को आपस में भाग देते हैं। भाग करने के पश्चात जो उत्तर आता है वही उन दशमलव संख्याओं का हल होता है।
- यदि भाज्य पूर्ण संख्या नहीं है एवं भाजक पूर्ण संख्या है तो हमें किसी भी संख्या को 10 से गुणा करने की आवश्यकता नहीं है। केवल सामान्य भाग की तरह ही भाग करना होता है। जो उत्तर प्राप्त होता है उसमें हम उस स्थान पर ही दशमलव बिन्दु लगाते हैं जिस स्थान पर भाज्य का दशमलव बिन्दु होता है। इस प्रकार दशमलव संख्याओं का भागफल प्राप्त हो जाता है।

  उदाहरण–1

35 का 0.5 से भाग

- इन दोनों संख्याओं में भाजक = 0.5, और भाज्य = 35 है। यहाँ पर भाजक एक पूर्ण संख्या नहीं है इसलिए हम भाजक में 10 से गुणा करते हैं अर्थात, 0.50x10 = 5
  जब भाजक में 10 से गुणा किये तो भाज्य में भी 10 से गुणा करते हैं अर्थात, = 35x10 = 350
- जब हमने भाजक तथा भाज्य में 10 से गुणा किये तो भाजक एक पूर्ण संख्या प्राप्त हो गयी। अब भाज्य में भाजक से भाग देते है।

350 / 5 या 5)350(

हम इसे सामान्य भाग की तरह भाग देते हैं। प्राप्त भागफल = 70

5)350(70
35
00

उदाहरण–2

25.30 का 5 से भाग

- इन दोनों संख्याओं में भाज्य = 25.30 तथा भाजक = 5 है। अतः यहाँ पर भाजक एक पूर्ण संख्या है। भाज्य का जरूरी नहीं कि वह पूर्ण संख्या हो। अतः हमें इन दोनों संख्याओं में 10 से गुणा करने की आवश्यकता नहीं है। भाज्य का दशमलव बिन्दु घटाकर सामान्य भाग की तरह भाग देते हैं।

= 2530
5 या 5)2530(506
25
30
30
xx

- जब हमने भाज्य 2530 मे तथा भाजक = 5 से भाग दिया तब उत्तर प्राप्त हो रहा है = 506 लेकिन हम इसमें दशमलव बिन्दु लगाते हैं।
- दशमलव बिन्दु कहाँ लगाना है? हम यह बिन्दु उस दशमलव स्थान पर लगाते हैं जहाँ ये भाज्य में था अर्थात, 25.30 में ये दो दशमलव स्थान पर है तो भागफल के दायीं ओर से दूसरे स्थान पर दशमलव संख्या लगायेंगे।
  अतः 5.06
  इस प्रक्रिया से हम दशमलव संख्याओं का भाग कर सकते हैं।

भिन्न सीखने में कठिनाइयॉ एवं समाधान

साधारण भिन्न का शिक्षण देने के सम्बन्ध में श्री एन.आर. शर्मा के अनुसार, ''साधारण भिन्न किस स्तर पर और किस प्रकार प्रारम्भ की जाये? अर्थात भिन्नों का शिक्षण उस समय किया जाना चाहिए जब बालक भाग देने की प्रक्रिया का ज्ञान प्राप्त कर लेता है।''

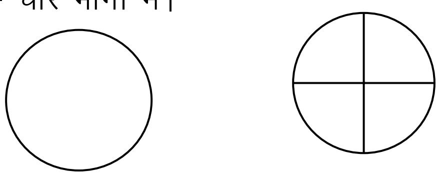
उदाहरण – यदि 15 में 5 से भाग दिया जाये तो भागफल 3 प्राप्त होता है अथवा इस प्रकार से भी 5, 15 में 3 बार सम्मिलित है। किन्तु यदि 2 में 5 से भाग दिया जाये तो भागफल क्या होगा? इस प्रश्न का उत्तर कक्षा 1 या 2 का छात्र शायद न दे सकें लेकिन पहले प्रश्न का उत्तर वह दे सकता हैं।

इसका कारण यही है कि उसे अभी तक ऐसे अंक का ज्ञान नहीं है जिसे 5 से गुणा करने पर गुणनफल 2 प्राप्त होता है।
भिन्न के शिक्षण में 'सरल से कठिन की ओर'
'स्थूल से सूक्ष्म की ओर' तथा
'ज्ञात से अज्ञात की ओर' बढ़ना चाहिए।
शिक्षक को भाग की क्रिया को आधार बनाकर भिन्न का बोध कराना चाहिए।

भिन्न का शिक्षण करते समय प्रारम्भ में यथा सम्भव स्थूल या मूर्त वस्तुओं का प्रयोग करना चाहिए। उदाहरण के लिए विद्यार्थियों के सम्मुख एक सेब प्रस्तुत करके।

प्रश्न – यह कौन सा फल है?
उत्तर – यह सेब है।
प्रश्न – मेरे हाथ में कितने सेब हैं?
उत्तर – एक सेब।

अध्यापक सेब को चार बराबर भागों में विभाजित करता है।
प्रश्न – मैने सेब को कितने भागों में विभाजित किया?
उत्तर – चार भागों में।



सेब   चार बराबर भाग

प्रश्न – इन चार भागों में एक भाग सेब का कौन–सा हिस्सा हैं?
उत्तर – एक चौथाई।

दशमलव भिन्नों का शिक्षण

वह साधारण भिन्न जिसका हर 10 अथवा 10 का कोई घातांक हो उसे दशमलव भिन्न कहते हैं। दशमलव भिन्न का ज्ञान कराने के लिए शिक्षक को निम्न लिखित बिन्दुओं पर विशेष रूप से ध्यान देना चाहिए।

- दशमलव भिन्न का ज्ञात कराने के लिए सामान्य भिन्न के ज्ञान का आधार होना चाहिए।
- ज्ञात से अज्ञात की ओर बढ़ने का प्रयास किया जाना चाहिए।
- दशमलव भिन्न का प्रारम्भिक ज्ञान स्थूल वस्तुओं के माध्यम से दिया जाना चाहिए।
- शिक्षण कार्य करते समय उपयुक्त एवं बालकेन्द्रित शिक्षण विधियों तथा सहायक सामग्री का प्रयोग करना चाहिए।
- पर्याप्त रूप से कक्षा कार्य, गृहकार्य तथा अभ्यास कार्य कराना चाहिए तथा उसका निरीक्षण करना एवं सुधार हेतु सुक्षाव देना चाहिए।
- विद्यार्थियों के साथ प्रेम, सहानुभूति, निष्पक्ष तथा सौहार्दपूर्ण व्यवहार करना चाहिए।

Writing Question
इबारती प्रश्न

इबारती शब्द अँग्रेजी भाषा (Writing) राइटिंग शब्द का हिन्दी रूपान्तरण है। इबारती शब्द 'फारसी' शब्द से लिया गया है। इबारती शब्द का अर्थ 'किसी भी तथ्य या विषय–वस्तु से सम्बन्धित लिखने का तरीका' गणित में भाषा विकास, बेहतर ज्ञान समझ और प्रयोग के लिए इबारती प्रश्न का होना बहुत ही जरूरी है क्योंकि ऐसे प्रश्न तर्क, कौशल और अन्य समस्या को हल करने या व्यवहारिक जीवन को बेहतर व सरल बनाता है।

परिभाषा – 'ऐसे प्रश्न जो व्यक्ति के वास्तविक जीवन से सम्बन्धित हो उसे हम इबारती प्रश्न कहते हैं।' 'ऐसे प्रश्न जिसके आधार पर गणित की बुनियादी संक्रियाओं से सम्बन्धित को हल कर सके जिससे गणित कौशल का निर्माण किया जा सके, इबारती प्रश्न कहते है', जैसे–बुनियादी संक्रियाओं में प्रश्न का आधार जोड़ घटाव, गुणा और भाग से सम्बन्धित होते हैं।

इबारती प्रश्न के गुण

- सरल शब्दो में हो।
- दैनिक जीवन से सम्बन्धित हो।
- कौशल आधार पर हो।
- तर्क आधार पर हो।
- ज्ञान, बुद्धि, सोचने एवं समझने वाला हो।
- ज्यादा बड़ा प्रश्न न हो, यदि हो तो तार्किक हो।

इबारती प्रश्न के प्रकार

1. व्यावहारिक प्रश्न
2. तार्किक प्रश्न
3. मूर्त प्रश्न
4. अमूर्त प्रश्न
5. कौशलयुक्त प्रश्न

आकार के आधार पर इबारती प्रश्न के प्रकार

1. लघु उत्तरीय प्रश्न
2. अतिलघु उत्तरीय प्रश्न
3. दीर्घ उत्तरीय प्रश्न
4. रिक्त प्रश्न
5. वस्तुनिष्ठ प्रश्न

अन्य इबारती प्रश्न

1. **खुला प्रश्न** – जिस प्रश्न का व्याख्या अलग–अलग आधार पर हो, जैसे –
   आप गणित में कमजोर हैं।
   आप गणित में तेज क्यो है ?
2. **बन्द प्रश्न** – जिस प्रश्न के उत्तर का दायरा सीमित हो, जैसे –
   7 का वर्ग क्या? 7+8 = ?

समेकन

इस इकाई के अन्तर्गत दैनिक जीवन के उदाहरणों को जोड़ते हुए भिन्नों की आवश्यकता, उपयोग एवं विकास के बारे में चर्चा किया गया है। इसमें भिन्न की समझ बनाते समय पूर्ण भाग एवं हिस्से की अवधारणा और उनके निरूपण की प्रक्रिया के विकास को स्पष्ट किया गया है। भिन्न संख्या एवं दशमलव संख्याओं पर आधारित संक्रियाओं का विस्तार–पूर्वक वर्णन किया गया है, जिससे डी.एल.एड. प्रशिक्षु शिक्षण की कार्य विधि को भलि–भाँति समझ सके तथा उसे अपने दैनिक जीवन में उसका पूर्णरूपेण उपयोग में ला सके। भिन्नात्मक संख्याओं के विभिन्न रूप, जैसे – संक्षिप्त भिन्न, उचित भिन्न, अनुचित भिन्न, मिश्रित भिन्न इत्यादि भिन्नों को समझना एवं दशमलव में व्यक्त करने की प्रक्रिया को स्पष्ट किया गया है। भिन्न सीखाने में होने वाली कठिनाईयाँ एवं समाधान को सम्मिलित किया गया है। साथ–ही दशमलव भिन्नों के शिक्षण पर कई बिन्दुओं को भी दर्शाया गया है। इबारती प्रश्न क्या है? यह कितने प्रकार का होता है? इस पर भी विस्तारपूर्वक चर्चा की गयी है। पूरी इकाई में इस बात पर ध्यान दिया गया है कि नई शिक्षा नीति 2020 का अनुसरण किया जा सके।

- ठोस वस्तुओं द्वारा विभिन्न गतिविधियाँ कराई जाए।
- बच्चों के अनुभव एवं प्रतिदिन के कार्यों पर आधारित शिक्षण कार्य किया जाए।
- शिक्षण कार्य के पश्चात् बच्चों द्वारा किये गये कार्यों को व्यक्त करने के लिए पूरा अवसर प्रदान किया जाए।
- बच्चों द्वारा किये गये कार्यों का भी पूर्णरूपेण सम्मान किया जाए।
- शिक्षण कार्य के दौरान अधिगम प्रक्रिया में बच्चों को रटन्त प्रणाली से मुक्त रखा जाए तथा सृजनात्मकता उपागम का सहारा लिया जाए तथा अवधारणाओं एवं तर्कों की समझ हेतु उनकी मदद की जाए।

मूल्यांकन

- भिन्न से आपका क्या अभिप्राय है? भिन्न की संक्रिया की अवधारणा को स्पष्ट करें।
- भिन्न की संक्रियाए करते समय बच्चों द्वारा की जाने वाली त्रुटियों एवं कठिनाईयों को दर्शाइए।
- दशमलव संख्या की अवधारणा विकसित करने के लिए प्रभावी शिक्षण विधि का विस्तारपूर्वक वर्णन करें।
- भिन्नात्क संख्याओं की समझ विद्यार्थियों में आप एक शिक्षक के रूप में कैसे विकसित करेंगे जिससे विद्यार्थी अपने दैनिक जीवन में उसका उपयोग कर सकें।
- इबारती प्रश्न का क्या अभिप्राय है? इबारती प्रश्न के प्रकार को अभिव्यक्त करते हुए स्पष्ट करें।
- 11 गोलियों के समूह में 6 काली एवं 5 हरी गोलियाँ हैं, तो समूह में काली गोलियों का हिस्सा कितना है?
- रवि के खेत में 5–4/7 टन गेंहूँ पैदा हुई। उसमें से उसने 2–3/5 टन गेंहूँ बेच दिया तो बताओ उसके पास कितना टन गेंहूँ शेष रहा?
- एक ग्वाला 15 दिन में 220–3/5 लीटर दूध बेचता है। उसकी प्रतिदिन दूध की मात्रा को ज्ञात कीजिए।
- 2/3 को दशमलव संख्या में परिवर्तित कीजिए।

- कारण के साथ बताएँ
    1. 23 / 13 का मिश्र भिन्न क्या होगा?
    2. 29 / 21 को मिश्र भिन्न में बदलें।
- आलेख की सहायता से स्पष्ट करें और खाली जगह में > या < को भरें।

    1. $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{1}{3}$

       3 3

    2. $\frac{2}{5}$ ☐ $\frac{4}{5}$
- भिन्नों को आरेख की सहायता से स्पष्ट करें, जिससे विद्यार्थी भिन्न की अवधारणा को समझ सके।

    $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=?$
- 2.5 को साधारण भिन्न में परिवर्तित करते हुए कारण को भी स्पष्ट करें।

➢ 2.3425+1.324+4031.2+7.13+5+1 को जोड़िये एवं कारण को भी स्पष्ट करें।

इं–ससांधन

- http://ncert.nic.in
- http://scert.nic.in

संदर्भ सूची

- बिहार पाठ्यचर्या की रूप रेखा BCF-2008
- बिहार राज्य की गणित की पाठ्यपुस्तकें कक्षा 1 से 8 तक
- प्राथमिक स्तर गणित की पाठ्यपुस्तक खुशी–खुशी श्रृंखला कक्षा 1 से 8 तक एकलव्य का प्रकाशन।
- राष्ट्रीय पाठ्यचर्या NCF-2005
- गणित शिक्षण का आधार पत्र एन.सी.ई.आर.ई., नई दिल्ली।