अध्याय – 12

ठोस आकारों का चित्रण

(MAPPING OF SOLID SHAPES)

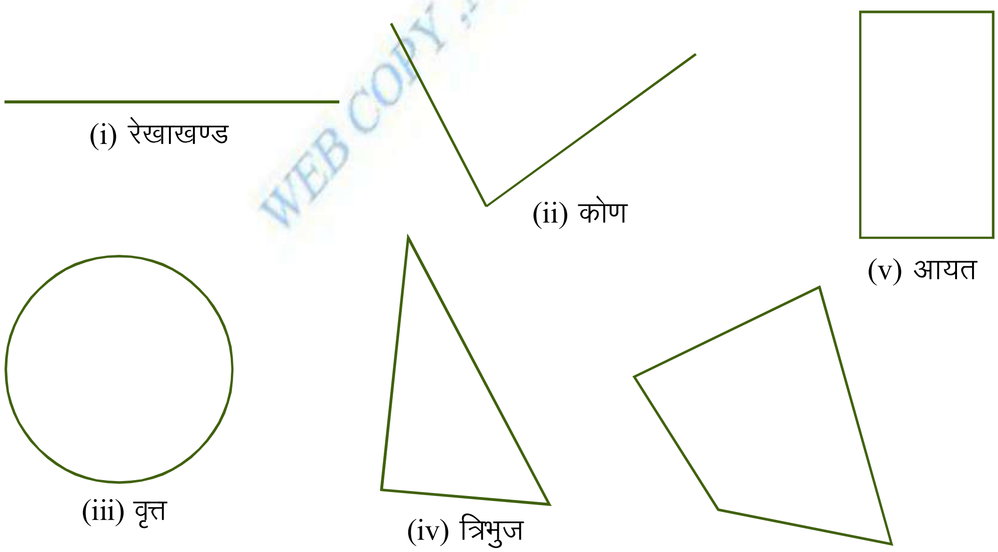
12.1 भूमिका

आप समतल और ठोस आकारों के बारे में जानते हैं। समतल आकारों में लम्बाई और चौड़ाई जैसे दो माप होते हैं जबकि ठोस आकारों में लम्बाई, चौड़ाई के साथ ही साथ ऊँचाई जैसा माप भी होता है इसी कारण इसे त्रिविमीय आकार भी कहते हैं।

त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुज एवं वृत्त जैसी आकृतियाँ सभी किसी तल में आसानी से बनाई जा सकती हैं।

आइए करके देखें

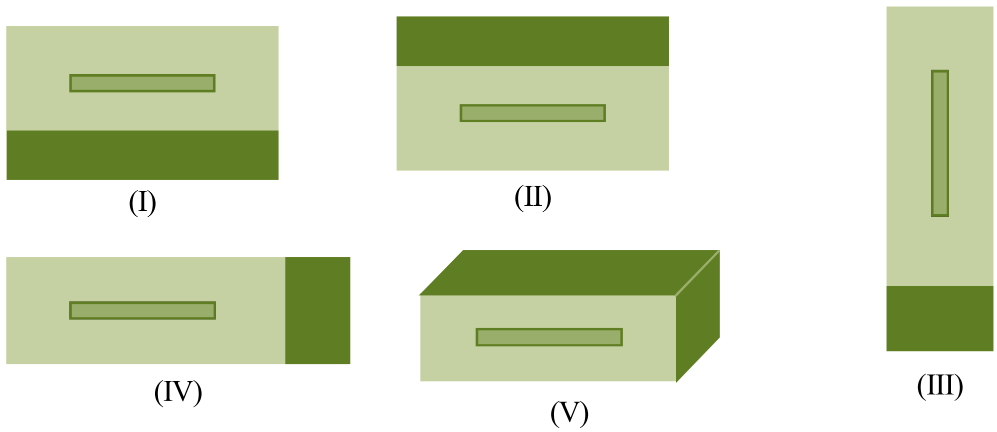
आप निम्न आकृतियों से पूर्व परिचित हैं। आप इनकी रचना करना भी जानते हैं—



चित्र—12.1

सर्व शिक्षा – 2013–14 (निःशुल्क)

क्या आप ईंट, डिब्बा जैसी वस्तुओं को कागज पर बना सकते हैं? कुछ छात्र/ छात्राओं ने ईंट की आकृति कुछ इस प्रकार बनाईं–



चित्र–12.2

क्या यह सब ठीक दिखते हैं? ये सभी वैसे दिख रही हैं जैसी ईंटें दिखती हैं?

ये सभी आकृतियाँ एक दूसरे से भिन्न हैं।

क्या आप बता सकते हैं कि ये अलग–अलग क्यों हैं?

ईंट, बॉक्स को जब आप कागज के तल पर बनाते हैं

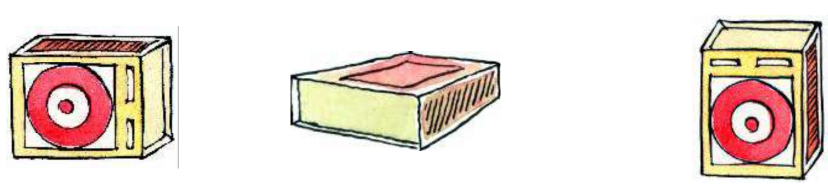
तब आपको कुछ बातों का ध्यान रखना पड़ता है।

सोचिए द्विविमीय व त्रिविमीय आकृतियों को कागज के तल पर बनाना अलग–अलग क्यों है?

क्रियाकलाप

इस बात को समझने के लिए माचिस का खाली डिब्बा लीजिए। माचिस को जलानेवाली (बारूद) सतह पर खड़ा कीजिए। माचिस कैसी दिखती है?

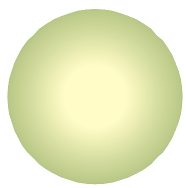
अब इसे इसकी बड़ी सतह पर रखिए।

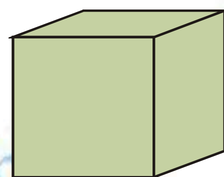


यह स्पष्ट है कि माचिस अब कुछ अलग तरह की दिख रही है। इस चित्र को भी देखिए। इसमें सबसे छोटी सतह पर डिब्बी को खड़ा किया गया है। तीनों चित्र माचिस के हैं किन्तु अलग–अलग स्थिति के हैं।

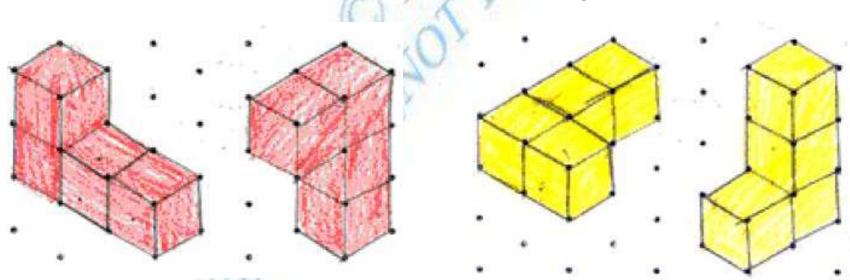
ईंटें अथवा अपना टिफिन बॉक्स लेकर उन्हें माचिस के चित्रों के आधार पर रखकर देखिए। क्या आप हर चित्र के लिए यह कर पाए।

अब जरा सोचिए– क्या किसी गोले अथवा घन को अलग–अलग स्थितियों में रखने पर कोई अंतर आता है? ....

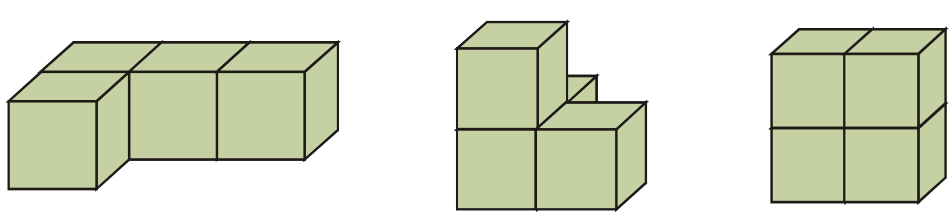

गोला


घन

ऐसा क्यों होता है? आपने ठीक सोचा– गोला एक तलीय आकृति है व घन के सभी छः तल सर्वांगसम है। यहाँ चार घन को जोड़कर एक आकृति बनाई गई है।



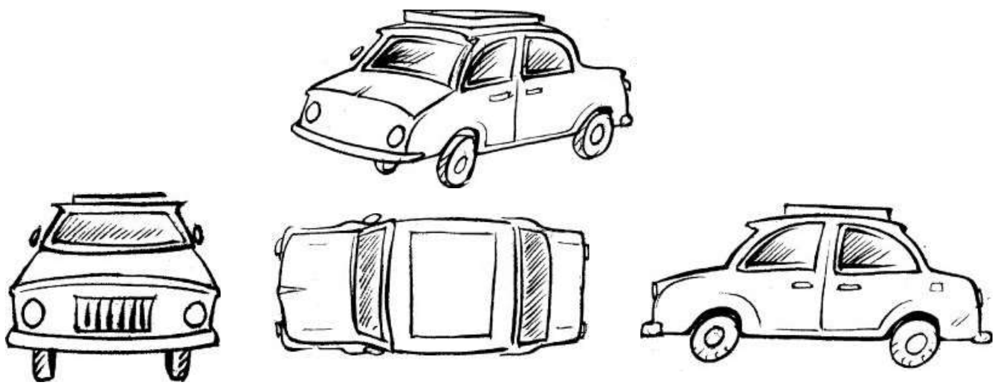
आइए, इसे विभिन्न तलों पर रखकर देखें यह कैसी–कैसी दिखाई देती है। इस प्रकार बनी आकृतियों को हम सुविधा के लिए समदूरस्थ समबाहु ग्राफ पेपर पर बना सकते हैं। इस प्रकार ये अलग–अलग चित्र बनते हैं। आप भी चार घन लेकर उसे अलग–अलग तरीकों से जोड़कर विभिन्न तलों पर रखकर देखिए। आपको ये कितने अलग–अलग तरह से दिखते हैं।



12.2 3D आकारों के दृश्य

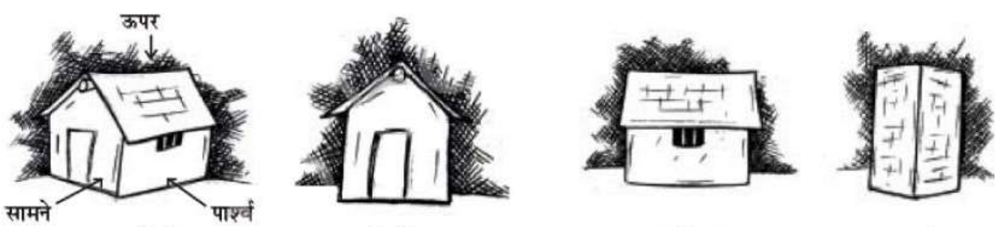
अलग–अलग तलों पर रखने पर त्रिविमीय आकृतियाँ अलग–अलग दिखाई दे सकती हैं। इसी प्रकार त्रिविमीय वस्तुएँ विभिन्न स्थानों से भिन्न–भिन्न रूप में दिखाई दे सकती हैं। इसलिए इनको विभिन्न परिप्रक्ष्यों (दृष्टियों) से खींचा जा सकता है। उदाहरणार्थ

नीचे एक कार दिखाई गई है जिसे एक ही तल पर अलग–अलग तरफ से देखने पर निम्न तरह से दिखाई देती है–



सामने ऊपर पार्श्व

इसी प्रकार झोंपड़ी के निम्नलिखित दृश्य हो सकते हैं–

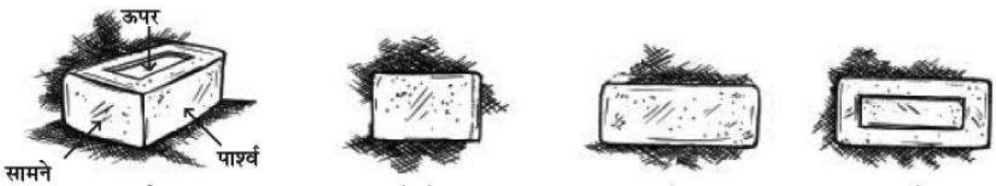


एक झोंपड़ी सामने से दृश्य पार्श्व दृश्य ऊपर से दृश्य

इसी प्रकार एक गिलास के निम्नलिखित दृश्य हो सकते हैं :

एक गिलास पार्श्व दृश्य ऊपर से दृश्य

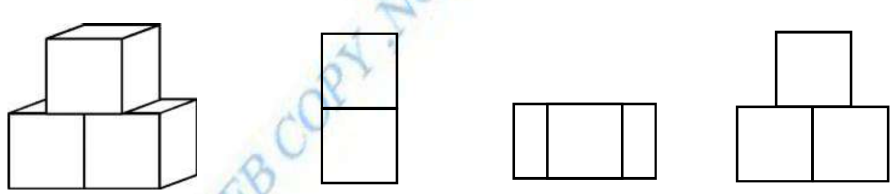
एक गिलास का ऊपर से दृश्य संकेंद्रीय वृत्तों का एक युग्म क्यों है? यदि इसे अलग दिशा से देखा जाए, तो क्या पार्श्व दृश्य कुछ और प्रकार का प्रतीत होगा? इसके बारे में सोचिए। अब एक ईंट के विभिन्न दृश्यों को देखिए।



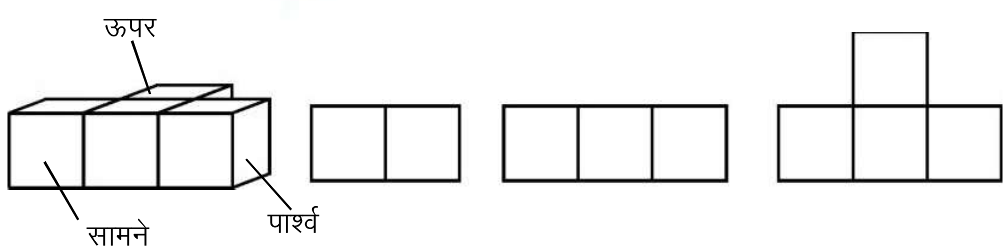
एक ईंट　　सामने से दृश्य　　पार्श्व दृश्य　　ऊपर से दृश्य

हम घनों को जोड़कर बनाई गई आकृतियों के भी विभिन्न दृश्य प्राप्त कर सकते हैं।

नीचे किसी आकार का सामने, पार्श्व व ऊपर का दृश्य दिया हुआ है–



तीन घनों का ठोस आकार　　पार्श्व दृश्य　　ऊपर से दृश्य　　सामने से दृश्य

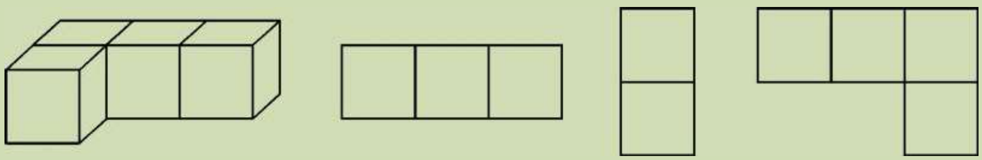


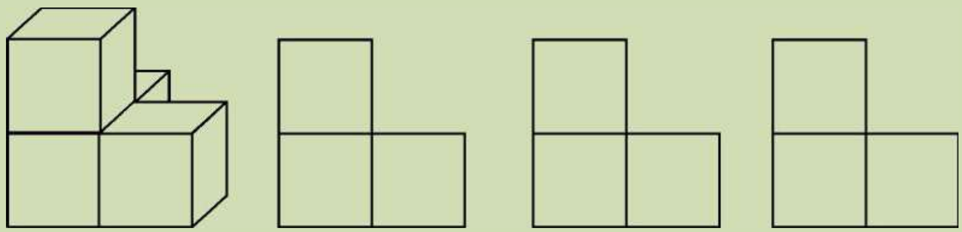
चार घनों से बना ठोस　　पार्श्व दृश्य　　सामने से दृश्य　　ऊपर से दृश्य

© BSTBPC WEB COPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्वयं करके देखिए

1. दिए हुए प्रत्येक ठोस के लिए ऊपर से दृश्य, सामने से दृश्य और पार्श्व दृश्य की पहचान कीजिए:

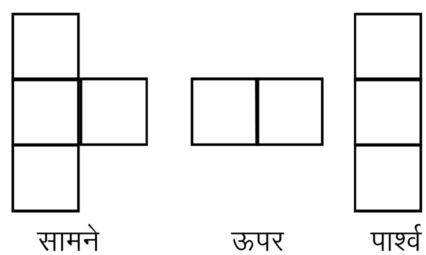




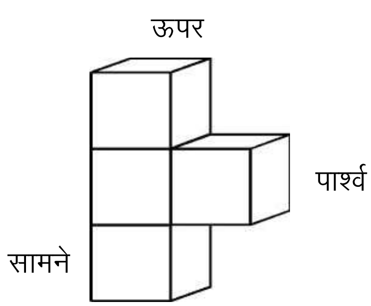
2. **इसे भी कीजिए**

   अपने आसपास की विभिन्न वस्तुओं को विभिन्न स्थितियों से देखिए। अपने मित्रों के साथ उनके विभिन्न दृश्यों की चर्चा कीजिए।

आप आकार को देखकर उसका सामने, ऊपर व पार्श्व का दृश्य बता सकते हैं। पर क्या आप इन दृश्यों से आकार बता पायेंगे?



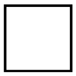
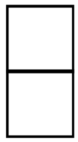
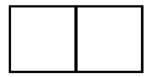
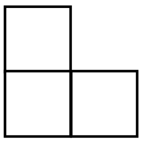
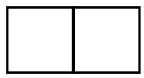
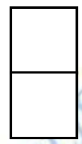
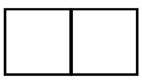
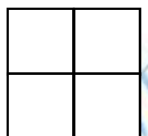
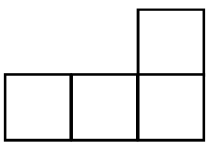
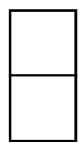
गोलू ने इन दृश्यों को कुछ इस तरह से जोड़ा–



अरे, यह तो चार घनों से मिलकर बनी आकृति है।

क्या गोलू ने सही आकार बनाया ______________________

आप भी इसी तरह नीचे दिए गए दृश्यों से आकार बनाइए?

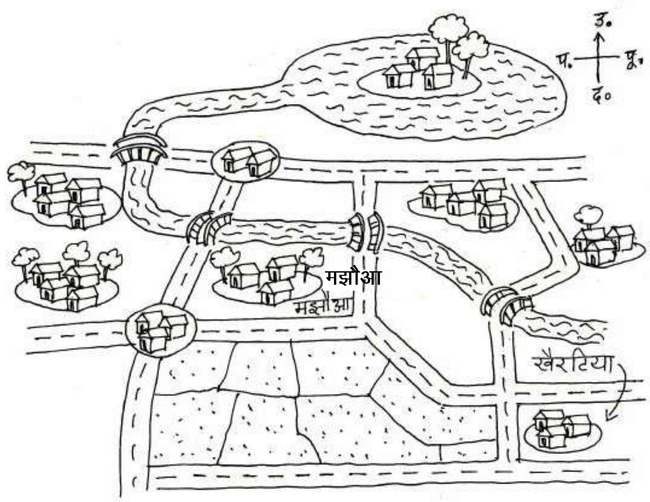
सामने के दृश्य	ऊपर के दृश्य	पार्श्व दृश्य	आकार
(1) 			
(2) 			
(3) 			
(4) 			

छुटकी की यात्रा

खैरटिया नाम के एक गाँव में छुटकी रहती है। उसकी मौसी कुछ दिनों से उसके गाँव आई हुई है। छुटकी को अपनी मौसी को लेकर अपनी नानी के गांव बउहरवा जाना है। पर पहले उसे अपने मामा के गाँव टिकुलिया जाकर उनको एक संदेश देना है। वापस खैरटिया आते समय उसकी मौसी अपनी सहेली मीना से मिलना चाहती है। मीना देवानटोला गाँव में रहती है। छुटकी को टिकुलिया और बउहरवा का रास्ता पता नहीं है। उसे बउहरवा से देवानटोला जाने का रास्ता भी नहीं पता है। बस उसे इतना याद है कि नानी के गाँव तक कोई सड़क जाती है। वहाँ नाव से जाना पड़ता है। चूँकि बउहरवा गाँव बड़े तालाब के एक टापू पर है। नानी के घर तक नाव से जाने में बड़ा मजा आता है।

छुटकी ने अपने पिताजी से इन गाँवों के रास्ते पूछे। उसके पिताजी ने ये नक्शा बनाया और उसे टिकुलिया, बउहरवा और देवानटोला पहुँचने के रास्ते समझाए। देवानटोला से वापस खैरटिया पहुँचने का रास्ता भी समझाया।

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED



खैरटिया के उत्तर में जानेवाली सड़क लो और सीधे चलते जाओ। करीब पौन घंटा चलने पर सिकरहना नदी मिलेगी। उस पर एक पुल है। पुल पार करने के बाद सड़क थोड़ा मुड़ेगी। सड़क के पूर्व में एक गाँव है। बँसवरिया। बँसवरिया से उसी सड़क पर आगे चलना। करीब डेढ़ घंटे बाद एक और सड़क मिलेगी जो पूर्व से पश्चिम की ओर जाती है। इस सड़क पर पश्चिम की ओर मुड़ जाना। आधे घंटे बाद सड़क के दक्षिण एक गाँव आएगा। यही टिकुलिया है। मामाजी को संदेश देकर थोड़ी देर आराम कर लेना। टिकुलिया से आगे पश्चिम की ओर जानेवाली सड़क पर चलना तो करीब एक घंटे बाद धूमनगर आएगा। इसे पार करके और पश्चिम में जाओगे तो एक और पुल मिलेगा। यह पुल भी उसी सिकरहना नदी पर बना है। पुल से पहले ही सड़क के उत्तर में नीचे उतरना। वहाँ तुम्हें नाव मिलेगी। मल्लाह से कहना तुम्हें बउहरवा जाना है। वह तुम से पाँच रुपए लेगा। करीब एक घंटे में तुम लोग बउहरवा पहुँच जाओगे।

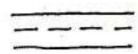
नानी के घर पर कुछ दिन रुक जाना। फिर वहाँ से नाव लेकर वापस आकर पुल पर उतर जाना। पुल तक पहुँचोगे तो पुल के पश्चिम में सुगाँव पड़ेगा। पर उस तरफ मत जाना। धूमनगर से दक्षिण की ओर चलना तो आधे घंटे पर एक और पुल आएगा। पुल पार करने के आधे घंटे बाद पहाड़पुर गाँव मिलेगा। पहाड़पुर से पश्चिम की ओर एक घंटा और चलोगे तो सड़क के उत्तर में देवानटोला गाँव मिलेगा। यहीं तुम्हारी मौसी की सहेली मीना रहती है। उसके यहाँ कुछ देर रुककर वापस घर के लिए निकल पड़ना।

देवानटोला से खैरटिया वापस आने के लिए देवानटोला से पूर्व की ओर चलना। रास्ते में पहाड़पुर आएगा। पहाड़पुर से और पूर्व में चलना। आधे घंटे बाद सड़क के उत्तर में मझौआ

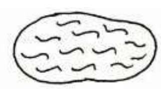
नाम का गाँव मिलेगा। मझौआ से करीब आधे घंटे पूर्व में और चलोगी तो एक और सड़क मिलेगी। सड़क के उस पार पूर्व में एक बरगद का पेड़ दिखाई देगा। इस सड़क पर दक्षिण की ओर मुड़ जाना। करीब एक घंटा और चलोगी तो एक चौराहा मिलेगा। बस चौराहे पर ही तुम खैरटिया पहचान लोगी।

छुटकी के पिताजी ने–

नक्शे पर गाँव ऐसे बनाए

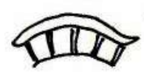
सड़क ऐसी बनाई 

नदी ऐसी बनाई

तालाब ऐसा बनाया 

खेत ऐसे बनाए

बरगद का पेड़ ऐसा बनाया

पुल ऐसे बनाया है 

उन्हें पढ़ना–लिखना नहीं आता था तो उन्होंने गाँव के नाम नहीं लिखे।

स्वयं करके देखिए

(1) छुटकी के पिताजी के निर्देश पढ़कर क्या आप सभी गाँवों के नाम नक्शे पर लिख सकते हो? खैरटिया नक्शे पर लिखा है। बाकी गाँव के नाम हैं– बँसवरिया, टिकुलिया, धूमनगर, बउहरवा, सुगाँव, पहाड़पुर, देवानटोला, मझौआ। नदी का नाम भी नक्शे पर लिखिए।

(2) छुटकी के पिताजी ने नक्शे पर कई चीजें बनाई हैं पर कई छूट भी गई हैं। आप इन्हें नक्शे में जोड़िए।

– टिकुलिया से धूमनगर जानेवाली सड़क के दक्षिण में दो खेत।

– धूमनगर से पहाड़पुर जानेवाली सड़क के पश्चिम में एक कुआँ।

(3) खैरटिया की किस दिशा में बँसवरिया है? ——————————

(4) धूमनगर की किस दिशा में टिकुलिया है? ———————————

(5) मझौआ की किस दिशा में पहाड़पुर है? ———————————

(6) बन्ने खाँ को पहाड़पुर से टिकुलिया जाना है। आप उसे जाने का रास्ता समझाइए।
————————————————————————————————
————————————————————————————————
————————————————————————————————

(7) छुटकी और उसकी मौसी को टिकुलिया पहुँचने में कितनी देर लगेगी?

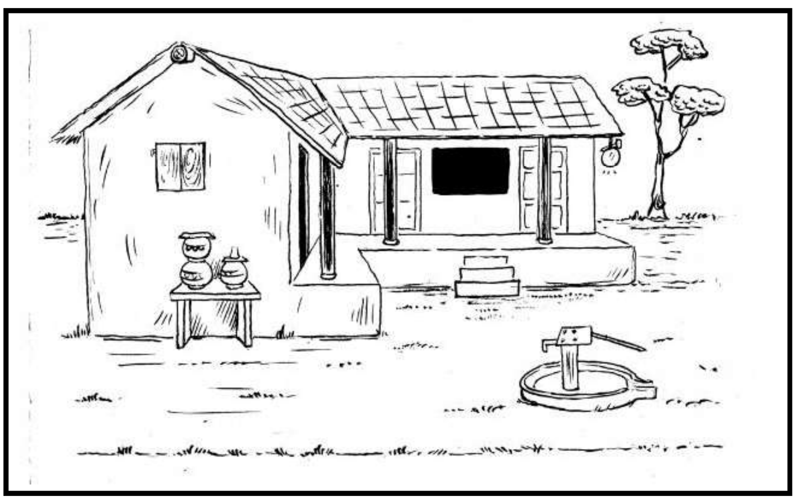
(8) टिकुलिया से बउहरवा पहुँचने में कितनी देर लगेगी? ———————————

(9) अपने गाँव का चित्रण कीजिए। घर, जंगल, नदी, खेत, सड़क आदि के लिए, आप अपनी संकेतावली बना सकते हैं। चित्र बनाते समय दिशा का ध्यान रखना मत भूलिएगा।

पैमाना

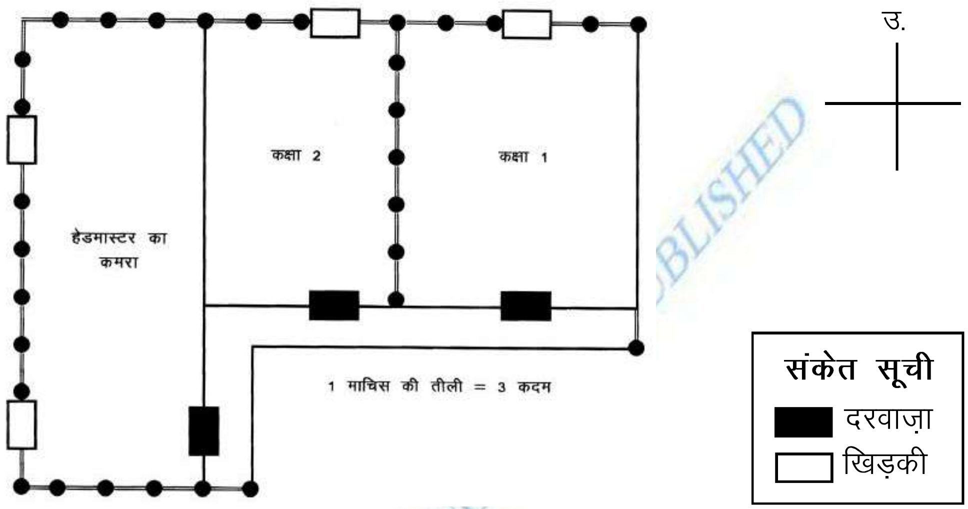
नक्शे बनाते समय हम इस बात का ध्यान रखते हैं कि कौन सी जगह कितनी बड़ी है। यहाँ हम समझने की कोशिश करेंगे कि हम ऐसा कैसे करते हैं।

गीता ने अपने स्कूल का चित्र बनाया है–



बाहर से एक स्कूल ऐसे दिखता है। इसमें एक बरामदा, दो कक्षाएँ और एक हेडमास्टर का कमरा है।

एक दिन गीता ने अपने स्कूल का नक्शा बनाया। नक्शा बनाते समय उसने इस बात का ध्यान रखा कि कौन सा कमरा कितना लम्बा है। कमरों की लम्बाई नापने के लिए गीता ने बहुत सारी माचिस की तीलियाँ इकट्ठी कर लीं। फिर तीनों कमरों को कदमों से चलकर नापा। दीवार जितने कदम लम्बी थी, उतनी तीलियाँ, उसने सीध में जमाकर रखीं। इस तरह उसने सभी कमरों की दीवारें बनाईं। ऐसे–



गीता से उसकी शिक्षिका ने पूछा, "तुमने नक्शा बनाते समय पैमाना क्यों लिया?"

गीता बोली, "नक्शा हमें किसी जगह का सटीक चित्रण देता है। इससे नक्शे को पढ़कर हम यह समझ सकते हैं कि वास्तव में वह जगह कितनी बड़ी है। एक बड़ी जगह की लम्बाई और चौड़ाई को पेपर में सटीकता से दिखाने के लिए मैंने एक तीली बराबर तीन कदम का पैमाना लेकर नक्शा बनाया।

स्वयं करके देखिए

(1) नक्शा देखकर वाक्य पूरे कीजिए–

कक्षा 1 —————— कदम लम्बी और —————— कदम चौड़ी है।

कक्षा 2 —————— कदम लम्बी है और —————— कदम चौड़ी है।

हेडमास्टर का कमरा —————— कदम लम्बा है और —————— कदम चौड़ा है।

बरामदा —————— कदम चौड़ा है।

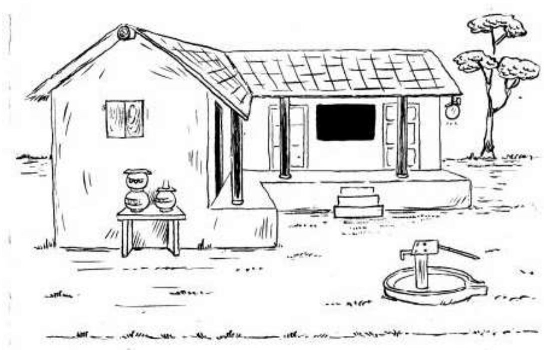
(2) (अ) स्कूल की कक्षाओं के कमरों के दरवाजे किस दिशा में खुलते हैं? ————————

(ब) हेडमास्टर के कमरे की खिड़कियाँ किस दिशा में खुलती हैं? ————————

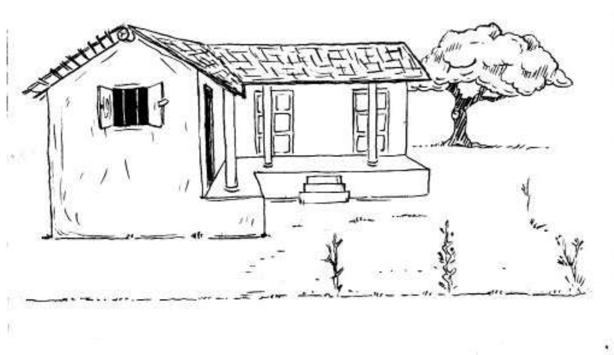
(3) अब आप अपने स्कूल का नक्शा बनाइए। नक्शा बनाते समय पैमाना और संकेत सूची बनाना ना भूलिएगा।

नक्शे और चित्रों में अन्तर

गीता ने अपने स्कूल का चित्र भी बनाया और नक्शा भी बनाया। दोनों एक ही जगह को दर्शा रहे हैं, पर दोनों में अंतर है। आइए नक्शे और चित्रों के बीच के अंतर को समझें–



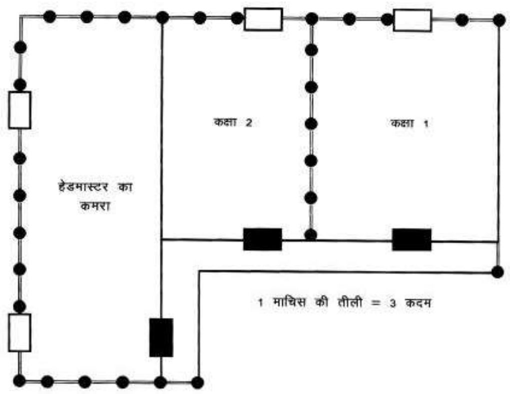
1. **बनाने वाले का नज़रिया**– यह ज़रूरी नहीं है कि जिस तरह से गीता ने अपने स्कूल का चित्र बनाया है, उसी तरह से उसके साथ पढ़नेवाली सहेली भी उसे दर्शाए। गीता ने अपने चित्र में स्कूल के बाहर टँगी, घंटी, बोर्ड, हैंडपम्प, मटके बनाए। उसने स्कूल की खिड़की के पल्ले बंद दर्शाए।



चित्र में क्या–क्या दर्शाया जाता है और उसे कैसे दर्शाया जाता है, यह चित्र को बनानेवाले पर निर्भर करेगा, उसके नजरिए पर निर्भर करेगा। गीता की सहेली को घंटी, हैंडपम्प, मटका आदि दर्शाना इतना महत्वपूर्ण नहीं लगा इसलिए उसने नहीं दर्शाया। **पर नक्शे में बनाने वाले के नजरिए की वजह से अंतर नहीं आता।** चाहे मैं नक्शा बनाऊँ या मेरी सहेली, दोनों के नक्शों को एक जैसा दिखना चाहिए। नक्शा बनाते समय, मनमाने अंतरों की अनुमति नहीं दी जाती है। पर यह जरूर है कि अलग–अलग लोग, अलग संकेतों का प्रयोग कर सकते हैं और अलग–अलग पैमाने के अनुसार नक्शे बना सकते हैं।

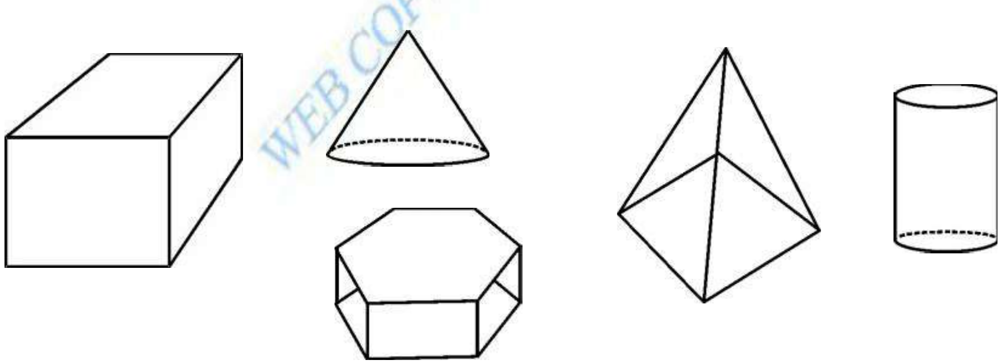
2. **नक्शा किसी पैमाने के आधार पर बना होता है।** गीता ने स्कूल के नक्शे में 1 माचिस की तीली = 3 कदम पैमाना लिया। अक्सर जिले अथवा गाँव, कस्बों के नक्शे में 1 सेमी. = ... किलोमीटर पैमाना लिया जाता है। पैमाना हमें यह बताता है कि नक्शे में दिखाई गई दूरी वास्तविक रूप में कितनी है। जितनी बड़ी जगह को हमें पेपर पर दिखाना होगा, उतनी ज़्यादा लम्बाई को एक इकाई, जैसे 1 सेंटीमीटर दर्शाएगी।

3. **जब गीता ने अपने स्कूल का चित्र बनाया तो जगह को ऐसे दर्शाया जैसे कि उसे वास्तविक रूप में दिखती थी। पर जब गीता ने अपने स्कूल का नक्शा बनाया तो इमारत नहीं बनाई पर स्कूल की जमीन का तल दर्शाया और दरवाजे, खिड़कियाँ दर्शाने के लिए उसने कुछ संकेतों का इस्तेमाल किया।**

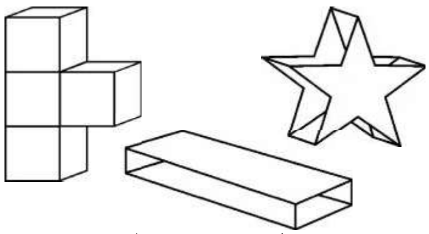


12.3 फलक, किनारे और शीर्ष

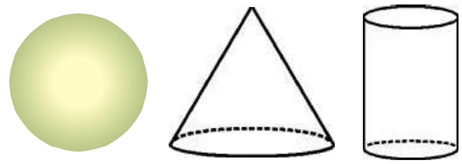
नीचे कुछ त्रिविमीय आकृतियाँ दी गई हैं, इनके शीर्ष, फलक और किनारों को पहचानिए।



उपर्युक्त ठोसों में से प्रत्येक ठोस बहुभुजीय क्षेत्रों से मिलकर बना है, जो उसके **फलक** कहलाते हैं। ये फलक जहाँ मिलते हैं किनारा कहलाते हैं, जो एक रेखाखंड होता है। किनारे जहाँ मिलते हैं, शीर्ष कहलाते हैं, जो एक बिन्दु होता है। ऐसे ठोस फलकों को बहुफलक या बहुफलकी कहते हैं?



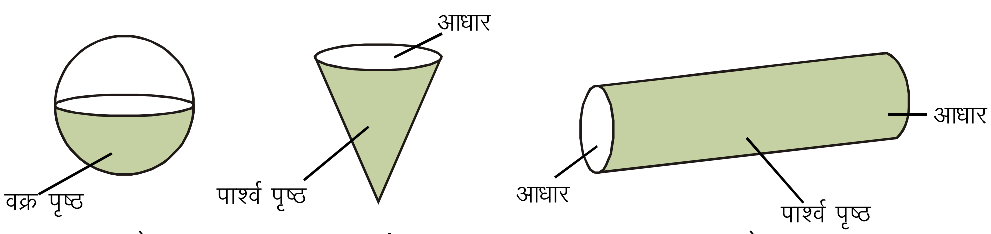
ये बहुफलक हैं।



ये बहुफलक नहीं हैं।

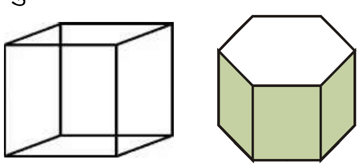
बहुफलक उन ठोसों से किस प्रकार अलग है जो बहुफलकीय नहीं है? सोचिए।

आपने ठीक सोचा? बहुफलकीय, बहुभुजावाले क्षेत्रों से मिलकर बने होते हैं। नीचे अबहुफलकीय आकृतियाँ दी गई हैं जिनसे आप परिचित हैं। क्या ये सरल रेखा से बनी हैं।

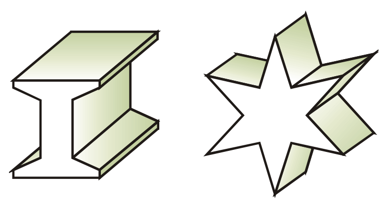


गोला शंकु बेलन

उत्तल बहुफलक : आपको उत्तल बहुभुज की अवधारणा के बारे में याद होगा। उत्तल बहुफलक की अवधारणा भी उसी प्रकार की है।

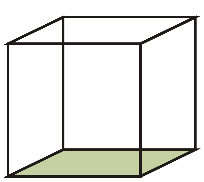


ये उत्तल बहुफलक हैं।

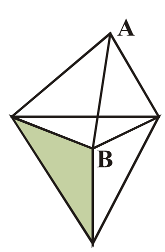


ये उत्तल बहुफलक नहीं हैं।

सम बहुफलक : एक बहुफलक तब सम बहुफलक कहलाता है जब उसके सभी फलक सर्वांगसम सम बहुभुजों से बने हों तथा प्रत्येक शीर्ष पर मिलनेवाले फलकों की संख्या समान हो।

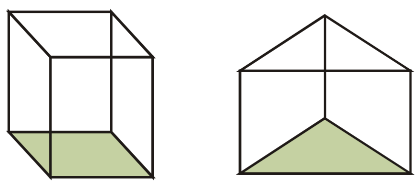


यह एक सम बहुफलक है। इसके सभी फलक सर्वांगसम समबहुभुज हैं। फलकों की समान संख्याओं से शीर्ष बनते हैं।

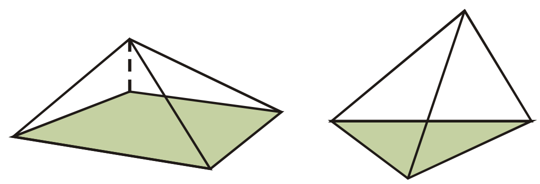


यह एक सम बहुफलक नहीं है। सभी फलक सर्वांगसम नहीं हैं व शीर्ष फलकों की समान संख्याओं से नहीं बनते हैं। A पर 3 फलक मिलते हैं, परंतु B पर 4 फलक मिलते हैं।

हमारे आस–पास बहुफलक परिवार में मिलनेवाले दो महत्त्वपूर्ण सदस्य प्रिज्म और पिरामिड हैं।



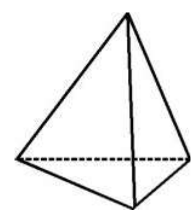
ये प्रिज्म हैं।



ये पिरामिड हैं।

हम कहते हैं कि एक बहुफलक प्रिज्म होता है, जब उसका आधार और ऊपरी सिरा सर्वांगसम बहुभुज हों तथा उसके अन्य फलक, अर्थात् पार्श्व फलक समांतर चतुर्भुजों के आकार के हों।

इसके दूसरी ओर, एक पिरामिड वह बहुफलक होता है जिसका आधार (कितनी भी भुजाओंवाला) एक बहुभुज होता है तथा इसके पार्श्व फलक एक शीर्षवाले त्रिभुज होते हैं (यदि आप एक बहुभुज के सभी कोनों या शीर्षों को एक ऐसे बिंदु से मिला दें जो उसके तल में न हो, तो आपको पिरामिड का एक मॉडल प्राप्त हो जाएगा।) करके देखिए।



स्वयं करके देखिए

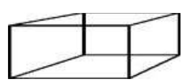
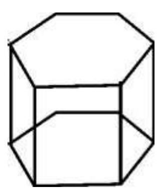
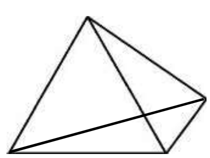
निम्नलिखित बहुफलकों के लिए फलकों, किनारों और शीर्षों की संख्याओं को सारणीबद्ध कीजिए : (यहाँ V शीर्षों की संख्या, F फलकों की संख्या तथा E किनारों की संख्या प्रदर्शित करता है।)

ठोस	F	V	E	F+V	E+2
घनाभ					
त्रिभुजाकार पिरामिड					
त्रिभुजाकार प्रिज्म					
वर्ग आधारवाला पिरामिड					
वर्ग आधारवाला प्रिज्म					

आप अंतिम दो स्तंभों से क्या निष्कर्ष निकालते हैं? क्या प्रत्येक स्थिति में आप $F+V = E+2$, अर्थात् $F+V - E = 2$ प्राप्त करते हैं? यह सबंध ऑयलर सूत्र कहलाता है। वास्तव में, यह सूत्र प्रत्येक बहुफलक के लिए सत्य है।

प्रश्नावली 12.1

1. **सारणी को पूरा कीजिए–**

आकार	फलकों की संख्या (F)	शीर्ष की संख्या (V)	किनारों की संख्या (E)	बहुफलक है या नहीं? (F+V-E=2)
				
				
				

2. आयलर सूत्र का प्रयोग करते हुए, अज्ञात संख्या को ज्ञात कीजिए।

फलक	5	18	?
शीर्ष	?	10	7
किनारे	9	?	14

3. (i) प्रिज्म और बेलन किस प्रकार एक जैसे हैं?

   (ii) पिरामिड और शंकु किस प्रकार एक जैसे हैं?

4. क्या किसी बहुफलक के 15 फलक, 10 किनारे और 20 शीर्ष हो सकते हैं? कारण दीजिए।

5. दी हुई वस्तुओं के सामने दृश्य, पार्श्व दृश्य और ऊपर से दृश्य खींचिए।

© BSTBPC WEB COPY, NOT TO BE PUBLISHED