अध्याय–16 संख्याओं के साथ खेलना
(PLAY WITH NUMBERS)

16.1 भूमिका

संख्या परिवार के अन्तर्गत प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं, पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं के बारे में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। आप संख्याओं के विस्तारित रूप के बारे में जानते हैं, आइए इससे जुड़ी अन्य अवधारणाओं को समझें।

व्यापक रूप में संख्याएँ

हम एक संख्या 75 लेते हैं और उसे निम्न रूप में लिखते हैं–

$75 = 10 \times 7 + 5$

इसी तरह संख्या 32 को इस प्रकार लिखा जा सकता है–

$32 = 10 \times 3 + 2$

यानी a और b से बनीं किसी दो अंकों की संख्या ab का अर्थ है :

$ab = 10 \times a + b = 10\,a + b$

यहाँ ab व ba संख्याओं को दर्शाते हैं न कि सरल गुणा को सरल गुणा में

सरल गुणा में, $6 \times 3 = 3 \times 6$

तब $a \times b = b \times a$

या $ab = ba$

परंतु संख्याओं में ab में a दहाई के स्थान पर है अतः

$ab = a \times 10 + b$ तथा $ba = 10 \times b + a = 10\,b + a$

अतः $a \times 10 + b \neq b \times a + 10$

अब हम तीन अंकों वाली संख्या 452 लेते हैं। इस संख्या को इस रूप में लिखा जा सकता है।

$452 = 4 \times 100 + 5 \times 10 + 2 = 400 + 50 + 2$

$378 = 3 \times 100 + 7 \times 10 + 8 = 300 + 70 + 8$

इसी तरह

अर्थात् ab और c से बनी तीन अंकों की संख्या को इस रूप में लिखा जा सकता है।

abc $= 100 \times a + 10 \times b + c$

$= 100\,a + 10\,b + c$

bca $= 100 \times b + 10 \times c + a$

$= 100\,b + 10\,c + a$

cab $= 100 \times c + 10 \times a + b$

$= 100\,c + 10\,a + b$

© BSTBPC WEB COPY, NOT TO BE PUBLISHED

प्रयास कीजिए

1. नीचे लिखे संख्याओं को व्यापक रूप में लिखें।

   (a) 75 (b) 89 (c) 135

   (d) 524 (e) acb

2. निम्न को सामान्य रूप में लिखें।

   (a) $10 \times 6 + 5$ (b) $100 \times 6 + 10 \times 8 + 3$ (c) $100c + 10a + b$

   यहाँ a b व c का मान दिया गया है।

   उसके अनुसार संख्या ज्ञात कीजिए।

   (1) $100c + 10a + b$ जब $a = 2, b = 9$ व $c = 2$ हो।

   (2) $100c + 10b + a$ जब $a = 0, b = 1, c = 4$

   (3) $100a + b$ जब $a = 2, b = 4$

16.2 अंकों को पलटना – दो अंकों को पलटना

ऋचा और श्रवण के बीच बातचीत :

ऋचा		श्रवण
दो अंकों की कोई संख्या लो	↔	ठीक है, दो अंकों की संख्या ले लिया, 78
जो संख्या लिया उसे पलट दो	↔	ठीक, मैं पलट दिया, 87 प्राप्त किया
पहले वाली संख्या और नयी संख्या को जोड़ो	↔	जोड़ लिया, 78 + 87 = 165 योगफल हुआ
अब योगफल में 11 से भाग दो	↔	भाग दे दिया 165 ÷ 11 = 15 प्राप्त हुआ
शेषफल शून्य प्राप्त होगा	↔	लेकिन तुम्हें यह कैसे मालूम हुआ

इसमें ऐसा हुआ कि श्रवण दो अंकों वाली संख्या 78 लिया। अंक को पलटने पर उसे 87 प्राप्त हुआ। दोनों को जोड़ने पर $78 + 87 = 165$ प्राप्त हुआ। अन्त में 11 से भाग देने पर $165 \div 11 = 15$ प्राप्त हुआ और शेष शून्य प्राप्त हुआ।

प्रयास कीजिए

जाँचकर पता करें कि श्रवण निम्न संख्याएँ चुनी होती तो परिणाम क्या प्राप्त होता?

(1) 28 (2) 42 (3) 75 (4) 18

आइए, ऋचा की चालाकी (Trick) को स्पष्ट करें। माना कि श्रवण ab संख्या चुनता है जो दो अंकों की संख्या है। इसका संक्षिप्त रूप $10a + b$ है।

अंकों को पलटने पर ba प्राप्त करता है अर्थात् $10b + a$ । दोनों संख्याओं को जोड़ने पर वह प्राप्त करता है।

$$(10a + b) + (10b + a) = 10a + b + 10b + a$$
$$= 11a + 11b$$
$$= 11(a + b)$$

अतः प्राप्त योग हमेशा 11 का एक गुणज (Multile) होता है। ध्यान दें, यदि हम योग में 11 से भाग दें, तो भागफल (a+b) प्राप्त होता है। यह भागफल चुनी गई संख्या ab के अंकों के योग के बराबर है। इस प्रकार दो अंकों वाली अन्य संख्याओं को लेकर सत्यता की जाँच कर सकते हो।

ऋचा और श्रवण खेल को आगे बढ़ाते हैं।

ऋचा– श्रवण, दो अंकों वाली कोई संख्या लो, परन्तु तुम मुझे नहीं बताना।

श्रवण– ठीक है।

ऋचा– अब अंकों को पलटकर बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाओ।

श्रवण– घटा लिया। अब क्या करें।

ऋचा– अब, जो घटाकर संख्या बचा है, उसमें 9 से भाग दो, शायद शेषफल शून्य प्राप्त होगा।

श्रवण ने संख्या 62 सोचा था, अंकों पलटने पर 26 प्राप्त हुआ। बड़ी संख्या में से घटाने पर $62 - 26 = 36$ प्राप्त हुआ और $36 \div 9$ भागफल और शेषफल शून्य प्राप्त हुआ।

प्रयास करें

श्रवण यदि निम्न संख्या सोचा होता तो क्या परिणाम प्राप्त होता?

(1) 27 (2) 23 (3) (4) 36

ऐसा कैसे हो जाता है, श्रवण सोचने लगा।

मान लिया कि वह दो अंकों की संख्या $ab = 10a + b$ चुनता है। अंकों के पलटने पर संख्या $ba = 10b + a$ प्राप्त होता है। अतः ऋचा उसे बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाने को कहती है।

यदि दहाई का अंक इकाई से बड़ा हो तो वह इस प्रकार घटाता है,

अर्थात् $(a > b)$

$(10a + b) - (10b + a)$

$= 10a + b - 10b - a$

$= 9a - 9b$

$= 9(a - b)$

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

यदि इकाई का अंक दहाई के अंक से बड़ा है अर्थात् $(b > a)$ तब $9(b-a)$

जब $a = b$ है, तो वह 0 (शून्य) प्राप्त करता है।

प्रत्येक स्थिति में परिणामी संख्या 9 से विभाज्य होगा। और शेषफल 0 (शून्य) होगा। हम यदि परिणामी संख्या को 9 से भाग देते हैं तो हमें $a > b$ या $a < b$ के अनुसार $(a - b)$ या $(b - a)$ प्राप्त होता है। इस प्रकार कोई भी अन्य दो अंकों की संख्याएँ लेकर उपरोक्त तथ्य की जाँच कर सकते हैं।

16.3 अंकों को पलटना – तीन अंकों की संख्या

श्रवण– ऋचा एक तीन अंकों की कोई संख्या सोचो।

ऋचा– ठीक है, सोच लिया। (ऋचा ने 345 चुना)

श्रवण– अब इन अंकों को उलटे क्रम में लेकर, एक नयी संख्या बनाओ और बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटाओ।

ऋचा– ठीक है, घटा लिया अब क्या करें। $(543 - 345 = 198)$

श्रवण– अब परिणामी संख्या में 99 से भाग दो, निश्चित रूप से शेषफल 0 (शून्य) होगा।

प्रयास कीजिए

जाँच करें कि यदि ऋचा निम्नलिखित संख्याएँ चुनी होती तो परिणाम क्या प्राप्त होता?

(i) 231 (ii) 694 (iii) 636 (iv) 801

आओ देखें कि श्रवण की यह चलाकी कैसे कार्य करती है।

मान लीजिए कि ऋचा ने तीन अंकों की संख्या चुनी $abc = 100a + 10b + c$ अंकों को पलटने पर वह संख्या $= cba = 100c + 10b + a$ प्राप्त करती है।

– यदि $a > c$ है तो संख्याओं का अंतर होगा।

$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$
$= 99a - 99c = 99(a-c)$

– यदि $c > a$ है तो संख्याओं का अंतर होगा $99(c - a)$

यदि $a = c$ है तो अंतर 0 (शून्य) है। आप अन्य तीन अंकों की संख्याएँ लेकर इसी तथ्य पर जाँच कर सकते हो।

(iii) किन्हीं तीन अंकों से तीन अंकों की संख्याएँ बनाना

श्रवण– ऋचा, तीन अंकों की कोई एक संख्या मन में सोचो।

ऋचा– सोच लिया– 456

श्रवण– अब संख्या के उन्हीं अंकों का प्रयोग कर दो अन्य तीन अंकों की संख्या इस तरह बनाओ।

ऋचा– बना लिया (564 एवं 645)

श्रवण– अब इन संख्याओं को जोड़ो तथा प्राप्त संख्याओं को 37 से भाग दो। निश्चित रूप से शेषफल 0 (शून्य) होगा।

श्रवण– तुम ठीक कहते हो, सचमुच में शेषफल शून्य आया।

$$\begin{array}{r} 456 \\ 645 \\ 564 \\ \hline 1665 \\ \hline \end{array}$$

श्रवण के कहे अनुसार ऋचा ने किया।

परिणामी संख्या 1665 को 37 से भाग दिया।

$1665 \div 37 = 45$ शेषफल शून्य (0) प्राप्त हुआ।

© DSTBPC WEB COPY, NOT TO BE PUBLISHED

तीन अंकों 4, 5, और 6 का एक बार प्रयोग करके तीन अंकों वाली सभी संभव संख्याएँ बनाएँ तथा इन्हें योग ज्ञात कर जाँच कीजिए कि क्या यह योग 37 से विभाज्य है। क्या यह संख्या abc के तीनों अंकों a, b और c से बनी सभी संख्याओं के योग के लिए सत्य है।

प्रयास कीजिए

श्रवण ने यदि निम्नलिखित संख्याएं चुनी होती तो परिणाम क्या प्राप्त होता?

(1) 418 (2) 634 (3) 137 (4) 872

क्या यह चालाकी हमेशा कार्य करती है?

$abc = 100a + 10b + c$

$cab = 100c + 10a + b$

$bca = 100b + 10c + a$

$abc + cab + bca = 111\,(a + b + c)$

$= 37 \times 3\,(a + b + c)$ जो 3 से विभाज्य है।

16.4 अंकों के लिए अक्षर

कुछ ऐसी पहेलियाँ हैं जहाँ अंकों के स्थान पर अक्षर होते हैं। इस पहेली के अन्तर्गत समस्या यह होती है कि कौन–सा अक्षर किस अंक को दर्शाता है। अतः यह एक प्रकार से कोड (code) को हल करने जैसी समस्या है। इन पहेलियों के अन्तर्गत योग और गुणन की समस्याओं तक सीमित रहेंगे। ऐसी पहेलियों को हल करते समय निम्न दो नियमों का पालन करेंगें :

1. पहेली में प्रत्येक अक्षर से केवल एक ही अंक को प्रदर्शित हो तथा एक अंक से केवल एक ही अक्षर प्रदर्शित किया जाए।
2. किसी संख्या का पहला अंक शून्य नहीं हो सकता।
3. एक पहेली का एक ही उत्तर हो।

निम्नांकित योग में p ज्ञात कीजिए।

उदाहरण–1

$$\begin{array}{r} 41P \\ +1P3 \\ \hline 601 \\ \hline \end{array}$$

हल– यहाँ केवल एक अक्षर P है, जिसका हमें मान ज्ञात करना है। इकाई स्तम्भ का अध्ययन कीजिए $P + 3$ से हमें 1 प्राप्त होता है अर्थात् इकाई का अंक 1 हो ऐसा होने के लिए P का मान निश्चित रूप से 8 होना चाहिए।

P का मान बैठकर हल करने पर

$$\begin{array}{r} 418 \\ +183 \\ \hline 601 \end{array}$$

अर्थात् $P = 8$

उदाहरण–2 निम्नलिखित योग में P और Q का मान ज्ञात करें।

$$\begin{array}{r} P \\ +P \\ +P \\ \hline QP \end{array}$$

हल– इसमें दो अक्षर P और Q हैं जिनके मान ज्ञात किए जाने हैं। ध्यान देने की आवश्यकता है कि तीन P का योग एक ऐसी संख्या है जिसकी इकाई का अंक P है। अतः दो P का योग एक ऐसी संख्या होनी चाहिए जिसकी इकाई का अंक 0 (शून्य) हो। यह तभी होगा जब $P = 0$ हो या $P = 5$ हो।

यदि $P = 0$ है तो योग $0 + 0 + 0 = 0$ होगा जिसमें $Q = 0$ हो जाएगा। हम इसे नहीं मानेंगे। क्योंकि $P = Q$ हो जाएगा और QP के दहाई का अंक भी 0 (शून्य) हो जाएगा। अतः इसे हम छोड़ देंगे इसलिए $P = 5$ है।

पहेली का हल :

$$\begin{array}{r} 5 \\ +5 \\ 5 \\ \hline 15 \end{array}$$

अर्थात् P = 5 और Q = 1 होगा।

उदाहरण–3 A और B को ज्ञात करें–

$$\begin{array}{r} B\ 3 \\ \times\ B\ A \\ \hline 57\ A \end{array}$$

हल : उपर्युक्त पहेली में भी दो अक्षर A और B है जिनका मान ज्ञात करना है।

57A का इकाई अंक A है, अतः A = 0 या A = 5 है।

अब B को देखते हैं यदि B=1 हो तो BA×B3 का मान अधिक से अधिक 19×19, 361 होगा परन्तु यहाँ गुणनफल 57A है जो जो 500 से अधिक है। अतः B = 1 नहीं हो सकता।

यदि B =3 हो तो BA×B3 का गुणनफल 3×3 से अधिक होगा यानी यह 900 से अधिक होगा किन्तु 57A का मान 600 से कम है। अतः B = 3 नहीं होगा। उपर्युक्त मानों से पता चलता है कि B का मान केवल 2 हो सकता है।

$$\boxed{\begin{array}{r} BA \\ \times B5 \end{array}} \quad \begin{array}{r} 23 \\ = 25 \\ \hline 575 \end{array}$$

अतः A = 3 और B = 2 है।

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली 16.1

उचित संख्या से खाली जगहों को भरें–

(1) (i) $\begin{array}{r} 6... \\ +\ 28 \\ \hline ...2 \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 7..... \\ +\ 5\ \ 4 \\ \hline .....0 \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 3\ ....8 \\ +2\ 6..... \\ \hline ....3 \end{array}$

(iv) $\begin{array}{r} 8 \\ \times.... \\ \hline 0 \end{array}$ (v) $\begin{array}{r} 9 \\ \times.... \\ \hline .....5 \end{array}$

(2) A, B, C के मान ज्ञात करें–

(i)
$$\begin{array}{r} AB \\ \times\ 6 \\ \hline BBB \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} C2 \\ +2B \\ \hline B0 \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{r} 4BA \\ +2B1 \\ \hline \ldots 84 \end{array}$$

खेलने का प्रयास करें–

निम्न संख्याओं को 100a + 10b + c के रूप में व्यक्त कीजिए।

1. (1) 876 (2) 556 (3) 89 (4) 270 (5) 813
2. कोई भी तीन अंक लें। इन तीन अंकों से जितनी भी संख्याएँ बन सकती हैं बनाएँ, फिर सभी को जोड़कर (i) योगफल प्राप्त करें, (ii) बढ़ते एवं घटते क्रम में लिखें।

नौ घर वाले जादू का घर भरने के लिए क्रियाकलाप :

H	E	B	C	I	G	F	A	D

प्रथम चरण

A	B	C
H	I	D
G	F	E

द्वितीय चरण

तृतीय चरण

प्रथम चरण के खाने में H के नीचे कोई एक संख्या लिखें फिर उससे शुरू करते हुए लगातार संख्या D तक लिखें जैसे, पहले चरण के खाने में H के नीचे 3 लिख कर D तक 11 लिखेंगे। इस प्रकार H = 3, E = 4, B = 5, C = 6, I = 7, G = 8, F = 9, A = 10, D = 11 हुआ। अब H, E, B, C, I, G, A, D के इस मान का चरण–2 के खाने के अनुसार चरण तीन में भरें। तब A की जगह 10, B की जगह आदि–आदि 9 घरों को भरें तब चारों तरफ योगफल समान प्राप्त होगा।

उदाहरण–

H	E	B	C	I	G	F	A	D
3	4	5	6	7	8	9	10	11

A	B	C
H	I	D
G	F	E

	10	5	6	21
	3	7	11	21
	8	9	4	
21	21	21	21	21

अब आप स्वयं अंक लेकर सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

सलमा और महेश आपस में अंकों का खेल खेलना चाहते हैं।

सलमा– महेश, तुम कोई चार अंकों की संख्या लो।

महेश– ले लिया 3128

सलमा– मैं और कुछ अंक लेने को कहूँगी और जो योगफल प्राप्त होगा वह मैं पहले ही तुम्हें बता देना चाहती हूँ।

महेश– ठीक है बताओ।

सलमा– महेश 13127 लिखो।

सलमा– महेश, रंजन से चार अंकों वाली एक संख्या मांग लो।

महेश– माँग लिया, 2125

सलमा– अब मैं तुम्हें चार अंकों वाली संख्या देती हूँ– 7874

महेश– तीनों को जोड़ो–

$$\begin{array}{r} 3128 \\ 2125 \\ +7874 \\ \hline 13127 \\ \hline \end{array}$$

सलमा– महेश, मजेदार है न।

© BSTBPC
WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

सलमा की चालाकी क्या थी? सलमा की दी हुई संख्या और रंजन द्वारा की गई संख्या के इकाई + दहाई + सैकड़ा + हजार के अंकों का योग 9 होना चाहिए। अंकों का योग 9 होता है।

सलमा द्वारा योगफल पहले कैसे बता दी? महेश द्वारा ली गई संख्या 3128 है, सलमा इकाई अंक 8 में से 1 घटा दी और सभी अंकों को ज्यों का त्यों लिखवा दी साथ 1 जो घटायी उसे बायीं और अन्त में बैठा दी यानि दस हजार के स्थान पर 1 इस प्रकार नयी संख्या 13127 बनी जो योगफल प्राप्त होने वाला था। यदि इकाई, दहाई, सैकड़ा का अंक शून्य हो तो बगल से उधार लेकर घटा लें और बगल वाला अंक जो शेष बचता है उसे लिख दें।

इस प्रकार अपने साथियों के साथ मिलकर योगफल का खेल खेलो।

प्रश्नावली 16.2

1. प्राकृत संख्या की सबसे छोटी संख्या और पूर्ण संख्या की सबसे छोटी संख्या का अन्तर लिखें।

2. –14 और –13 दोनों में बड़ी संख्या कौन है?

3. $(9)^2 = 90 - 9 = 81$

   $(99)^2 = 9900 - 99 = 9801$

   $(999)^2 = 999000 - 999 = 998001$

   $(9999)^2 =$ .... – .... =

   $(99999)^2 =$.................... – .... =

4. $\frac{1}{10}$ का आधा कितना होगा?