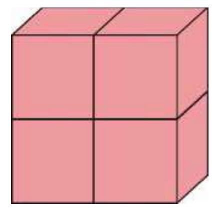
अध्याय - 6

घन और घनमूल
(CUBE AND CUBE ROOT)

6.1 भूमिका



आकृति 6.1

सामने घन का चित्र दिया गया है। घन की सभी भुजाएं आपस में बराबर होती है और घन का आयतन = भुजा × भुजा × भुजा होता है। यदि आपके पास 1 सेमी के घन हो तो बताइए 2 सेमी. भुजा वाला एक घन 1 सेमी भुजा वाले कितने घनों से बनेगा?

सीमा ने इसे करने के लिए 1 सेमी. घनों को इस प्रकार जमाया आकृति 6.1 ।

अब सोचिए 1 सेमी. भुजा वाले कितने घनों से 3 सेमी. भुजा वाला एक घन बनेगा?

इसे आप आयतन भुजा × भुजा × भुजा में भुजा = 3 रखकर भी निकाल सकते हैं। घन के आयतन के अलावा भी जब हम किसी संख्या को स्वयं से तीन बार गुणा करते हैं तो प्राप्त संख्या को हम घन संख्या कहते है। जैसे– कोई संख्या a के लिए घन $a \times a \times a$ इसे हम a^3 से भी व्यक्त करते हैं।

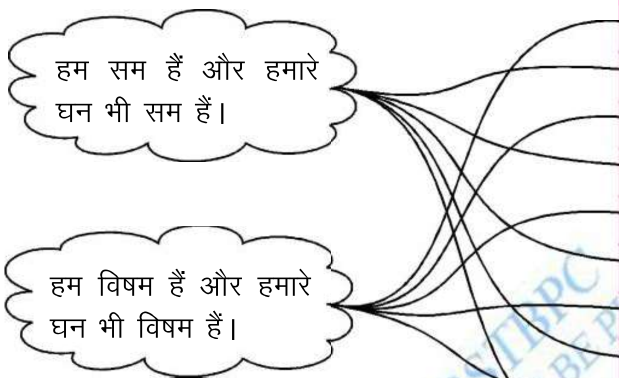
क्या संख्याएं 729, 1000, 1728 भी एक पूर्ण घन है?

संख्याएं 1, 8, 27, 64, ... पर विचार करें। ये पूर्ण घन (Perfect Cubes) या पूर्ण घन संख्याएं (Perfect Cube Numbers) कहलाती है।

$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ है, इसलिए 216 एक घन संख्या है। क्या 49 एक घन संख्या है? सोचिए 49 के धन होने के लिए एक ऐसी प्राकृत संख्या संख्या होना जरूरी है जिसे तीन बार स्वयं से गुणा करने पर 49 प्राप्त हो। नहीं क्योंकि $49 = 7 \times 7$ है। और ऐसी कोई प्राकृत संख्या नहीं है, जिसे स्वयं से तीन बार गुणा करने पर 49 प्राप्त हो। हम जानते हैं कि $3 \times 3 \times 3 = 27$ और $4 \times 4 \times 4 = 64$ है। इससे यह प्रदर्शित होता है 27 से 64 के बीच कोई घन संख्या नहीं है अतः 49 एक पूर्ण घन नहीं है। नीचे 1 से 10 तक की संख्याओं के घन दिए गये हैं:

संख्याएं	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
घन संख्या	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3
संख्यात्मक मान	1	8	27	64	125	....	....	....	....	1000

यहां हम देखते हैं कि 1 से 1000 तक केवल दस पूर्ण घन है। 1 से 100 तक कितने पूर्ण घन है? सम संख्याओं के घनों को देखें। क्या ये सभी सम हैं? आप विषम संख्याओं के घनों के बारे में क्या कह सकते हैं? अब 11 से 20 तक की संख्याओं के घन नीचे दिए जाते हैं।

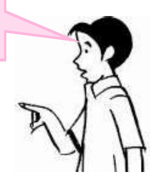


संख्याएं	घन
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

अब निम्न सारणी की संख्याओं पर विचार करें–

संख्याएं	घन
1	$1^3 = 1$
11	$11^3 = 1331$
21	$21^3 =$ ....
31	$31^3 =$ ....
41	.... = ...
51	.... = ...
61	.... = ...

सोचिए, 1 इकाई अंक वाली संख्याओं के घनों में सदैव 1 ही इकाई अंक क्यों होता है?



उपर्युक्त सारणी को देखकर बताइए संख्याएँ जिसकी इकाई का अंक 1 है, के घन के इकाई के अंक क्या है? ....

क्या आपको कोई प्रतिरूप (पैटर्न) मिलता है? ....

2, 12, 22 के घनों का इकाई अंक सदैव 8 ही होगा। इसी प्रकार 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 के इकाई अंकों वाली संख्याओं के पैटर्न खोजकर लिखिए। ....

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के घन के इकाई का अंक ज्ञात करें–

(i) 543 (ii) 8765 (iii) 43254 (iv) 5321

(v) 321456 (vi) 3257 (vii) 876549

6.2.1 कुछ रोचक प्रतिरूप

1. क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़ना

निम्नलिखित प्रतिरूपों को देखिए:

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$

इस प्रतिरूप को आगे बढ़ाइए– ....

2 के घन में व उसके पैटर्न 3 + 5 की प्रथम विषम संख्या 3 के बीच में क्या आपको कोई प्रतिरूप दिखता है? ....

इसी प्रकार 3 के घन व उसके पैटर्न 7 + 9 + 11 की प्रथम विषम संख्या 7 के बीच आपको कोई प्रतिरूप दिखता है?

आपने ठीक ढूंढा– $2 \times 1 + 1 = 3$

$3 \times 2 + 1 = 7$

प्रत्येक संख्या के घन के लिए प्रथम विषम संख्या स्वयं से एक कम से गुणा व एक जोड़ से शुरू होती है। इस प्रकार इस प्रतिरूप से हमें किसी भी संख्या का घन, विषम संख्याओं के योगफल द्वारा निकालने में सुविधा होगी।

स्वयं करके देखिए

10^3 प्राप्त करने के लिए कितनी क्रमागत विषम संख्याओं की आवश्यकता होगी? व ये संख्याएं किस विषम संख्या से शुरू होगी।

निम्नलिखित घन संख्याओं को विषम संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त करें:

(i) 5^3 (ii) 7^3 (iii) 9^3 (iv) 11^3

2. निम्नलिखित को ध्यान से देखें :

संख्याएं	अभाज्य गुणनखंडन	घन सं.	अभाज्य गुणनखंडन
4	2×2	4^3	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
6	2×3	6^3	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
8	$2 \times 2 \times 2$	8^3	$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3$
15	3×5	15^3	$3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$

सारणी से स्पष्ट है कि एक संख्या का प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड उस संख्या के घन के अभाज्य गुणनखंडन में तीन बार आता है।

यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में प्रत्येक गुणनखंड तीन बार आता है, तो क्या वह संख्या एक पूर्ण घन होती है? इसके बारे में सोचिए।

उदाहरण–1. क्या 512 एक पूर्ण घन है?

हल : 512 का गुणनखंडन करने पर

$512 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2}$

हाँ, 512 एक पूर्ण घन है, क्योंकि गुणनखंडों को तीन–तीन के समूह बनाए जा सकते हैं।

2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

उदाहरण–2. क्या 600 पूर्ण घन है?

हल : 600 का गुणनखंड करने पर

$600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

इनके अभाज्य गुणनखंड में तीन–तीन का समूह सिर्फ 2 का है, 3 और 5 का नहीं।

अतः 600 एक पूर्ण घन नहीं है।

2	600
2	300
2	150
2	75
5	25
5	5
	1

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित में से कौन–सी संख्याएं पूर्ण घन हैं?

(i) 216	(ii) 8000	(iii) 800	(iv) 15625
(v) 2025	(vi) 1000	(vii) 625	(viii) 343

उदाहरण–3. क्या 500 एक पूर्ण घन है? यदि नहीं, तो ऐसी सबसे छोटी प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 500 को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए।

हल : $500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

इनमें 2 तीन के समूह में नहीं आ रहा है।

अतः 500 एक पूर्ण घन नहीं है। इसे पूर्ण घन संख्या बनाने के लिए एक और 2 की आवश्यकता है। इस स्थिति में $500 \times 2 = \underline{2\times2\times2}\times\underline{5\times5\times5}=1000$ जो एक पूर्ण घन है।

अतः अभीष्ट संख्या = 2 है।

2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

उदाहरण–4. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे 23625 में भाग देने पर भागफल पूर्ण घन बन जाए।

हल : $23625 = \underline{3\times3\times3}\times\underline{5\times5\times5}\times7$

यहां 23625 के गुणनखंडों में 7 तीन के समूह में नहीं हैं। अतः इनमें 7 से भाग देने पर भागफल पूर्ण घन प्राप्त होगा।

इसलिए अभीष्ट संख्या = 7 है।

3	23625
3	7875
3	2625
5	875
5	175
5	35
7	7
	1

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखित में से कौनसी संख्याएं पूर्ण घन नहीं हैं–

(i)	400	(ii)	342	(iii)	68600	(iv)	2744
(v)	800	(vi)	46656	(vii)	408375	(viii)	9000

2. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात करें जिसे निम्नलिखित संख्याओं से गुणा करने पर पूर्ण घन प्राप्त हो जाए–

(i) 320 (ii) 243 (iii) 675 (iv) 432

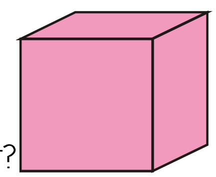
3. वह छोटी सी छोटी संख्या ज्ञात करें जिसे निम्नलिखित संख्याओं से भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाएः

(i) 256 (ii) 3125 (iii) 1408 (iv) 192

4. निम्नलिखित घन संख्या को उसके क्रमागत विषम संख्याओं के योग के रूप में लिखेंः

(i) 2^3 (ii) 4^3 (iii) 5^3 (iv) 8^3

6.3 घनमूल (Cuberoot)



निम्न स्थिति का अध्ययन करें–

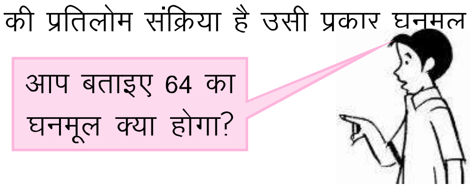
यदि घन का आयतन 125 सेमी.^{3} है तो घन की भुजा क्या होगी?

हम जानते हैं कि घन का आयतन = भुजा^{3} होता है। यदि हम भुजा की लम्बाई का मान a लेते हैं, तब $a^3 = 125$, भुजा की लम्बाई ज्ञात करने के लिए आवश्यक है कि एक ऐसी संख्या ज्ञात करें जिसका घन 125 है।

उपर्युक्त स्थिति में हमें एक संख्या की आवश्यकता है, जिसका घन ज्ञात है। उस संख्या को घनमूल के रूप में जाना जाता है।

घनमूल ज्ञात करना

जैसा कि हम जानते हैं कि वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है उसी प्रकार घनमूल घन की प्रतिलोम संक्रिया है। अतः



$2^3 = 8$, अतः 8 का घनमूल 2 है।

$3^3 = 27$, अतः 27 का घनमूल 3 है।

घनमूल का सांकेतिक रूप में "$\sqrt[3]{\ }$" लिखते हैं।

अतः उपर्युक्त कथन को हम निम्नलिखित प्रकार से लिख सकते हैं, जैसे–

$1^3 = 1$ अतः $\sqrt[3]{1} = 1$

$2^3 = 8$ अतः $\sqrt[3]{8} = 2$

$3^3 = 27$ अतः $\sqrt[3]{27} = 3$

$4^3 = 64$ अतः $\sqrt[3]{64} = 8$

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल बताइए–

(i) 8 (ii) 27 (iii) 64

(iv) 512 (v) 729

6.3.1 अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा घनमूल

2	2744
2	1372
2	686
2	343
5	49
7	7
	1

उदाहरण–5. 2744 का घनमूल अभाज्य गुणनखंडन द्वारा करें।

हल : 2744 $= \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7}$

$= 2^3 \times 7^3 = (2 \times 7)^3$

$\therefore \sqrt[3]{2744} = \sqrt[3]{(2 \times 7)^3}$

$= 2 \times 7 = 14$

2	27000
2	13500
2	6750
3	3375
3	1125
3	375
5	125
5	25
5	5
	1

उदाहरण–6. 270000 का घनमूल ज्ञात करें।

हल : $27000 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

$2700 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3 = (2 \times 3 \times 5)^3$

$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{(2 \times 3 \times 5)^3} = 2 \times 3 \times 5 = 30$

उदाहरण–7. वह छोटी सी छोटी संख्या ज्ञात करें जिससे 256 को गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल एक पूर्ण घन संख्या बन जाए। इस प्रकार प्राप्त घन संख्या का घन मूल ज्ञात करें।

हल : $256 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 2 \times 2$

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

यहां 256 के अभाज्य गुणनखंडों में 2 से तीन–तीन के दो समूह बन रहे हैं। लेकिन तीसरा समूह नहीं बन रहा। अतः स्पष्ट है कि दी गई संख्या में 2 से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल एक घन संख्या होगी। अतः अभीष्ट संख्या = 2 होगी।

अब प्राप्त पूर्ण घन संख्या $= 256 \times 2$

$= 512$

अतः घनमूल $= \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3}$

$= 2 \times 2 \times 2 = 8$

उदाहरण–8. वह छोटी सी छोटी संख्या ज्ञात करें जिससे 8019 को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण घन बन जाए। इस प्रकार से प्राप्त घन संख्या का घनमूल भी ज्ञात करें।

हल : $\sqrt[3]{8019} = \sqrt[3]{\underline{3\times3\times3}\times\underline{3\times3\times3}\times11}$

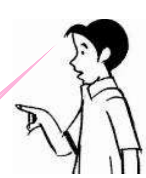
3	8019
3	2673
3	891
3	297
3	99
3	33
11	11
	1

यहां 8019 के अभाज्य गुणनखंडन में 11 तीन–तीन के समूह में नहीं है अतः उक्त संख्या में 11 से भाग देने पर प्राप्त भागफल एक घन संख्या होगी।

अतः अभीष्ट संख्या = 11

और इस प्रकार से प्राप्त घन संख्या = 8019 ÷ 11 = 729

729 का घनमूल $= 3 \times 3 = 9$



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :–

किसी घन पूर्णांक m के लिए $m^2 < m^3$ होता है। क्यों?

6.3.2 किसी घन संख्या का घनमूल आकलन द्वारा ज्ञात करना :

मान लिया कि एक घन संख्या 110592 लेते हैं। इस संख्या का घनमूल हम अनुमान विधि द्वारा निम्नलिखित तरीके से ज्ञात कर सकते हैं–

नीचे दी गई तालिका को पूरा करो–

$1^3 = 1$	$10^3 = 1000$
$2^3 = 8$	$20^3 = 8000$
$3^3 = 27$	$30^3 = 27000$
$4^3 = 64$	$40^3 = 64000$
$5^3 =$	$50^3 = 125000$
$6^3 =$	$60^3 =$
$7^3 =$	$70^3 =$
$8^3 =$	$80^3 =$
$9^3 =$	$90^3 =$
अ	ब

उक्त तालिका देखकर क्या आप बता सकते हैं 110592 का घनमूल किन दो संख्या के बीच हो सकता है? क्या यह 20 व 30 के बीच हो सकता है? ऊपर तालिका से 20 व 30 के घन को देखें। आपने देखा कि 30 का घन 27000 है 110592 इससे बड़ा है। 40 का घन 64000 व 50 का घन 1,25000 है अतः संख्या 110592 का घनमूल निश्चित रूप से 40 व 50 के बीच में होगा 40 व 50 के बीच में संख्याएं 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47 व 48, 49 है।

पुनः तालिका 'अ' देखिए किसके घन में इकाई का अंक 2 है।

केवल 8 के घन में इकाई का अंक 2 है अतः यदि 110592 एक पूर्ण घन संख्या है तो इसका घनमूल 48 होगा। चलो जांच लेते हैं।

$= 48 \times 48 \times 48$

$= 2304 \times 48 = 110592$

स्वयं करके देखिए

79507 का घनमूल आकलन द्वारा ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक संख्या का घनमूल अभाज्य गुणनखंडन विधि से ज्ञात करें।

(i)	125	(ii)	729	(iii)	512	(iv)	1331
(v)	5832	(vi)	421875	(vii)	157464	(viii)	74088
(ix)	175616	(x)	35937				

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक संख्या के लिए वह छोटी से छोटी संख्या बताएं जिससे इस संख्या को गुणा करने पर वह एक पूर्ण घन बन जाए। इस प्रकार से प्राप्त पूर्ण घन संख्या का घनमूल भी ज्ञात करें।

(i)	320	(ii)	1352	(iii)	243
(iv)	675	(v)	432		

3. वह छोटी सी छोटी संख्या ज्ञात करें जिससे निम्नलिखित संख्याओं को भाग देने पर वह एक पूर्ण घन बन जाए। इस प्रकार से प्राप्त पूर्ण घन संख्या का घनमूल भी ज्ञात करें।

(i)	256	(ii)	3125	(iii)	8019
(iv)	1408	(v)	192		

4. अनुमान द्वारा निम्नलिखित घन संख्या का घनमूल ज्ञात करें।

(i)	5832	(ii)	74088	(iii)	421875	(iv)	157464
(v)	4913	(vi)	12167	(vii)	32768		

5. निम्नलिखित में सत्य और असत्य को बताएं।

क. किसी भी विषम संख्या का घन सम होता है।

ख. एक पूर्ण घन दो शून्यों पर समाप्त नहीं होता है।

ग. यदि किसी संख्या का वर्ग 5 पर समाप्त होता है तो उसका घन 25 पर समाप्त होता है।

घ. ऐसा कोई पूर्ण घन नहीं है जो 8 पर समाप्त होता है।

ङ दो अंकों की संख्या का घन तीन अंकों वाली संख्या हो सकती है।

च. दो अंकों की संख्या के घन में सात या अधिक अंक हो सकते हैं।

छ. एक अंक वाली संख्या का घन एक अंक वाली संख्या हो सकती है।

हमने सीखा

1. जब एक संख्या को स्वयं से तीन बार गुणा किया जाता है तब जो गुणनफल प्राप्त होता है, उसे पूर्ण घन संख्या कहते हैं।

   जैसे : $2 \times 2 \times 2 = 8$, $3 \times 3 \times 3 = 27$, $4 \times 4 \times 4 = 64$ आदि।

   यहाँ 8, 27, 64 पूर्ण घन संख्याएँ हैं।

2. समसंख्या का घन भी सम संख्या होता है। जैसे :

   $2^3 = 8$, $4^3 = 64$, $6^3 = 216$, $12^3 = 1728$ आदि।

3. विषम संख्या का घन भी विषम संख्या होता है। जैसे :

   $1^3 = 1$, $3^3 = 27$, $5^3 = 125$, $11^3 = 1331$ आदि।

4. जिस संख्या के इकाई का अंक 1 (एक) होता है, उसके घन के इकाई का अंक भी 1 (एक) होता है। जैसे :–

   $1 \rightarrow 1^3 = 1$, $11 \rightarrow 11^3 = 1331$ आदि।

5. विषम संख्याओं के योगफल से भी एक घन संख्या प्राप्त होती है।

6. यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में प्रत्येक गुणनखंड तीन बार आता है तो वह संख्या एक पूर्ण घन संख्या होती है।

   जैसे : 8 का अभाज्य गुणनखंडन $= 2 \times 2 \times 2$; 216 का अभाज्य गुणनखंडन $= 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$ आदि।

   अतः 8 और 216 पूर्ण घन संख्या है।