अध्याय - 9

बीजीय व्यंजक

(ALGEBRAIC EXPRESSION)

9.1 भूमिका

$2y$-3, x+2, 3z, 8x^2, 2ab-3, आदि सरल बीजीय व्यंजकों के उदाहरण हैं। ये व्यंजक चर एवं अचर से बने हैं। जैसे व्यंजक 2a- 3 है को 2a में 3 घटाकर बनाया गया है। इस व्यंजक में दो पद 2a एवं –3 हैं। स्पष्टतः a का गुणांक 2 है। आइए नीचे दी तालिका को पूरा करें–

व्यंजक	चर	पद	पदों की संख्या	चर के गुणांक
$x + 3$	x	x, 3	द्विपद	x का गुणांक = 1
$2y$				y का गुणांक =
$5 - 2z$				z का गुणांक =
$5x + y$				x का गुणांक = y का गुणांक =
$t^2 + 2t + 3$				t^2 का गुणांक = t का अचर गुणांक =

जैसा कि आपने ऊपर दी गई तालिका में देखा कि पदों को जोड़कर अथवा घटाकर अलग–अलग पदों के व्यंजक बनाए जा सकते हैं। पद स्वयं भी गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में बनाए जा सकते हैं। जैसे व्यंजक 2a- 3 में पद 2a को 2 × a गुणनखण्डों 2 एवं a के गुणनफल के रूप में रखा जा सकता है। पद 3 केवल एक गुणनखण्ड 3 से बना है। (यहाँ हम 1 को नहीं लेते चूँकि वह सभी संख्याओं का सार्वगुणनखण्ड है।)

किसी पद का संख्यात्मक गुणनखण्ड उसका गुणांक कहलाता है।

अब जरा $2x^2y$ और $5yx^2$ के गुणनखण्ड कीजिए। क्या आपको इनमें बीजीय गुणनखण्ड समान मिलते हैं?

$2 \times x \times x \times y$ और $5 \times y \times x \times x$ में बीजीय गुणनखण्ड समान हैं। अतः ये समपदीय हैं। ऐसे समस्त पद जिनमें बीजांक/चरांकवाला भाग समान होता है, सजातीय पद या समपद कहलाते हैं।

स्वयं करके देखिए

निम्न में समान पदों को पहचानिए और लिखिए।

1.	$-3x, 3x$	2.	$2xy, -3yx$	3.	$x^2y, 6x^2y$
4.	x^2y, xy^2	5.	xy, x^2y^2	6.	$\frac{x}{3}, 2x$
7.	$x, \frac{1}{x}$				

बीजीय व्यंजकों का योग एवं व्यवकलन

हमने बीजीय व्यंजक की गणितीय संक्रियाओं (+, –, ×) का अभ्यास पिछली कक्षाओं में भी किया है। आइए, दो व्यंजकों को एक साथ लिखकर जोड़ते हैं। जैसे–

(i) $2x$ एवं $3x$ को जोड़िए।

हल : $2x + 3x = (2 + 3)\,x$ ($\because$ पद समान है अतः गुणांक जुड़ जाएँगें)

$= 5x$

(ii) $2x$ एवं $3y$ को जोड़िए।

हल : $2x + 3y$

$\because$ यहाँ पद समान नहीं है। अतः दोनों पदों को जोड़ा नहीं जा सकता है।

(iii) $x^2 + 2x + 3$ एवं $2x + 5$ को जोड़िए।

हल : $(x^2 + 2x + 3) + (2x + 5)$

$= x^2 + 2x + 2x + 3 + 5$ (पुनः व्यवस्थित करने पर)

$= x^2 + (2 + 2)\,x + 8$

$= x^2 + 4x + 8$

इसी प्रकार व्यंजकों को घटाने में हम देखते हैं कि घटाने की संक्रिया वस्तुतः योज्य प्रतिलोम जोड़ने की संक्रिया के समान है। घटाने की क्रिया में भी समान पदों की पहचान करते हैं। जैसे–

(i) $5x$ में $2x$ घटाइए

हल : $5x - 2x = 5x + (-2x)$

$= [5 + (-2)]x$

$= (5-2)\,x$

$= 3x$

(ii) $5x$ में $7x$ घटाइए।

हल : $5x - 7x = (5-7)\,x$

$= -2x$

(iii) $4xy$ में $3x^2y$ घटाइए।

हल : $\because$ यहाँ पद समान नहीं है। अतः गुणाकों को जोड़ा–घटाया नहीं जा सकता है।

$4xy - 3x^2y$

प्रश्नावली – 9.1

1. **जोड़िए–**

(a) $xy, 3xy$ (b) $x^2 + 3x, 2x + 9$ (c) x^2, y^2

(d) $7x, -8x$ (e) $8a, -2a, 7a, 2b$ (f) $8x, -2x, -6x$

(g) $2.3x, 1.7x$ (h) $\frac{2}{3}x, \frac{1}{3}x, -x$

2. **पहले व्यंजक में से दूसरे को घटाइए–**

(a) $22x, 10x$ (b) $17xy, 19xy$ (c) $a^2 + 1, -2a$

(d) $8x, -8x$ (e) $7xy, 7xy$ (f) $7.3x, 1.3x$

(g) $-6x + y + 4z - 8, \quad -2y + x - 5z + 8$ (h) $\frac{x}{2} - \frac{x}{4}, \frac{x}{3}$

3. **सरल कीजिए–**

(a) $2x - 3y - 7x + 2x - y + 2$ (b) $5y^3 - 3y^2 + 2y - 1 + 2y^2 + 6y - 5$

(c) $6a - 3b + c - 6a + 3b + 7c$ (d) $8x^2 + 5xy + 3y^2 + 3x^2 + 2xy - 6y^2$

4. यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ $x+1, x+2$ एवं $x+3$ हैं तो इसकी परिमिति क्या होगी?

5. यदि किसी वर्ग की एक भुजा $x-7$ है तो उसकी परिमिति ज्ञात कीजिए।

6. रहीम की उम्र $x-6$ वर्ष और महेश की उम्र y वर्ष है, दोनों की उम्र का योग और अंतर क्या होगा?

7. किसी आयत की दो आसन्न भुजाएँ क्रमशः x^2+2x+1 एवं x^2-2x+1 हैं तो आयत की परिमिति क्या होगी?

8. किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ क्रमशः x^2, y^2 हैं। यदि परिमिति $x^2+y^2+z^2$ हो तो त्रिभुज की तीसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

9.2 व्यंजक के घात

एक व्यंजक $2x^2+9x-7$ पर विचार करते हैं।

- व्यंजक में चर x है।
- व्यंजक में तीन पद $2x^2, 9x$ और -7 है।
- तीनों पदों में चरों के घात क्रमशः 2, 1 एवं 0 (क्यों ? $x^0=1$ जब $x \neq 0$) है।
- व्यंजक में स्थित चर का महत्तम घात ही व्यंजक का **घात** कहलाता है। स्पष्टतः दिए गए व्यंजक का घात 2 है। 2 घातवाले व्यंजक को द्विघात व्यंजक कहते हैं। 1 घातवाला व्यंजक रैखिक व्यंजक कहलाता है।

स्वयं करके देखिए

व्यंजक	व्यंजक में महत्तम घातवाला पद	महत्तम घात	व्यंजक का घात
$7x^3-8x+13$	$7x^3$	3	3
$9x-4$			
-7			
$13x^6$			

ऐसे भी व्यंजक होते हैं जिनके एक पद में एक से अधिक चर होते हैं। जैसे $7x^2y-2xy+8$ क्या $7x^2y$ में चर की महत्तम घात तीन है? आइए, देखें–

$7x^2y$ में चरों के घातों का योग x की घात 2 एवं y की घात 1 है।

अतः $2+1=3$ है।

$2xy$ में चरों के घातों का योग $=1+1=2$

8 में चरों के घातों का योग $=0$

स्पष्टतः $7x^2y$ का घात महत्तम है अतः व्यंजक का घात 3 होगा।

9.3 बहुपद (Polynomial)

हमने विभिन्न व्यंजकों के बारे में सीखा। हमने यह भी जाना कि किसी व्यंजक में पद होते हैं और व्यंजक का अपना घात भी होता है। व्यंजक की पदों की संख्या एवं घात कुछ भी हो सकते हैं। किन्तु बहुपद विशेष शर्तवाले व्यंजक होते हैं। **यदि किसी व्यंजक में पदों की संख्या निश्चित हो व पदों की घात एक पूर्ण संख्या हो, बहुपद कहलाता है।** बहुपद में पदों की संख्या एक या एक से अधिक कुछ भी हो सकता है पर वह निश्चित होता है। इससे स्पष्ट होता है कि प्रत्येक बहुपद एक व्यंजक है किन्तु प्रत्येक व्यंजक बहुपद नहीं है। जैसे $2x^2 + 9x - 17$ एक बहुपद और व्यंजक भी है, किन्तु $\dfrac{1}{2x^2 + 9x - 17}$ एक व्यंजक है, बहुपद नहीं है।

स्वयं करके देखिए

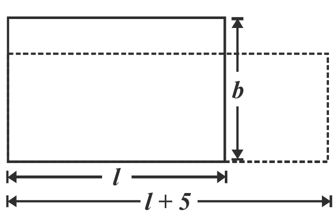
निम्नलिखित व्यंजकों में से बहुपद को अलग कीजिए।

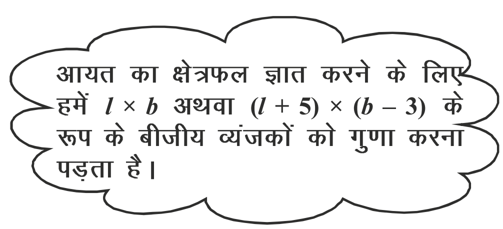
$x^2 - 9,\ 2x^{-7} - 23x + 2,\ 5,\ 7x^{\frac{1}{6}},\ \sqrt{3}x + y,\ \dfrac{1}{x^2 - y},\ -2x^2y^2,\ \dfrac{1}{2}x^2z^2$

9.4 बीजीय व्यंजकों का गुणा

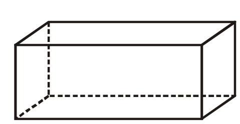
(i) क्या आप ऐसी परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें दो बीजीय व्यंजकों को गुणा करना पड़ता हो?

बबली उठकर कहती है। "हम आयत के क्षेत्रफल के बारे में सोच सकते हैं।" आयत का क्षेत्रफल $l \times b$, हैं जिसमें l लंबाई है और b चौड़ाई है। यदि आयत की लंबाई 5 इकाई बढ़ा दी जाए, अर्थात् $(l + 5)$ कर दी जाए और चौड़ाई 3 इकाई कम कर दी जाए अर्थात् $(b - 3)$ कर दी जाए तो आयत का क्षेत्रफल $(l + 5) \times (b - 3)$ होगा।





(ii) क्या आप आयतन के बारे में सोच सकते हैं? (एक आयताकार बक्से का आयतन उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणनफल से प्राप्त होता है।)



(iii) सरिता कहती है कि जब हम वस्तुएँ खरीदते हैं तो हमें गुणा करना पड़ता है। उदाहरणार्थ यदि प्रति दर्जन केलों का मूल्य p रुपये है और स्कूल पिकनिक के लिए दर्जन केलों की आवश्यकता है, तो हमें $(p \times z)$ रुपयों का भुगतान करना पड़ेगा।

मान लीजिए, प्रति दर्जन केलों का मूल्य 2 रुपये कम होता और पिकनिक के लिए 4 दर्जन कम केलों की आवश्यकता होती तो, प्रति दर्जन केलों का मूल्य $(p-2)$ रुपये होता और $(z-4)$ दर्जन केलों की आवश्यकता होती। इसलिए, हमें $(p-2) \times (z-4)$ रुपयों का भुगतान करना पड़ता है। आइए, व्यंजकों के गुणनफल को समझें–

9.4.1 दो एकपदी का गुणनफल

(i) $2 \times 3 = 3 + 3 = 6$ हम जानते हैं

इसी प्रकार

(ii) $2 \times x = x + x = 2x$

इसी प्रकार

(iii) $2 \times 3x = 3x + 3x = 6x$

कुछ अन्य उदाहरणों के द्वारा इसे समझिए–

(iv) $2x \times y = 2 \times x \times y = 2 \times y \times x = 2xy = 2yx$

(v) $2x \times 3y = 2 \times x \times 3 \times y = 2 \times 3 \times x \times y = 6xy$

(vi) $2x \times x = 2 \times x \times x = 2x^2$ (घात के नियम से) $[x \times x = x^{1+1} = x^2]$

(vii) $2x^2y \times -3xy^2 = 2 \times x \times x \times y \times (-3) \times x \times y \times y$

$= 2 \times (-3) \times x \times x \times x \times y \times y \times y$

$= -6\,x^3y^3$ (घात के नियम से)

उपर्युक्त सभी उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि $2 \times -3 = -6$

गुणनफल का गुणांक = प्रथम एकपदी का गुणांक × द्वितीय एकपदी का गुणांक और

बीजीय गुणन = प्रथम एकपदी का बीजीय गुणनखंड × द्वितीय एकपदी का बीजीय गुणनखंड

$$x^2\,y \times xy^2 = x^3y^3$$

$$2x^2y \times -3xy^2 = -6x^3y^3$$

हम यह भी पाते हैं कि दो एकपदी का गुणनफल सदैव एकपदी ही होता है।

9.4.2 तीन या अधिक एकपदी का गुणनफल

नीचे कुछ उदाहरण दिए गए हैं:

(i) $3x \times 7y \times 5z = (3x \times 7y) \times 5z = 21xy \times 5z = 105\ xyz$

(ii) $2x^2y \times 3y^2z \times (-5z^2x) = (2x^2y \times 3y^2z) \times (-5z^2x)$

$= 6x^2y^3z \times (-5z^2x)$

$= -30\ x^3y^3z^3$

यहाँ हमने पहले दो एकपदी का गुणा करके एक, एकपदी प्राप्त किया फिर इस नए एकपदी में तीसरे एकपदी से गुणा कर गुणनफल एकपदी प्राप्त किया है। इसे हम निम्नलिखित तरीके से भी हल कर सकते हैं।

(ii) $2x^2y \times 3y^2z \times (-5z^2x) = (2 \times 3 \times (-5)) \times x^2 \times x \times y \times y^2 \times z \times z^2$

$= -\ 30\ x^3y^3z^3$

इसी प्रकार तीन से अधिक एक पदी का गुणनफल भी एकपदी ही प्राप्त होता है।

प्रश्नावली – 9.2

1. **गुणनफल ज्ञात कीजिए–**

(a) $8x \times (-2)$ (b) $-3x \times -3x^2y$

(c) $6mn \times 7np$ (d) $4p^3 \times 3p^3$

(e) $x^2y \times xyz$ (f) $2.5x \times 4x$

(g) $2.5x \times 2.5y$ (h) $\frac{1}{2}x \times \frac{1}{2}y$

(i) $\frac{1}{2}xy \times 2xy$ (j) $2x \times 2x^2 \times 2x^3$

(k) $-\ 3x^2y \times (-6) \times 7xy$

2. किसी आयत की आसन्न भुजाएँ क्रमशः $6p^2q^2$ एवं $2pq$ हैं तो आयत का क्षेत्रफल क्या होगा?

3. यदि किसी वर्ग की भुजा $\sqrt{2}x^2y^2$ है तो वर्ग का क्षेत्रफल क्या होगा?

4. किसी त्रिभुज का आधार $7xyz$ एवं संगत शीर्षलंब $2x$ है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा?

5. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि उसकी भुजा $3x^2$ है।

6. उस घन का आयतन क्या होगा जिसकी कोर $6a$ हो?

7. यदि एक कलम का मूल्य x^2y हो तो y^2x कलम का मूल्य क्या होगा?

8. यदि कोई व्यक्ति $\frac{x^2}{2}$ km/h की चाल से चल रहा हो तो 2 घंटे में वह कितनी दूरी तय कर लेगा?

9.4.3 एकपद का द्विपद से गुणाः

आइए इसे समझने के लिए एक, एकपदी $2x$ एवं एक द्विपदी $2x + y$ का गुणा करते हैं। चूँकि व्यंजक संख्याओं को निरूपित करते हैं, अतः संख्याओं के गुणों का पालन व्यंजक भी करते हैं।

हम जानते हैं कि–

$12\times105 = 12(100 + 5) = 12\times100+12\times5 = 1200+60 = 1260$ (वितरण नियम से)

उसी प्रकार

$$2x \times (2x + y) = 2x \times 2x + 2x \times y = 4x^2 + 2xy$$

$$(3x + 7) \times (-3x^2) = (3x) \times (-3x^2) + 7 \times (-3x^2) = -9x^3 - 21x^2$$

इसी प्रकार वितरण नियम के सहायता से हम एकपदी से द्विपदी के प्रत्येक पद में गुणा करते हैं और गुणनफल को उनके चिह्नों के साथ संयोजित करते हैं। एकपदी से त्रिपदी या अन्य बहुपदी व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात करने के लिए इसी मौलिक कार्यविधि का उपयोग करते हैं, जैसे–

$$7x \times (2x^2 - 3xy + 11) = 7x \times 2x^2 + 7x \times (-3xy) + 7x \times 11$$
$$= 14x^3 - 21x^2y + 77x$$

स्वयं करके देखिए

गुणनफल ज्ञात कीजिए–

(i) $a \times (a^3 - a^2 - a + 1)$ (ii) $(a + b + c) \times 3a^2$

(iii) $2a \times (x + y + z)$ (iv) $(2a^2 + 3bc - c^2) \times 2abc$

9.4.4 द्विपद का द्विपद से गुणा

$2x$ को पहले $(2y + x)$ से गुणा करेंगे फिर y का $(2y + x)$ से गुणा कर दोनों को जोड़ लेंगे।

जिस प्रकार हमने एकपदी का द्विपदी से गुणा किया। आइए, अब हम द्विपदी का द्विपदी से गुणा करें।

सोचिए आप $(2x + y)\,(2y + x)$ को कैसे हल करेंगे? आइए समझें।

$$(2x + y)\,(2y + x) = 2x\,(2y + x) + y\,(2y + x) \quad \text{(वितरण नियम से)}$$
$$= (\underline{2x \times 2y} + \underline{2x \times x}) + (\underline{y \times 2y} + \underline{y \times x}) \quad \text{(पुनः वितरण नियम से)}$$
$$= (4xy + 2x^2) + (2y^2 + xy)$$
$$= 4xy + 2x^2 + 2y^2 + xy$$
$$= 2x^2 + 2y^2 + 4xy + xy$$
$$= 2x^2 + 2y^2 + 5xy$$

नोटः– बहुपद से बहुपद के गुणा में हमें समान पदों को ढूँढ़कर संयुक्त कर लेना चाहिए।

9.4.5 द्विपद का त्रिपद से गुणा

हमने सीखा है कि एकपदी में एकपदी से गुणा करना और वितरण नियम की सहायता से द्विपदी से द्विपदी का गुणा करना। हमने द्विपद और द्विपद के गुणा में देखा कि द्विपद के प्रत्येक पद से द्विपद के प्रत्येक पद में गुणा होता है और इसके लिए वितरण नियम का उपयोग किया जाता है। द्विपद का त्रिपद के गुणन में भी इसी कार्यविधि का उपयोग किया जाता है, जैसे–

द्विपद का त्रिपद के गुणन में भी वितरण नियम का उपयोग किया जाता है।

$$(2x - y) \times (x + y + z) = 2x \times (x + y + z) - y \times (x + y + z)$$
$$= 2x^2 + 2xy + 2xz - xy - y^2 - yz$$
$$= 2x^2 - y^2 + 2xy - xy + 2xz - yz$$
$$= 2x^2 - y^2 + xy + 2xz - yz$$

इसी प्रकार हम वितरण नियम का उपयोग कर व्यंजकों का गुणा कर सकते हैं।

साधित प्रश्न

दिए गए व्यंजकों का गुणा कीजिए–

1. $(3x + 7)$ और $(2x - 3)$ का   2. $(z - 3)$ और $(6z - 5)$ का

3. $(a + \text{b})(a - \text{b})$ 4. $(a - \text{b})(a^2 - 2a\text{b} + \text{b}^2)$

5. $(x + \text{y} + \text{z})(x - \text{y} + \text{z})$

हल–1 $(3x + 7) \times (2x - 3)$
$= 3x(2x - 3) + 7(2x - 3)$
$= 3x \times 2x - 3x \times 3 + 7 \times 2x - 7 \times 3$
$= 6x^2 - 9x + 14x - 21$
$= 6x^2 + 5x - 21$ (समान पद संयुक्त करने पर)

हल–2 $(\text{z} - 3) \times (6\text{z} - 5)$
$= \text{z}(6\text{z} - 5) - 3(6\text{z} - 5)$
$= 6\text{z}^2 - 5\text{z} - 18\text{z} + 15$
$= 6\text{z}^2 - 23\text{z} + 15$

हल–3 $(a + \text{b})(a - \text{b})$
$= a(a - \text{b}) + \text{b}(a - \text{b})$
$= \text{a}^2 - a\text{b} + a\text{b} - \text{b}^2$
$= a^2 - \text{b}^2$

हल–4 $(a - \text{b}) \times (a^2 - 2a\text{b} + \text{b}^2)$
$= a(a^2 - 2a\text{b} + \text{b}^2) - \text{b}(a^2 - 2a\text{b} + \text{b}^2)$
$= a^3 - 2a^2\text{b} + a\text{b}^2 - a^2\text{b} + 2a\text{b}^2 - \text{b}^3$
$= a^3 - \text{b}^3 - 3a^2\text{b} + 3a\text{b}^2$

नोटः– व्यंजक को उनके मानक रूप में लिखने के लिए चरों के घात अवरोही क्रम में लिखे जाते हैं।

हल–5 $(x + \text{y} + \text{z})(x - \text{y} + \text{z})$
$= x(x - \text{y} + \text{z}) + \text{y}(x - \text{y} + \text{z}) + \text{z}(x - \text{y} + \text{z})$
$= x^2 - x\text{y} + x\text{z} + x\text{y} - \text{y}^2 + \text{yz} + x\text{z} - \text{yz} + \text{z}^2$
$= x^2 - \text{y}^2 + \text{z}^2 - x\text{y} + x\text{y} + \text{yz} - \text{yz} + x\text{z} + x\text{z}$
$= x^2 - \text{y}^2 + \text{z}^2 + 2x\text{z}$

6. सरल करें–

$(x + \text{y})(x - 2\text{y} + \text{z}) - (x - \text{y})\text{z}$

हल–6 $(x + \text{y})(x - 2\text{y} + \text{z}) - (x - \text{y})\text{z}$
$= x(x - 2\text{y} + \text{z}) + \text{y}(x - 2\text{y} + \text{z}) - (x - \text{y})\text{z}$
$= x^2 - 2x\text{y} + x\text{z} - x\text{y} - 2\text{y}^2 + \text{yz} - x\text{z} + \text{yz}$
$= x^2 - 2\text{y}^2 - 2x\text{y} + x\text{y} + x\text{z} - x\text{z} + \text{yz} + \text{yz}$
$= x^2 - 2\text{y}^2 - x\text{y} + 2\text{yz}$

7. किसी घन की एक भुजा $(x + \text{y})$ इकाई है तो उसका आयतन क्या होगा?

हल–7 घन की भुजा $= (x + y)$ इकाई

घन का आयतन = भुजा × भुजा × भुजा

घन का आयतन $= (x + y) \times (x + y) \times (x + y)$ घन इकाई

$= (x + y) \times \{(x + y) \times (x + y)\}$ घन इकाई

$= (x + y) \times \{x (x + y) + y (x + y)\}$ घन इकाई

$= (x + y) \times \{x^2 + xy + xy + y^2\}$ घन इकाई

$= (x + y) \{x^2 + 2xy + y^2\}$ घन इकाई

$= (x + y) (x^2 + 2xy + y^2)$ घन इकाई

$= x (x^2 + 2xy + y^2) + y (x^2 + 2xy + y^2)$ घन इकाई

$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$ घन इकाई

$= (x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2)$ घन इकाई

प्रश्नावली – 9.3

1. **दिए गए बीजीय व्यंजकों का गुणा कीजिए–**

(a) $(4a - 5b) \times (2a - 6b)$ (b) $(1.5x - 0.5y) \times (1.5x + 0.5y)$

(c) $\left(\frac{1}{2}pq - \frac{3}{2}q\right) \times (pq - q)$ (d) $(a + b) \times (3x - y)$

(e) $(a^2b^2 - c^2d^2) \times (a^2b^2 + c^2d^2)$ (f) $(2a + 2b + c)(a + b - c^2)$

2. **सरल कीजिए–**

(a) $(a - b)(a + b) - (a + b)(a + b)$

(b) $(a^2 - b)(a - b^2) + (a - b)^2$

(c) $(2.3x - 1.7y)(2.3x + 1.7y + 5) - 5.29x^2 + 2.89\ y^2$

(d) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

(e) $(x + y + z) \times (x + y + z)$

(f) $(a - b)(b - c) + (b - c)(c - a) + (c - a)(a - b)$

3. किसी त्रिभुज का आधार एवं संगत शीर्षलंब क्रमशः $(x + y)^2$ एवं $(x - y)^2$ हैं तो उसका क्षेत्रफल क्या होगा?

4. आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से $(x + y)$ इकाई अधिक है। यदि चौड़ाई z इकाई हो तो आयत की लम्बाई व क्षेत्रफल के लिए व्यंजक लिखिए।

5. यदि किसी लड़की ने $(x+y)$ रु. प्रति किलो की दर से $(m+n)$ किलोग्राम आलू एवं y रुपये प्रति किलोग्राम की दर से $(m - n)$ किलो टमाटर खरीदे तो उसके कुल कितनी राशि देनी होगी?

6. पिता की उम्र उसके पुत्र की उम्र के $(m+n)$ गुणा है। यदि पुत्र की उम्र $(x^2 - y^2)$ वर्ष हो तो पिता की उम्र के लिए व्यंजक लिखिए।

9.5 बीजीय व्यंजक के मान

हमने देखा की चर एवं अचर की सहायता से व्यंजक बनते हैं। चर किसी संख्या को निरूपित करता है। चर विभिन्न संख्याओं के मान ले सकता है। चर के इस विभिन्न मानों के लिए चर से बने व्यंजक भी प्रभावित होते हैं। आइए, एक व्यंजक $2x + 5$ पर विचार करें।

व्यंजक $= 2x + 5$

व्यंजक में चर x है

$x = 0, 1, 2, 3.....$ आदि रखने पर क्रमशः

बीजीय व्यंजक के मान $= 2 \times 0 + 5 = 5$ जब $x = 0$

बीजीय व्यंजक के मान $= 2 \times 1 + 5 = 7$ जब $x = 1$

बीजीय व्यंजक के मान $= 2 \times 2 + 5 = 9$ जब $x = 2$

बीजीय व्यंजक के मान $= 2 \times 3 + 5 = 11$ जब $x = 3$

इस प्रकार हम पाते हैं कि चरों के मान व्यंजक के मान को प्रभावित करते हैं।

स्वयं करके देखिए

चर $x = 0, -1$ एवं 1 के निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात करें–

(i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $2x^2 - 3x$ (iii) $7x - 5$

(iv) $\frac{x^2}{2} - 1$ (v) $(x - a)(x - b)$

9.6 सर्वसमिका (Identity)

हमने समीकरण के हल करते समय समिका को देखा है। इसमें दो व्यंजक '=' (बराबर) चिह्न द्वारा अलग रखते हैं। आइए, एक समिका $(x + 1)\ (x + 2) = x^2 + 3x + 2$ पर विचार करें। इसमें चर x के कुछ मानों के लिए L.H.S. एवं R.H.S. का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 0$ के लिए

समिका के L.H.S. का मान $= (0 + 1)\ (0 + 2) = 1 \times 2 = 2$

एवं R.H.S. का मान $= 0^2 + 3 \times 0 + 2 = 0 + 0 + 2 = 2$

यहाँ L.H.S. का मान = R.H.S. का मान $= 2$

अब $x = -5$ के लिए

समिका के L.H.S.का मान $= (-5 + 1)\ (-5 + 2) = (-4)\ (-3) = 12$

एवं R.H.S.का मान $= (-5)^2 + 3\ (-5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$

यहाँ भी L.H.S. का मान = R.H.S. का मान $= 12$

अब $x = 10$ के लिए देखते हैं

समिका के L.H.S. का मान $= (10 + 1)\ (10 + 2) = 11 \times 12 = 132$

एवं R.H.S. का मान $= (10)^2 + 3 \times 10 + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

यहाँ भी L.H.S. का मान = R.H.S. का मान $= 132$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में आप क्या पाते हैं? निश्चित ही प्रत्येक स्थिति में समिका के दोनों पक्ष समान आते हैं। **ऐसी समिका जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है, सर्वसमिका कहलाती है।** हमने सीखा है कि समीकरण चर के केवल कुछ मानों के लिए सत्य होते हैं। अतः सर्वसमिका एवं समीकरण में अंतर स्पष्ट होता है। एक समिका $x + 3 = 5$ लेते हैं एवं x के विभिन्न मानों के लिए समिका की जाँच करते हैं–

$x = 0$

तो समिका के L.H.S. का मान $= 0 + 3 = 3$

R.H.S. का मान $= 5$

यहाँ L.H.S. का मान $\neq$ R.H.S.का मान

$x = 1$ के लिए

L.H.S. का मान$= 1 + 3 = 4$

R.H.S. का मान $= 5$

यहाँ भी L.H.S. का मान $\neq$ R.H.S.का मान

$x = 2$ के लिए L.H.S. $= 2 + 3 = 5 =$ R.H.S.

$x = 3$ के लिए L.H.S. $= 3 + 3 = 6 \neq$ R.H.S.

इस प्रकार हम पाते हैं कि $x + 3 = 5$ एक सर्वसमिका नहीं है क्योंकि यह चर के सभी मानों के लिए सत्य नहीं है। यहाँ $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$ एक सर्वसमिका है क्योंकि यह चर के सभी मानों के लिए सत्य है।

स्वयं करके देखिए

जाँच कर पता कीजिए कि कौन सर्वसमिका है?

(i) $(x - 3)(x + 3) \;\; x^2 - 9$ (ii) $x^2 + 9 = 9x + x^2$

(iii) $(a + \mathrm{b})^2 = a^2 + 2a\mathrm{b} + \mathrm{b}^2 + 6a$ (iv) $3(x - \mathrm{y}) = 3x - 3\mathrm{y}$

9.7 मानक सर्वसमिकाएँ

हम कुछ ऐसी सर्वसमिकाओं पर चर्चा करेंगे जो गणित में व्यापक रूप से उपयोग आती है। इनके व्यापक प्रयोग के कारण ही ये मानक सर्वसमिकाएँ कही जाती हैं।

I. $(a + \mathrm{b})^2 = a^2 + 2a\mathrm{b} + \mathrm{b}^2$

यहाँ L.H.S. $= (a + \mathrm{b})^2$

$= (a + \mathrm{b})(a + \mathrm{b})$

$= a(a + \mathrm{b}) + \mathrm{b}(a + \mathrm{b})$

$= a^2 + a\mathrm{b} + a\mathrm{b} + \mathrm{b}^2$

$= a^2 + 2a\mathrm{b} + \mathrm{b}^2$

= R.H.S.

अर्थात् $\boldsymbol{(a + \mathrm{b})^2 = a^2 + 2a\mathrm{b} + \mathrm{b}^2}$

$\because$ यह सर्वसमिका L.H.S. में दिए गए व्यंजकों के वास्तविक गुणनफल से प्राप्त है अतः a एवं b के किसी भी मान के लिए L.H.S. = R.H.S. होगा।

II. $(a - \mathrm{b})^2 = a^2 - 2a\mathrm{b} + \mathrm{b}^2$

यहाँ L.H.S. $= (a - \mathrm{b})^2$

$= (a - \mathrm{b})(a - \mathrm{b})$

$= a(a - \mathrm{b}) - \mathrm{b}(a - \mathrm{b})$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 = \text{R.H.S.}$

$\therefore$ $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

III. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

यहाँ L.H.S. $= (a - b)(a + b)$

$= a(a + b) - b(a + b)$

$= a^2 + ab - ab - b^2$

$= a^2 - b^2 = \text{R.H.S.}$

अतः $\mathbf{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2}$

इन तीनों सर्वसमिकाओं के अलावा एक अन्य प्रमुख सर्वसमिका है जिसका प्रयोग हम विभिन्न गणितीय समस्याओं के समाधान के रूप में करते हैं।

IV. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

यहाँ L.H.S. $= (x + a)(x + b)$ $= x(x + b) + a(x + b)$

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$ ($\because$ $(a + b)x = ax + bx$)

$\mathbf{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$

9.8 सर्वसमिकाओं का उपयोग

सर्वसमिकाओं का उपयोग कर हम व्यंजकों, संख्याओं के गुणा का एक सरल एवं वैकल्पिक विधि प्राप्त करेंगे।

उदाहरण–1. सर्वसमिका (I) का उपयोग करते हुए

(i) $(3x^2 + 2)^2$ (ii) $(49)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : (i) $(3x^2 + 2)^2$

यहाँ यदि $a = 3x^2$, $b = 2$ मान ले तो

$(3x^2 + 2)^2 = (3x^2)^2 + 2 \times (3x^2)(2) + 2^2$ (सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से)

$= 9x^4 + 12x^2 + 4$

हल : (ii) $(49)^2 = (40 + 9)^2$

$= (40)^2 + 2 \times 40 \times 9 + 9^2$ (I) से

$= 1600 + 720 + 81 = 2401$

सरल समस्याओं के समाधान में भले ही यह विधि थोड़ी जटिल लगती हो किन्तु कठिन व्यंजकों के लिए यह बेहद सुविधाजनक हो सकती है।

उदाहरण–2. सर्वसमिका (II) का उपयोग करते हुए

(i) $(3p-7q)^2$ (ii) $(49)^2$ को ज्ञात कीजिए–

हल : (i) $(3p-7q)^2 = (3p)^2 - 2 \times 3p \times 7q + (7q)^2$ (II) से

$= 9p^2 - 42pq + 49q^2$

हल : (ii) $(49)^2 = (50-1)^2$

$= (50)^2 - 2 \times 50 \times 1 + (1)^2$ (II) से

$= 2500 - 100 + 1$

$= 2400 + 1 = 2401$

उपर्युक्त उदाहरणों में आपने देखा कि सर्वसमिका (I) एवं (II) के उपयोग से $(49)^2$ ज्ञात किया गया है। क्या आप $(3p-7q)^2$ सर्वसमिका (I) की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं? $(3x^2+2)$ को भी सर्वसमिका (II) की सहायता से ज्ञात कीजिए।

उदाहरण–3. सर्वसमिका (III) की सहायता से निम्न व्यंजकों का मान ज्ञात कीजिए–

(i) $(7x-3y)(7x+3y)$ (ii) 95^2-5^2 (iii) 996×1004

हल : (i) $(7x-3y)(7x+3y) = (7x)^2 - (3y)^2$ (III) से

$= 49x^2 - 9y^2$

हल : (ii) $95^2 - 5^2 = (95-5)(95+5)$ (III) से

$= 90 \times 100$

$= 9000$

हल : (iii) $996 \times 1004 = (1000-4)(1000+4)$

$= (1000)^2 - 4^2$ (III) से

$= 1000000 - 16 = 999984$

उदाहरण–4. सर्वसमिका $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ का उपयोग करते हुए निम्न को हल करें–

(i) 101×102 (ii) 45×54

हल : (i) 101×102
$= (100 + 1)(100 + 2)$
$= (100)^2 + (1 + 2) \times 100 + 1 \times 2$
$= 100 \times 100 + 3 \times 100 + 1 \times 2$
$= 10000 + 300 + 2$
$= 10302$

हल : (ii) 45×54
$= (50 - 5)(50 + 4)$
$= 50^2 + (-5 + 4) \times 50 + (-5) \times 4$
$= 50 \times 50 + (-1) \times 50 + (-5) \times 4$
$= 2500 + (-50) - 20$
$= 2500 - 50 - 20$
$= 2500 - 70 = 2430$

प्रश्नावली – 9.4

1. उचित सर्वसमिकाओं का उपयोग कर दिए गए व्यंजकों का गुणनफल प्राप्त कीजिए–

(a) $(5x + 7y)^2$ (b) $\left(a + \frac{a}{2}\right)^2$ (c) $(1.5x + 2.5y)^2$

(d) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ (e) $(0.4a - 0.5b)(0.4a - 0.5b)$

(f) $\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right)$ (g) $(y^2 - y)(y^2 - y)$

(h) $(pqr - 3)(pqr + 3)$ (i) $(2x + 3)(2x - 5)$

(j) $(3.5x - y)(3.5x - y)$ (k) $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2$

(l) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2$ (m) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

2. **सरल कीजिए–**

(a) $(x^2 + y^2)^2$ (b) $(3a - 5b)^2 - (3a + 5b)^2$

(c) $(xyz + xy)^2 - 2x^2y^2z$ (d) $\left(\frac{2x}{5} - \frac{3y}{4}\right)\left(\frac{2x}{5} + \frac{3y}{4}\right)$

(e) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(2a - \frac{3}{a}\right)^2$ (f) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

3. **सर्वसमिकाओं के उपयोग से निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए–**

(a) 81^2 (b) $(999)^2$ (c) $(52)^2$

(d) $(498)^2$ (e) $(5.5)^2$ (f) 191×209

(g) 10.5×9.5 (h) $(101)^2 - (99)^2$ (i) $(1.5)^2 - (0.5)^2$

4. **सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का उपयोग कर निम्नलिखित का गुणनफल एवं मान ज्ञात कीजिए–**

(a) $(x + 3y)(x + 5y)$ (b) $(3x + 7)(3x + 5)$

(c) $(x - 5)(x + 4)$ (d) $(2x - 7)(2x - 9)$

(e) 52×53 (f) 3.1×3.2

हमने सीखा

1. व्यंजक, चर एवं अचरों का अर्थपूर्ण संयोजन होता है जिसमें चर का चर या अचर के साथ गुणा, जोड़–घटा और भाग करके प्राप्त करते हैं।

2. व्यंजक में पदों को + या – चिह्न द्वारा अलग रहते हैं।

3. चर के मान से व्यंजक का मान प्राप्त किया जाता है। चर के अलग–अलग मानों के लिए व्यंजक के अलग–अलग मान प्राप्त किए जा सकते हैं।

4. सर्वसमिका : ऐसी समिका जो चर के सभी मानों के लिए सत्य होती है, सर्वसमिका कहलाती है।

5. समीकरण : ऐसी समिका जो चर के कुछ मानों के लिए सत्य होती है, समीकरण कहलाती है।