Durga Tutorial

Online Classes

बिहार बोर्ड और CBSE बोर्ड की तैयारी

Free Notes के लिए

www.durgatutorial.com

पर जाएँ।

ज्यादा जानकारी के लिए हमें
Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511

अध्याय 1

संबंध एवं फलन

Relations and Functions

प्रश्नावली 1.1

प्रश्न 1. निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक हैं

(i) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ में संबंध R, इस प्रकार परिभाषित है कि
$$R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$$

(ii) प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में, $R = \{(x, y) : y = x + 5$ तथा $x < 4\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R

(iii) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में, $R = \{(x, y) : y$ भाज्य है x से$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है।

(iv) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय Z में, $R = \{(x, y) : x - y$ एक पूर्णांक है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R

(v) किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों के समुच्चय में निम्नलिखित संबंध R

(a) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं$\}$

(b) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं$\}$

(c) $R = \{(x, y) : x, y$ से ठीक-ठीक 7 सेमी लम्बा है$\}$

(d) $R = \{(x, y) : x, y$ की पत्नी है$\}$

(e) $R = \{(x, y) : x, y$ के पिता हैं$\}$

हल (i) (a) दिया है, $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 12, 13, 14\}$

तथा $R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए $(x, x) \in A, \forall x \in A$

$\therefore$ यदि $y = x$ हो, तो $3x - y = 0$

$\Rightarrow \quad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow (x, x) \notin R, \forall x \in A$, इसलिए R स्वतुल्य संबंध नहीं है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

(b) सममित संबंध के लिए,

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

∴ यदि $(x, y) \in R \Rightarrow 3x - y = 0$

तब, $3y - x \neq 0 \Rightarrow (y, x) \notin R$

अतः R सममित संबंध नहीं है।

जैसे—यदि $x = 1, y = 3$, तो $3 \times 1 - 3 = 0$

$3 \times 3 - 1 = 9 - 1 = 8 \neq 0$

(c) संक्रमक संबंध के लिए, यदि

$$(x, y) \in R \Rightarrow 3x - y = 0$$

$$(y, z) \in R \Rightarrow 3y - z = 0$$

तब, $3x - z \neq 0$ अतः R संक्रमक संबंध नहीं है।

जैसे— यदि $x = 1, y = 3, z = 9$, तो $3 \times 1 - 3 = 0, 3 \times 3 - 9 = 0, 3 \times 1 - 9 \neq 0$

(ii) दिया है, $A = N =$ प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय

तथा $R = \{(x, y) : y = x + 5$ तथा $x < 4\}$

$= \{(x, x + 5) : x \in N$ तथा $x < 4\}$

$= \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

(a) स्वतुल्य संबंध के लिए, $y = x$ रखने पर, $x \neq y + 5$

$\Rightarrow (1, 1) \notin R$ अतः R स्वतुल्य संबंध नहीं है।

(b) सममित संबंध के लिए,

मान लीजिए $(x, y) \in R$

$\Rightarrow \quad y = x + 5$

$\Rightarrow \quad x = y - 5$

$\Rightarrow \quad x \neq y + 5 \Rightarrow (y, x) \notin R$

जैसे— $(1, 6) \in R$ लेकिन $(6, 1) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

(c) संक्रमक संबंध के लिए,

मान लीजिए $(x, y) \in R, (y, z) \in R$

$\Rightarrow \quad y = x + 5 \quad \ldots(i)$

तथा $z = y + 5 \quad \ldots(ii)$

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$z + y = x + 5 + y + 5$$

$\Rightarrow \quad z = x + 10$

$\Rightarrow \quad z \neq x + 5 \Rightarrow (x, z) \notin R$

जैसे— $(2, 7), (3, 8) \in R$ लेकिन $(2, 8) \in R$ अतः R संक्रमक संबंध नहीं है।

(iii) दिया है, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

तथा $R = \{(x, y) : y$ भाज्य है x से$\}$

(a) समतुल्य संबंध के लिए, चूँकि हम जानते हैं प्रत्येक $x \in A$, x से भाज्य है।

अतः $(x, x) \in R, \forall x \in A$ इसलिए R एक स्वतुल्य संबंध है।

(b) सममित संबंध के लिए, चूँकि 6, 2 से भाज्य है।

∴ $(2, 6) \in R$, लेकिन 2, 6 से भाज्य नहीं है।

∴ $(6, 2) \notin R$ अतः R एक सममित संबंध नहीं है।

Durga Tutorial Baniapur

(c) संक्रमक संबंध के लिए,

मान लीजिए $(x, y) \in R$ तथा $(y, z) \in R$

$\Rightarrow$ y, x से भाज्य है तथा z, y से भाज्य है।

$\Rightarrow$ z, x से भाज्य है।

जैसे– 2, 1 से भाज्य है तथा 4, 2 से भाज्य है।

$\Rightarrow$ 4, 1 से भाज्य है। $\Rightarrow (x, z) \in R$

$\Rightarrow R$ एक संक्रमक संबंध है।

(iv) दिया है,

$A = Z =$ समस्त पूर्णांकों का समुच्चय तथा $R = \{(x, y) : x - y$ एक पूर्णांक है$\}$

(a) स्वतुल्य संबंध के लिए,

चूँकि $x - x = 0$, जोकि एक पूर्णांक है। अतः $(x, x) \in R, \forall x \in A$

(b) सममित संबंध के लिए, मान लीजिए

$(x, y) \in R \Rightarrow x - y$ एक पूर्णांक है।

जैसे— $x - y = \lambda$, जहाँ λ एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow$ $y - x = -\lambda \Rightarrow y - x$ एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow$ $(y, x) \in R$ अतः R एक सममित संबंध है।

(c) संक्रमक संबंध के लिए,

मान लीजिए $(x, y) \in R$ तथा $(y, z) \in R$

$\Rightarrow$ $x - y$ एक पूर्णांक है तथा $y - z$ एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow$ $x - z$ एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow$ $(x, z) \in R$

अतः R एक संक्रमक संबंध है।

(v) दिया है, $A =$ किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों का समुच्चय

(a) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही स्थान$\}$ पर कार्य करते हैं।

स्पष्ट है कि R, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक है।

(b) $R = \{(x, y) : x$ तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं$\}$

स्पष्ट है कि R, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक संबंध है।

(c) $R = \{(x, y) : x, y$ से ठीक-ठीक 7 सेमी लम्बा है$\}$

चूँकि x, x से 7 सेमी लम्बा नहीं हो सकता है। अतः R स्वतुल्य संबंध नहीं है।

अब, मान लीजिए $(x, y) \in R$

$\Rightarrow$ x, y से ठीक - ठीक 7 सेमी लम्बा है।

$\Rightarrow$ y, x से 7 सेमी लम्बा नहीं हो सकता है।

$\Rightarrow$ $(y, x) \notin R$

अतः R सममित संबंध नहीं है।

अब, मान लीजिए $(x, y) \in R$ तथा $(y, z) \in R$

$\Rightarrow x, y$ से ठीक-ठीक 7 सेमी लम्बा है तथा y, z से ठीक - ठीक 7 सेमी लम्बा है।

$\Rightarrow x, z$ से ठीक-ठीक 7 सेमी लम्बा नहीं हो सकता है।

$\Rightarrow$ $(x, z) \notin R$ अतः R संक्रमक संबंध नहीं है।

(d) $R = \{(x, y) : x, y$ की पत्नी है$\}$

चूँकि x, x की पत्नी नहीं हो सकती है। अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।

Durga Tutorial Ranjanpur

अब, मान लीजिए $(x, y) \in R \Rightarrow x, y$ की पत्नी है।
$\Rightarrow y, x$ की पत्नी नहीं हो सकती है।
$\Rightarrow$ $(y, x) \notin R$ अतः R, सममित संबंध नहीं है।
पुनः मान लीजिए
$(x, y) \in R \Rightarrow (y, z) \notin R$ क्योंकि x, y की पत्नी है, तो y पुरुष होगा।
इसलिए वह किसी की पत्नी नहीं हो सकती है। अतः R, संक्रमक संबंध नहीं है।

(e) $R = \{(x, y) : x, y$ के पिता हैं$\}$
चूँकि x, x का पिता नहीं हो सकता है।
$\therefore R$ स्वतुल्य संबंध नहीं है।
अब, मान लीजिए $(x, y) \in R \Rightarrow x, y$ के पिता हैं।
$\Rightarrow y, x$ के पिता नहीं हो सकते हैं।
$\Rightarrow (y, x) \notin R$
$\Rightarrow R$, सममित संबंध नहीं है।
अब, यदि $(x, y) \in R$, तो x, y के पिता हैं तथा $(y, z) \in R$, तो y, z के पिता हैं।
लेकिन अब x, z के पिता नहीं हो सकते हैं। अतः R संक्रमक संबंध नहीं है।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रमक है।

हल दिया है, $A = R =$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
तथा $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$
स्वतुल्य संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ सत्य नहीं है।
$\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin R$ अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।
सममित संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $-1 \leq 3^2 \Rightarrow (-1, 3) \in R$ लेकिन $3 \nleq (-1)^2$
$\Rightarrow (3, -1) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।
संक्रमक संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $2 \nleq (-3)^2 \therefore (2, -3) \in R$ तथा $(-3) \leq (1)^2$
$\therefore (-3, 1) \in R$ लेकिन $2 \nleq 1^2 \therefore (2, 1) \notin R$ अतः R एक संक्रमक संबंध नहीं है।

प्रश्न 3. जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में, $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य, सममित या संक्रमक है?

हल दिया है, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
तथा $R = \{(a, b) : b = a + 1\} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$
अब, चूँकि $6 \in A$ लेकिन $(6, 6) \notin R$ अतः R स्वतुल्य संबंध नहीं है। अब, $(1, 2) \in R$ लेकिन $(2, 1) \notin R$। अतः R सममित संबंध नहीं है, पुनः $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 3) \in R$ लेकिन $(1, 3) \notin R$, अतः R संक्रमक संबंध नहीं है। इसलिए R, स्वतुल्य संबंध, सममित संबंध तथा संक्रमक संबंध में से कोई नहीं है।

Durga Tutorial Baniapur

प्रश्न 4. **सिद्ध कीजिए कि R में $R = \{(a, b) : a \le b\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रमक है किंतु सममित नहीं है।**

हल दिया है, $A = R =$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय तथा $R = \{(a, b) : a \le b\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए, चूँकि प्रत्येक वास्तविक संख्या अपने से छोटी या अपने बराबर हो सकती है।

$\therefore$ $(x, x) \in R, \forall\, x \in A$ अतः R, स्वतुल्य संबंध है।

सममित संबंध के लिए, चूँकि 2, 3 से छोटी वास्तविक संख्या है।

$\therefore$ $(2, 3) \in R$ लेकिन 3, 2 से छोटी वास्तविक संख्या नहीं है।

$(3, 2) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

संक्रमक संबंध के लिए, मान लीजिए $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R$

$\Rightarrow$ $a \le b$ तथा $b \le c$

$\Rightarrow$ $a \le c \Rightarrow (a, c) \in R$ अतः R संक्रमक संबंध है।

इसलिए, R, स्वतुल्य तथा संक्रमक संबंध है लेकिन सममित संबंध नही है।

प्रश्न 5. **जाँच कीजिए कि क्या R में, $R = \{(a, b) : a \le b^3\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रमक है?**

हल दिया है, $A = R =$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय तथा $R = \{(a, b) : a \le b^3\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $\frac{1}{2} \not\le \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin R$, अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।

सममित संबंध के लिए, चूँकि $1 < 2^3 \therefore (1, 2) \in R$ लेकिन $2 \not< 1^3 \therefore (2, 1) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

संक्रमक संबंध के लिए, चूँकि $3 < \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \therefore \left(3, \frac{3}{2}\right) \in R$ तथा $\frac{3}{2} < \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125}$

$\therefore$ $\left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5}\right) \in R$ लेकिन $3 > \left(\frac{6}{5}\right)^3$

$\therefore \left(3, \frac{6}{5}\right) \notin R$ अतः R, संक्रमक संबंध नहीं है। इसलिए R, स्वतुल्य संबंध, सममित संबंध तथा संक्रमक संबंध में से कोई नहीं है।

प्रश्न 6. **सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में, $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R सममित है किंतु न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रमक है।**

हल दिया है, $A = \{1, 2, 3\}$

तथा $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$,

चूँकि $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \notin R$, $\therefore R$, स्वतुल्य संबंध नहीं है। अब, चूँकि $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 1) \in R$ $\therefore R$ सममित संबंध है। पुनः $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 1) \in R$ लेकिन $(1, 1) \notin R$ अतः R, संक्रमक संबंध नहीं है। इसलिए R, सममित संबंध है लेकिन R, स्वतुल्य संबंध तथा संक्रमक संबंध नहीं है।

Durga Tutorial Banmapur

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y) : x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

हल दिया है, $A =$ किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों का समुच्चय तथा $R = \{(x, y) : x$ तथा Y में पेजों की संख्या समान है$\}$

यहाँ, $(x, x) \in R, \forall x \in A$ क्योंकि पुस्तक x में पेजों की संख्या पुस्तक x के ही पेजों की संख्या के बराबर होगी। $\therefore R$, स्वतुल्य संबंध है। अब, मान लीजिए $(x, y) \in R \Rightarrow$ पुस्तक x तथा y में पेजों की संख्या समान है। $\Rightarrow$ पुस्तक y तथा x में पेजों की संख्या समान होगी। $\Rightarrow (y, x) \in R \therefore R$ एक सममित संबंध है।

पुन: मान लीजिए $(x, y) \in R$

$\Rightarrow$ पुस्तक x तथा पुस्तक y में पेजों की संख्या समान है तथा $(y, z) \in R$

$\Rightarrow$ पुस्तक y तथा पुस्तक z में पेजों की संख्या समान है। अतः पुस्तक x तथा z में पेजों की संख्या समान होगी।

$\Rightarrow$ $(x, z) \in R$

अतः R, एक संक्रमक संबंध है।

इसलिए R, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक संबंध है। अतः R, एक तुल्यता संबंध है।

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ में, $R = \{(a, b) : |a - b|$ सम है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। प्रमाणित कीजिए कि $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव एक-दूसरे से संबंधित हैं और समुच्चय $\{2, 4\}$ के सभी अवयव एक-दूसरे से संबंधित हैं परंतु $\{1, 3, 5\}$ का कोई भी अवयव $\{2, 4\}$ के किसी अवयव से संबंधित नहीं है।

हल दिया है, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा $R = \{(a, b) : |a - b|$ सम है$\}$

चूँकि सभी $a \in A$ के लिए, $|a - a| = 0$, जोकि सम है।

$\therefore$ $(a, a) \in R, \forall a \in A \quad \therefore R$, स्वतुल्य संबंध है।

अब, मान लीजिए $(a, b) \in R \Rightarrow |a - b|$ सम है।

$\Rightarrow$ $|-(b - a)|$ सम है।

$\Rightarrow$ $|b - a|$ सम है।

$\Rightarrow$ $(b, a) \in R, \forall a, b \in A \therefore R$, सममित संबंध है।

पुन: मान लीजिए $(a, b) \in R$

$\Rightarrow$ $|a - b|$ सम है।

$\Rightarrow$ $(a - b)$ सम है।

तथा $(b, c) \in R$

$\Rightarrow$ $|b - c|$ सम है। $\Rightarrow (b - c)$ सम है।

$\therefore$ $(a - b) + (b - c)$ सम है।

$\Rightarrow$ $(a - c)$ सम है। $\Rightarrow |a - c|$ सम है।

$\Rightarrow$ $(a, c) \in R \quad \therefore R$, संक्रमक संबंध है।

अतः R, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक संबंध है। इसलिए R, तुल्यता संबंध है। अब, चूँकि समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव विषम हैं। अतः समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ के किन्हीं दो अवयवों के अन्तर का मापांक सम होगा। इसलिए समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव संबंध R द्वारा एक-दूसरे से संबंधित है।

इसी प्रकार, चूँकि समुच्चय {2,4} के सभी अवयव सम हैं। अतः समुच्चय {2,4} के किन्हीं दो अवयवों के अन्तर का मापांक सम होगा। इसलिए समुच्चय {2,4} के सभी अवयव संबंध R द्वारा एक-दूसरे से संबंधित है।

पुनः चूँकि समुच्चय {1, 3, 5} के सभी अवयव विषम हैं तथा समुच्चय {2, 4} के सभी अवयव सम हैं। अतः समुच्चय {1, 3, 5} के किसी अवयव तथा समुच्चय {2, 4} के किसी एक अवयव के अन्तर का मापांक विषम होगा। इसलिए समुच्चय {1, 3, 5} का कोई अवयव,समुच्चय {2, 4} के किसी अवयव से, संबंध R द्वारा संबंधित नहीं है।

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$, में दिए गए निम्नलिखित संबंधों R में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$, 4 का एक गुणज है}

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

प्रत्येक दशा में 1 से संबंधित अवयवों को ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A = \{x \in Z : 0 \le x < 12\}$

$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$, 4 का एक गुणज है}

चूँकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $|a - a| = 0$, जोकि 4 का गुणज है। अतः R स्वतुल्य संबंध है। अब, मान लीजिए

$(a, b) \in R \Rightarrow |a - b|$, 4 का गुणज है।

$\Rightarrow$ $|-(b - a)|$, 4 का गुणज है।

$\Rightarrow$ $|b - a|$, 4 का गुणज है।

$\Rightarrow$ $(b, a) \in R, \forall a, b \in R$

अतः R सममित संबंध है। अब, मान लीजिए $(a, b), (b, c) \in R$, तब $|a - c|$ तथा $|b - c|$ 4 के गुणज हैं। $|a - c|$, 4 का गुणज है। $\therefore (a, c) \in R$

$\therefore$ R, संक्रमक संबंध है। अतः R, एक तुल्यता संबंध है।

अब चूँकि $|1 - 1| = 0$, जोकि 4 का गुणज है।

$|5 - 1| = 4$, जोकि 4 का गुणज है।

$|9 - 1| = 8$, जोकि 4 का गुणज है।

$\therefore$ 1 से संबंधित अवयव 1, 5, 9 हैं।

$\therefore$ $[1] = \{1, 5, 9\}$

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

चूँकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $a = a$ है। अतः $(a, a) \in R, \forall a \in A \therefore A$ स्वतुल्य संबंध है।

अब, मान लीजिए $(a, b) \in R \Rightarrow a = b \Rightarrow b = a \Rightarrow (b, a) \in R$, अतः R सममित संबंध है।

पुनः मान लीजिए

$(a, b), (b, c) \in R$

$\Rightarrow$ $a = b$ तथा $b = c$

$\Rightarrow$ $a = c$

$\Rightarrow$ $(a, c) \in R$

अतः R, एक संक्रमक संबंध है। इसलिए R, एक तुल्यता संबंध है।

अब, चूँकि $1 = 1$, इसलिए R द्वारा 1 से संबंधित अवयव केवल 1 है। अतः $[1] = 1$

Durga Tutorial
1996
Baniapur

प्रश्न 10. ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए, जो

(i) सममित हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रमक हो।

(ii) संक्रमक हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो।

(iii) स्वतुल्य तथा सममित हो किंतु संक्रमक न हो।

(iv) स्वतुल्य तथा संक्रमक हो किंतु सममित न हो।

(v) सममित तथा संक्रमक हो किंतु स्वतुल्य न हो।

हल

(i) मान लीजिए समुच्चय $A=\{5,6,7\}$ पर परिभाषित संबंध $R=\{(5,6),(6,5)\}$ है। चूँकि $(5,5)(6,6)(7,7)\notin R$ अत: R स्वतुल्य संबंध नहीं है। अब, चूँकि $(5,6)\in R$ तथा $(6,5)\in R$ अत: R, सममित संबंध है।

पुन: $(5,6)\in R, (6,5)\in R$ लेकिन $(5,5)\notin R$ अत: R संक्रमक संबंध नहीं है।

अत: समुच्चय $A=\{5,6,7\}$ पर परिभाषित संबंध $R=\{(5,6),(6,5)\}$, सममित संबंध है। लेकिन न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रमक संबंध है।

(ii) मान लीजिए वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संबंध $R=\{(a,b):a<b\}$ है।

यहाँ प्रत्येक $a\in R$ के लिए $(a,a)\notin R$ क्योंकि कोई भी वास्तविक संख्या अपने से छोटी नहीं हो सकती है। अत: R, स्वतुल्य संबंध नहीं है। अब, $(1,2)\in R$ क्योंकि $1<2$ लेकिन $(2,1)\notin R$ क्योंकि $2\not<1$ अत: R सममित संबंध नहीं है। पुन: मान लीजिए $(a,b),(b,c)\in R$, तब $a<b$ तथा $b<c$

$$\Rightarrow \quad a<c$$

$$\Rightarrow \quad (a,c)\in R$$

अत: R, एक संक्रमक संबंध है। इसलिए वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संबंध R एक संक्रमक संबंध है। लेकिन R न तो स्वतुल्य है और न ही सममित संबंध है।

(iii) मान लीजिए समुच्चय $A=\{4,6,8\}$ पर परिभाषित संबंध

$$R=\{(4,4),(6,6),(8,8),(4,6),(6,4),(6,8),(8,6)\}$$

है। चूँकि प्रत्येक $a\in A$ के लिए $(a,a)\in R$ अत: R एक स्वतुल्य संबंध है। पुन: प्रत्येक $(a,b)\in R$ के लिए $(b,a)\in R$ है। अत: R एक सममित संबंध है। अब, चूँकि $(4,6),(6,8)\in R$ लेकिन $(4,8)\notin R$ अत: R, एक संक्रमक संबंध नहीं है।

इसलिए समुच्चय $A=\{4,6,8\}$ पर परिभाषित संबंध $R=\{(4,4),(6,6),(8,8)(4,6),(6,4),(6,8),(8,6)\}$, स्वतुल्य, सममित संबंध है। लेकिन संक्रमक नहीं है।

(iv) मान लीजिए वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संबंध $R=\{(a,b):a^3\geq b^3\}$ है, तब चूँकि प्रत्येक $a\in A$ के लिए $(a,a)\in R$ है क्योंकि $a^3\geq b^3$ प्रत्येक $a\in R$ अत: R एक स्वतुल्य संबंध है। अब, $(2,1)\in R$ क्योंकि $2^3>1^3$, अर्थात् $8>1$ लेकिन $(1,2)\notin R$ क्योंकि $1^3\not>2^3$ अर्थात् $1\not>8$ अत: R, सममित संबंध नहीं है।

पुन: मान लीजिए

$$(a,b),(b,c)\in R$$

$$\Rightarrow \quad a^3\geq b^3 \text{ तथा } b^3\geq c^3$$

$$\Rightarrow \quad a^3\geq c^3$$

$\Rightarrow \quad (a, c) \in R$

अत: R, संक्रमक संबंध है।

इन वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संबंध $R = \{(a, b) : a^3 \geq b^3\}$ स्वतुल्य, संक्रमक संबंध है लेकिन सममित संबंध नहीं है।

(v) मान लीजिए समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ पर परिभाषित संबंध $R = \{(1, 1), (2, 2); (1, 2), (2, 1)\}$ है। चूँकि $(3, 3) \notin R$, अत: R, स्वतुल्य संबंध नहीं है। चूँकि $(1, 2) \in R$ तथा $(2, 1) \in R$ अत: R, सममित संबंध है। पुन: $(1, 2), (2, 1) \in R$

$\Rightarrow (1, 1) \in R$, उसी प्रकार $(2, 1), (1, 2) \in R \Rightarrow (2, 2) \in R$ अत: R संक्रमक संबंध है।

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिंदुओं के समुच्चय में, $R = \{(P, Q)$: बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी के समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। पुन: सिद्ध कीजिए कि बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय P से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है।

हल दिया है,

$R = \{(P, Q)$: बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी के समान है$\}$

चूँकि किसी बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी, बिन्दु P की मूलबिंदु से दूरी के बराबर होती है। अत: $(P, P) \in R, \forall P \in A$. अत: R, स्वतुल्य संबंध है। अब मान लीजिए $(P, Q) \in R$

$\Rightarrow$ बिन्दु P की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है।

$\Rightarrow$ बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है।

$\Rightarrow \quad (Q, P) \in R, \forall P, Q \in A$ अत: R, एक सममित संबंध है।

पुन: मान लीजिए

$(P, Q), (Q, S) \in P$

$\Rightarrow$ बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है तथा बिंदु Q की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु S की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है।

$\Rightarrow$ बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी, बिंदु S की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है।

$\Rightarrow \quad (P, S) \in R$

अत: R एक संक्रमक संबंध है। अत: R, एक तुल्यता संबंध है। अब, बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित वह बिंदु हो, जिनकी मूलबिंदु से दूरी, बिंदु P की मूलबिंदु से दूरी के बराबर है अर्थात् यदि $O(0, 0)$ मूलबिंदु है तथा $OP = k$, जहाँ k एक अचर है, तब बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित बिंदु, मूलबिंदु से अचर k दूरी पर होंगे। अत: बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित बिंदुओं का समुच्चय एक वृत्त है जिसका केन्द्र मूलबिंदु तथा यह वृत्त बिंदु P से होकर जाता है।

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के समरूप है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। भुजाओं 3, 4, 5 वाले समकोण त्रिभुज T_1, भुजाओं 5, 12, 13 वाले समकोण त्रिभुज T_2 तथा भुजाओं 6, 8, 10 वाले समकोण त्रिभुज T_3 पर विचार कीजिए। T_1, T_2 और T_3 में से कौन-से त्रिभुज परस्पर संबंधित हैं?

हल दिया है, $A =$ समस्त त्रिभुजों का समुच्चय, $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ के समरूप है$\}$

चूँकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के समरूप होता है। अत: R स्वतुल्य संबंध है। पुन: मान लीजिए $(T_1, T_2) \in R$

$\Rightarrow \quad T_1, T_2$ समरूप त्रिभुज हैं।

$\Rightarrow$ T_2, T_1 समरूप त्रिभुज हैं।

$\Rightarrow$ $(T_2, T_1) \in R, \forall T_1, T_2 \in A$

$\Rightarrow$ R, एक सममित संबंध है। पुनः मान लीजिए $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R$

$\Rightarrow$ T_1, T_2 समरूप त्रिभुज हैं तथा T_2, T_3 समरूप त्रिभुज हैं।

$\Rightarrow$ T_1, T_3 समरूप त्रिभुज है।

$\Rightarrow$ $(T_1, T_3) \in R, \forall T_1, T_3 \in A$

$\Rightarrow$ R, एक संक्रमक संबंध है।

इसलिए R एक तुल्यता संबंध है। अब, चूँकि $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)$

अतः त्रिभुजों T_1 तथा T_3 की संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं। अतः त्रिभुज T_1, त्रिभुज T_3 के समरूप है। अतः त्रिभुज T_1, त्रिभुज T_3 से संबंधित है।

प्रश्न 13. **सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान हैं$\}$ प्रकार से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। 3, 4 और 5 लम्बाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A के सभी अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।**

हल दिया है, $A =$ समस्त बहुभुजों का समुच्चय

तथा $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान हैं$\}$

स्पष्ट है कि $(P, P) \in R, \forall P \in A$ क्योंकि प्रत्येक बहुभुज P में भुजाओं की संख्या, बहुभुज P की भुजाओं की संख्या के बराबर है। अतः R, स्वतुल्य संबंध है।

अब, मान लीजिए $(P_1, P_2) \in R \Rightarrow$ बहुभुज P_1 तथा P_2 में भुजाओं की संख्या समान हैं।

$\Rightarrow$ बहुभुज P_2 तथा P_1 में भुजाओं की संख्या समान हैं।

$\Rightarrow$ $(P_2, P_1) \in R$

$\Rightarrow$ R, एक सममित संबंध है। पुनः मान लीजिए $(P_1, P_2), (P_2, P_3) \in R$

$\Rightarrow$ बहुभुज P_1 तथा P_2 में भुजाओं की संख्या समान हैं। P_2 तथा P_3 में भुजाओं की संख्या समान हैं।

$\Rightarrow$ P_1 तथा P_3 में भुजाओं की संख्या समान हैं।

$\Rightarrow$ $(P_1, P_3) \in R$

$\Rightarrow$ R, एक संक्रमक संबंध है। अतः R, एक तुल्यता संबंध है।

अब, भुजाओं 3, 4 तथा 5 वाले समकोण त्रिभुज से वह बहुभुज संबंधित होगा। जिसमें भुजाओं की संख्या तीन होगी। अतः भुजाओं 3, 4 तथा 5 वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित बहुभुज, त्रिभुज है।

प्रश्न 14. **मान लीजिए कि XY-तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है और L में, $R = \{(L_1, L_2) : L_1$ समान्तर है L_2 के$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित समस्त रेखाओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए।**

हल दिया है, $A = XY$-तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है।

तथा $R = \{(L_1, L_2) : L_1$ समान्तर है L_2 के$\}$

चूँकि प्रत्येक रेखा अपने के समान्तर होती है। अतः प्रत्येक $L \in A$ के लिए $(L, L) \in R$ अतः R, एक स्वतुल्य संबंध है।

Durga Tutorial Since 1996 Banjapur

पुनः मान लीजिए $(L_1, L_2) \in R, \forall L_1, L_2 \in A$

$\Rightarrow$ L_1, L_2 समान्तर रेखाएँ हैं।

$\Rightarrow$ L_2, L_1 समान्तर रेखाएँ हैं।

$\Rightarrow$ $(L_2, L_1) \in R, \forall L_1, L_2 \in A$

अतः R, एक सममित संबंध है। पुनः मान लीजिए $(L_1, L_2), (L_2, L_3) \in R$

$\Rightarrow$ L_1, L_2 समान्तर रेखाएँ हैं तथा L_2, L_3 समान्तर रेखाएँ हैं।

$\Rightarrow$ L_1 तथा L_3 समान्तर रेखाएँ हैं।

$\Rightarrow$ $(L_1, L_3) \in R, \forall L_1, L_2, L_3 \in R$

$\Rightarrow$ R, एक संक्रमक संबंध है। इसलिए R, एक तुल्यता संबंध है।

अब, रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित रेखाओं के समुच्चय में वह रेखाएँ होंगी, जो $y = 2x + 4$ के समान्तर होंगी। लेकिन रेखा $y = 2x + 4$ की प्रवणता 2 है। अतः रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित रेखाएँ $y = 2x + c$ के रूप की होगी जहाँ c एक अचर है।

प्रश्न 15. **मान लीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4} में,**

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$$

द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।

(a) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रमक नहीं है।

(b) R स्वतुल्य तथा संक्रमक है किंतु सममित नहीं है।

(c) R सममित तथा संक्रमक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

(d) R एक तुल्यता संबंध है।

हल (b) दिया है, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

तथा $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$

चूँकि $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$,

अतः $(a, a) \in R, \forall a \in A$

अतः R एक स्वतुल्य संबंध है।

अब, $(1, 2) \in R$ लेकिन $(2, 1) \notin R$ अतः R, एक सममित संबंध नहीं है।

पुनः यदि $(a, b), (b, c) \in R$

$\Rightarrow$ $(a, c) \in R, \forall a \in A$

$\Rightarrow R$ संक्रमक संबंध है। अतः R, स्वतुल्य तथा संक्रमक संबंध है लेकिन सममित संबंध नहीं है।

प्रश्न 16. **मान लीजिए कि समुच्चय N में, $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।**

(a) $(2, 4) \in R$ (b) $(3, 8) \in R$

(c) $(6, 8) \in R$ (d) $(8, 7) \in R$

हल (c) दिया है, $N =$ प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय

तथा $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$

चूँकि $b > 6$ है अतः $(2, 4) \notin R$ पुनः $3 \neq 8 - 2$ अतः $(3, 8) \notin R$ तथा $8 \neq 7 - 2$

अतः $(8, 7) \notin R$ लेकिन $6 = 8 - 2, 8 > 6$ अतः $(6, 8) \in R$

Tutorial Baniapur 1996

प्रश्नावली 1.2

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $f(x)=\frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R_* \to R_*$ एकैकी तथा आच्छादक है, जहाँ R_* सभी ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। यदि प्रांत R_* को N से बदल दिया जाए, जबकि सहप्रांत पूर्ववत् R_* ही रहे, तो भी क्या यह परिणाम सत्य होगा?

हल दिया गया फलन $f: R_* \to R_*$ में, $f(x)=\frac{1}{x}, \forall\, x \in R_*$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R_*$ इस प्रकार है कि $f(x)=f(y) \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{y} \Rightarrow x=y$

$\therefore f$ एकैकी फलन है। चूँकि प्रत्येक $y \in R_*$ के लिए $x=\frac{1}{y} \in R_*$

इस प्रकार है कि
$$f(x)=f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)}=y$$

अतः f आच्छादक फलन है।

$\therefore$ फलन f एकैकी आच्छादक फलन है।

पुनः मान लीजिए $g: N \to R_*$ में, $g(x)=\frac{1}{x}, \forall\, x \in N$

द्वारा परिभाषित फलन है। मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि
$$f(x)=f(y) \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{y} \Rightarrow x=y$$

$\therefore g$ एकैकी फलन है। अब, चूँकि $12 \in R_*$ के लिए N में कोई अवयव $x \in N$ इस प्रकार नहीं है कि
$$g(x)=\frac{1}{12}$$

अतः g एकैकी फलन है लेकिन आच्छादक फलन नहीं है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित फलनों की एकैक (Injective) तथा आच्छादी (Surjective) गुणों की जाँच कीजिए।

(i) $f(x)=x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: N \to N$ फलन है।

(ii) $f(x)=x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: Z \to Z$ फलन है।

(iii) $f(x)=x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: R \to R$ फलन है।

(iv) $f(x)=x^3$ द्वारा प्रदत्त $f: N \to N$ फलन है।

(v) $f(x)=x^3$ द्वारा प्रदत्त $f: Z \to Z$ फलन है।

हल (i) फलन $f: N \to N$ में, $f(x)=x^2, \forall\, x \in N$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि
$$f(x)=f(y)$$
$$\Rightarrow \quad x^2=y^2$$
$$\Rightarrow \quad x=y \qquad (\because x \text{ तथा } y \text{ दोनों धनात्मक हैं})$$

Durga Tutorial
1996
Banjapur

$\therefore f$ एकैकी फलन है। अब, चूँकि $2 \in N$ के लिए N में कोई $x \in N$ इस प्रकार नहीं है कि

$f(x) = 2,$

जैसे– $x^2 = 2$।

अत: f आच्छादक नहीं है। अत: f एकैकी फलन है लेकिन आच्छादक फलन नहीं है।

(ii) फलन $f : Z \rightarrow Z$ में,

$$f(x) = x^2, \forall\, x \in Z$$

द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $f(-1) = f(1) = 1$ लेकिन $-1 \neq 1$। अत: Z एकैकी फलन नहीं है।

अब, पुन: $-2 \in Z$ के लिए Z में कोई $x \in Z$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = -2$, अर्थात् $x^2 = -2$ अत: f आच्छादक फलन नहीं है।

इसलिए f न तो एकैकी फलन है और न ही आच्छादक फलन है।

(iii) फलन $f : R \rightarrow R$ में, $f(x) = x^2, \forall\, x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $f(-1) = f(1) = 1$ लेकिन $-1 \neq 1$

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

पुन: $-2 \in R$ के लिए, R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = -2$, अर्थात् $x^2 = -2$ अत: f आच्छादक फलन नहीं है। इसलिए f न तो एकैकी फलन है न ही आच्छादक फलन है।

(iv) फलन $f : N \rightarrow N$ में, $f(x) = x^3, \forall\, x \in N$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

पुन: $2 \in N$ के लिए, N में कोई $x \in N$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 2$ अर्थात् $x^3 = 2$

अत: f आच्छादक फलन नहीं है। इसलिए फलन f एकैकी फलन है लेकिन आच्छादक फलन नहीं है।

(v) फलन $f : Z \rightarrow Z$ में, $f(x) = x^3, \forall\, x \in Z$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

पुन: $2 \in Z$ के लिए Z में कोई $x \in Z$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 2 \Rightarrow x^3 = 2$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है। अत: फलन f एकैकी है लेकिन आच्छादक फलन नहीं है।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन $f : R \rightarrow R$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $[x]$, x से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है।

हल फलन $f : R \rightarrow R$ में, $f(x) = [x], \forall\, x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है, जहाँ $[x]$, x से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक फलन है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

चूँकि $f(1.2) = [1.2] = 1$

$f(1.9) = [1.9] = 1$

$\therefore$ $f(1.2) = f(1.9) = 1$ लेकिन $1.2 \neq 1.2$

$\therefore$ f एकैकी फलन नहीं है।

पुन: $0.7 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 0.7$ अर्थात् $[x] = 0.7$

$\therefore$ f आच्छादक फलन नहीं है।

अत: महत्तम पूर्णांक फलन न तो एकैकी है न ही आच्छादक है।

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x|$ द्वारा प्रदत्त मापांक फलन $f : R \to R$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $|x|$ बराबर x, यदि x धन या शून्य है तथा $|x|$ बराबर $-x$, यदि x ऋण है।

हल फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = |x|, \forall x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $f(-1) = f(1) = 1$ लेकिन $-1 \neq 1$

$\therefore$ f एकैकी फलन नहीं है।

पुन: $-1 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = -1$ अर्थात् $|x| = -1$

$\therefore$ f आच्छादक फलन नहीं है।

अत: मापांक फलन न तो एकैकी और न ही आच्छादक है।

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$ द्वारा प्रदत्त चिन्ह फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

हल फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $f(1) = f(2) = 1$ लेकिन $1 \neq 2$ है।

$\therefore$ f एकैकी फलन नहीं है। चूँकि f के परिसर में केवल तीन अवयव $-1, 0, 1$ हैं।

अत: $2 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 2$

$\therefore$ f आच्छादक फलन नहीं है।

$\therefore$ f न तो एकैकी न ही आच्छादक फलन है।

प्रश्न 6. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B तक एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

हल दिया है, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$

तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ $\therefore$ $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$

चूँकि फलन f द्वारा भिन्न-भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भिन्न हैं। अत: f एकैकी फलन है।

Durga Tutorial Since 1996 Bahiapur

प्रश्न 7. निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में बताइए कि क्या दिए हुए फलन एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी आच्छादी (bijective) हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $f(x) = 3 - 4x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ है।

(ii) $f(x) = 1 + x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ है।

हल (i) फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = 3 - 4x, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y)$$

$\Rightarrow$ $3 - 4x = 3 - 4y \Rightarrow x = y$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

पुनः प्रत्येक वास्तविक संख्या $y \in R$ के लिए $x = \frac{3-y}{4} \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f\left(\frac{3-y}{4}\right) = 3 - 4\left(\frac{3-y}{4}\right) = y$$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है। अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

(ii) फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = 1 + x^2, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y)$$

$\Rightarrow$ $1 + x^2 = 1 + y^2$

$\Rightarrow$ $x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$

जैसे $f(1) = f(-1) = 2 \therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

पुनः $-2 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = -2$

अर्थात् $1 + x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = -3$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है।

$\therefore f$ न तो एकैकी न ही आच्छादक फलन है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 8. मान लीजिए कि A तथा B दो समुच्चय हैं। सिद्ध कीजिए कि $f : A \times B \to B \times A$, इस प्रकार कि $f(a, b) = (b, a)$ एक एकैकी आच्छादी (bijective) फलन है।

हल $f : A \times B \to B \times A$ में, $f(a, b) = (b, a), \forall (a, b) \in A \times B$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$

इस प्रकार है कि $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2) \Rightarrow (b_1, a_1) = (b_2, a_2)$

$\Rightarrow$ $b_1 = b_2$ तथा $a_1 = a_2$

$\Rightarrow$ $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \therefore f$ एकैकी फलन है।

पुनः प्रत्येक $(a, b) \in A \times B$ के लिए $A \times B$ में (b, a) इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(b, a) = (a, b) \quad \therefore f \text{ आच्छादक फलन है।}$$

अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्न 9. मान लीजिए कि समस्त $n \in N$ के लिए,

$$f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ संख्या विषम है।}\\ \frac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ संख्या सम है।}\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित एक फलन $f:N \to N$ है। बताइए कि क्या फलन f एकैकी आच्छादी (bijective) है। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल फलन $f:N \to N$ में, $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, & \text{यदि } n \text{ विषम है।}\\ \frac{n}{2}, & \text{यदि } n \text{ सम है।}\end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $f(1)=\frac{1+1}{2}=1$

तथा $f(2)=\frac{2}{2}=1 \quad \therefore f(1)=f(2)=1$ लेकिन $1 \neq 2$

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

मान लीजिए $n \in N$

दशा I जब n विषम हो।

अतः $n=2r+1, r \in N$

तब, $4r+1 \in N$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(4r+1)=\frac{4r+1+1}{2}=2r+1$$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है।

दशा II जब n सम हो, तो $n=2r$ तो $4r \in N$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(4r)=\frac{4r}{2}=2r$$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है।

अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्न 10. मान लीजिए कि $A=R-\{3\}$ तथा $B=R-\{1\}$ है। $f(x)=\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $f:A \to B$ पर विचार कीजिए। क्या f एकैकी तथा आच्छादक है? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल दिया है, $A=R-\{3\}$

तथा $B=R-\{1\}$

अब, $f:A \to B$ में, $f(x)=\frac{x-2}{x-3}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in A$ इस प्रकार है कि $f(x)=f(y)$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x-3}=\frac{y-2}{y-3} \Rightarrow (x-2)(y-3)=(y-2)(x-3)$$

Durga Tutorial 1996 Banjapur

$$\Rightarrow \quad xy - 3x - 2y + 6 = xy - 3y - 2x + 6$$
$$\Rightarrow \quad -3x - 2y = -3y - 2x \Rightarrow 3x - 2x = 3y - 2y$$
$$\Rightarrow \quad x = y$$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

मान लीजिए $\quad y \in B = R - \{1\} \quad \therefore \quad y \neq -1$

तब, f आच्छादक फलन होगा, यदि $x \in A$ इस प्रकार विद्यमान हो कि $f(x) = y$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{x-3} = y \Rightarrow x - 2 = xy - 3y$$
$$\Rightarrow \quad x(1 - y) = -3y + 2$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{2-3y}{1-y} \in A \qquad (y \neq 1)$$

अत: प्रत्येक $y \in B$ के लिए $\quad x = \dfrac{2-3y}{1-y} \in A$

इस प्रकार है कि $\quad f(x) = f\left(\dfrac{2-3y}{1-y}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{2-3y}{1-y}\right) - 2}{\left(\dfrac{2-3y}{1-y}\right) - 3} = \dfrac{2-3y-2+2y}{2-3y-3+3y} = \dfrac{-y}{-1} = y$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है। अत: f एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्न 11. मान लीजिए कि $f : R \to R, f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए।

(a) f एकैकी आच्छादक है। (b) f बहुएक आच्छादक है।
(c) f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है। (d) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

हल फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = x^4, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^4 = y^4 \Rightarrow x = \pm y$$

जैसे– $f(1) = f(-1) = 1$ लेकिन $1 \neq -1$

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

पुन: $2 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$

इस प्रकार नहीं कि $f(x) = 2$ अर्थात् $x^4 = 2$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है।

अत: f न तो एकैकी न ही आच्छादक फलन है।

प्रश्न 12. मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ है। सही उत्तर चुनिए

(a) f एकैकी आच्छादक है। (b) f बहुएक आच्छादक है।
(c) f एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है। (d) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

Durga Tutorial Since 1996 Bariapur

हल फलन $f: R \to R$ में, $f(x) = 3x, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y \therefore f \text{ एकैकी फलन है।}$$

पुन: प्रत्येक वास्तविक संख्या $y \in R$ के लिए, $x = \frac{y}{3} \in R$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y}{3}\right) = 3\left(\frac{y}{3}\right) = y$$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है। अत: f एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्नावली 1.3

प्रश्न 1. मान लीजिए कि $f: \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$ तथा $g: \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$, $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ तथा $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त हैं। gof ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $f: \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$

तथा $g: \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$

क्रमशः $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$

तथा $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$

द्वारा परिभाषित फलन है।

$\therefore$ $gof(1) = g(f(1)) = g(2) = 3$ [$\because f(1) = 2$ तथा $g(2) = 3$]

$gof(3) = g(f(3)) = g(5) = 1$ [$\because f(3) = 5$ तथा $g(5) = 1$]

$gof(4) = g(f(4)) = g(1) = 3$ [$\because f(4) = 1$ तथा $g(1) = 3$]

$\therefore$ $gof = \{(1, 3), (3, 1), (4, 3)\}$

प्रश्न 2. मान लीजिए कि f, g तथा h, R से R तक दिए फलन हैं। सिद्ध कीजिए कि

$$(f + g)oh = foh + goh$$

$$(f \cdot g)oh = (foh) \cdot (goh)$$

हल सिद्ध करना है, $(f + g)oh = foh + goh$

बायाँ पक्ष $= ((f + g)oh)(x) = (f + g)(h(x))$

$= f(h(x)) + g(h(x))$

$= (foh)(x) + (goh)(x)$

$= \{(foh) + (goh)\}(x)$

$\therefore$ $((f + g)oh)(x) = \{(foh) + (goh)\}(x), \forall x \in R$

अत: $(f + g)oh = foh + goh$

सिद्ध करना है, $(f \cdot g)oh = (foh) \cdot (goh)$

बायाँ पक्ष $= ((f \cdot g)oh)(x) = (f \cdot g)(h(x))$

$= f(h(x)) \cdot g(h(x)) = (foh)(x) \cdot (goh)(x)$

$= \{(foh) \cdot (goh)\}(x)$

$\therefore$ $((f \cdot g)oh)(x) = \{(foh) \cdot (goh)\}(x), \forall x \in R$

अत: $(f \cdot g)oh = (foh) \cdot (goh)$

Durga Tutorial Banlapur

प्रश्न 3. *gof* तथा *fog* ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $f(x) = |x|$ तथा $g(x) = |5x - 2|$

(ii) $f(x) = 8x^3$ तथा $g(x) = x^{1/3}$

हल (i) $f(x) = |x|$ तथा $g(x) = |5x - 2|$

$\therefore \quad (gof)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = |5|x| - 2|$

तथा $\quad fog(x) = f(g(x)) = f(|5x - 2|) = ||5x - 2|| = |5x - 2|$

(ii) $f(x) = 8x^3$ तथा $g(x) = x^{1/3}$

$\therefore \quad (gof)(x) = g(f(x)) = g(8x^3) = (8x^3)^{1/3} = 2x$

तथा $\quad fog(x) = f(g(x)) = f(x^{1/3}) = 8(x^{1/3})^3 = 8x$

प्रश्न 4. यदि $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}, x \neq \frac{2}{3}$, तो सिद्ध कीजिए कि सभी $x \neq \frac{2}{3}$ के लिए $fof(x) = x$ है। f का प्रतिलोम फलन क्या है?

हल दिया है, $\quad f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}, x \neq \frac{2}{3}$

$$\therefore \quad (fof)(x) = f(f(x)) = f\left[\frac{(4x+3)}{(6x-4)}\right]$$

$$= \frac{4\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right) + 3}{6\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right) - 4} = \frac{16x + 12 + 18x - 12}{24x + 18 - 24x + 16} = \frac{34x}{34} = x$$

$\therefore \quad (fof)(x) = x, \forall x \neq \frac{2}{3} \Rightarrow fof = 1$

अतः दिया गया फलन f प्रतिलोमीय है तथा $f^{-1} = f$

प्रश्न 5. कारण सहित बताइए कि क्या निम्नलिखित फलनों के प्रतिलोम हैं

(i) $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{10\}$ जहाँ, $f = \{(1,10), (2,10), (3,10), (4,10)\}$

(ii) $g: \{5, 6, 7, 8\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ जहाँ, $g = \{(5,4), (6,3), (7,4), (8,2)\}$

(iii) $h: \{2, 3, 4, 5\} \to \{7, 9, 11, 13\}$ जहाँ, $h = \{(2,7), (3,9), (4,11), (5,13)\}$

हल (i) फलन $f: \{1,2,3,4\} \to \{10\}$ में, $f = \{(1,10), (2,10), (3,10), (4,10)\}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

$\therefore \quad f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 10$

लेकिन $\quad 1 \neq 2 \neq 3 \neq 4$

अतः f एकैकी फलन नहीं है। अतः f का प्रतिलोम विद्यमान नहीं है।

(ii) फलन $g: \{5, 6, 7, 8\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ में $g = \{(5,4), (6,3), (7,4), (8,2)\}$ द्वारा परिभाषित फलन है। $\therefore g(5) = 4, g(6) = 3, g(7) = 4, g(8) = 2$

$\Rightarrow \quad g(5) = g(7) = 4$ लेकिन $5 \neq 7 \therefore g$ एकैकी फलन नहीं है।

अतः g का प्रतिलोम विद्यमान नहीं है।

Durga Tutorial Since 1996 Banjapur

(iii) फलन $h:\{2,3,4,5\} \rightarrow \{7,9,11,13\}$ में,

$$h = \{(2,7),(3,9),(4,11),(5,13)\}$$

द्वारा परिभाषित फलन है। $\therefore h(2) = 7, h(3) = 9, h(4) = 11, h(5) = 13$

अतः h एकैकी आच्छादक फलन है। इसलिए h का प्रतिलोम विद्यमान है।

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि $f:[-1,1] \rightarrow R$, $f(x) = \frac{x}{(x+2)}$, द्वारा प्रदत्त फलन एकैकी है। फलन $f:[-1,1] \rightarrow$ (f का परिसर), का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

$y \in$ परिसर f, के लिए, $[-1,1]$ के किसी x के अंतर्गत $y = f(x) = \frac{x}{x+2}$, अर्थात् $x = \frac{2y}{(1-y)}$

हल फलन $f:[-1,1] \rightarrow R$ में, $f(x) = \frac{x}{(x+2)}$, $\forall x \in [-1,1]$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in [-1,1]$ इस प्रकार है कि $f(x) = f(y)$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+2} \Rightarrow xy + 2x = xy + 2y \Rightarrow 2x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = y$$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

मान लीजिए $\quad y = \frac{x}{x+2} \Rightarrow x = xy + 2y \Rightarrow \quad x = \frac{2y}{1-y}$

अतः सहप्रांत के प्रत्येक y (1 को छोड़कर) के लिए प्रांत में एक x इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(x) = y$$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है। अतः f का प्रतिलोम विद्यमान है।

मान लीजिए y, f के परास का स्वेच्छ अवयव है।

चूँकि $f:[-1,1] \rightarrow f$ का परास में आच्छादक फलन है। अतः $x \in [-1,1]$ इस प्रकार विद्यमान होगा कि $\quad f(x) = y$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x}{x+2} \quad \Rightarrow \quad xy + 2y = x \Rightarrow x(1-y) = 2y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2y}{1-y}, y \neq 1$$

अब, मान लीजिए g : f को परास $\rightarrow [-1,1]$ में $g(y) = \frac{2y}{1-y}$, $y \neq 1$ द्वारा परिभाषित है।

अब, $$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{2\left(\frac{x}{x+2}\right)}{1 - \frac{x}{x+2}} = \frac{2x}{x+2-x} = \frac{2x}{2} = x$$

$$(fog)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{2y}{1-y}\right) = \frac{\frac{2y}{1-y}}{\frac{2y}{1-y} + 2} = \frac{2y}{2y + 2 - 2y} = \frac{2y}{2} = y$$

अतः $\quad gof = fog = I_R$

अतः $\quad f^{-1} = g$

अतः $\quad f^{-1}(y) = \frac{2y}{1-y}, y \neq 1$

Durga Tutorial Baniapur 1996

प्रश्न 7. $f(x) = 4x + 3$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R \to R$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

हल फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = 4x + 3, \forall x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \quad 4x + 3 = 4y + 3$

$\Rightarrow \quad x = y$

$\therefore$ f एकैकी फलन है।

मान लीजिए प्रत्येक वास्तविक संख्या $y \in R$ के लिए R में, $x \in R$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(x) = y \Rightarrow 4x + 3 = y \Rightarrow x = \frac{y-3}{4}$$

$\therefore$ प्रत्येक $y \in R$ के लिए $x = \frac{y-3}{4} \in R$ इस प्रकार है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3 = y$$

$\therefore$ f आच्छादक फलन है। अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

अतः f^{-1} विद्यमान है। मान लीजिए $g : R \to R$ में, $g(x) = \frac{x-3}{4}$ द्वारा परिभाषित है।

अब, $$(gof)(x) = g(f(x)) = g(4x+3) = \frac{(4x+3)-3}{4} = x$$

$$(fog)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3 = y - 3 + 3 = y$$

अतः $$gof = fog = I_R \quad \text{अतः } f^{-1}(y) = g(y) = \frac{y-3}{4}$$

प्रश्न 8. $f(x) = x^2 + 4$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R_+ \to [4, \infty)$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा f का प्रतिलोम f^{-1}, $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$ द्वारा प्राप्त होता है, जहाँ R_+ सभी ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

हल फलन $f : R_+ \to [4, \infty)$ में,

$$f(x) = x^2 + 4, \forall x \in R_+$$

द्वारा परिभाषित है।

मान लीजिए $x, y \in R_+$ इस प्रकार है कि $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4 = y^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y^2$

$\Rightarrow \quad x = y \quad (\because x, y \in R^+)$

$\therefore$ f एकैकी फलन है।

अब, $y \in [4, \infty)$ के लिए, मान लीजिए

$$y = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y - 4 \geq 0 \quad (\because y \geq 4)$$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{y-4} \geq 0$

अतः प्रत्येक $y \in [4, \infty)$, $x \in R_+$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(x) = f(\sqrt{y-4}) = (\sqrt{y-4})^2 + 4 = y - 4 + 4 = y$$

$\therefore$ f आच्छादक फलन है। अतः f^{-1} विद्यमान है।

Durga Tutorial
Baniapur

मान लीजिए $g:[4,\infty)\to R^+$ में, $g(y)=\sqrt{y-4}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

अब, $$gof(x)=g(f(x))=g(x^2+4)=\sqrt{(x^2+4)-4}=\sqrt{x^2}=x$$

तथा $$fog(y)=f(g(y))=f(\sqrt{y-4})=(\sqrt{y-4})^2+4=(y-4)+4=y$$

अत: $gof=I_{R_+}$ तथा $fog=I_{[4,\infty)}$

अत: $f^{-1}(y)=g(y)=\sqrt{y-4}$

प्रश्न 9. $f(x)=9x^2+6x-5$ द्वारा प्रदत्त फलन $f:R_+\to[-5,\infty)$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा $f^{-1}(y)=\left[\frac{(\sqrt{y+6})-1}{3}\right]$ है।

हल फलन $f:R_+\to[-5,\infty)$ में, $f(x)=9x^2+6x-5$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x,y\in R_+$ इस प्रकार है कि $f(x)=f(y)$

$$\Rightarrow\quad 9x^2+6x-5=9y^2+6y-5\Rightarrow 9x^2+6x=9y^2+6y$$

$$\Rightarrow\quad 3x(3x+1)=3y(3y+1)\Rightarrow x=y$$

$\therefore$ f एकैकी फलन है।

मान लीजिए $y\in[-5,\infty)$ में इस प्रकार है कि

$$y=9x^2+6x-5$$

$$\Rightarrow\quad y=(3x+1)^2-1-5=(3x+1)^2-6$$

$$\Rightarrow\quad (3x+1)^2=y+6$$

$$\Rightarrow\quad 3x+1=\sqrt{y+6}\qquad[\because y\ge-5\Rightarrow y+6\ge0]$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}$$

$\therefore$ प्रत्येक $y\in[-5,\infty)$ के लिए $x=\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\in R_+$

इस प्रकार है कि $$f(x)=f\left(\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right)=y$$

अत: f आच्छादक फलन है। अत: f^{-1} विद्यमान है।

मान लीजिए $g:[-5,\infty)\to R_+$ में, $g(y)=\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

अब, $$(gof)(x)=g(f(x))=g(9x^2+6x-5)$$
$$=g((3x+1)^2-6)=\frac{\sqrt{(3x+1)^2-6+6}-1}{3}=\frac{3x+1-1}{3}=x$$

तथा $$(fog)(y)=f(g(y))=f\left(\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right)=\left[3\left(\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right)+1\right]^2-6$$
$$=(\sqrt{y+6})^2-6=y+6-6=y$$

$\therefore$ $gof=I_{R+}$ तथा $fog=I_{[-5,\infty)}\Rightarrow f^{-1}(y)=g(y)=\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}$

Durga Tutorial
since 1996
Baniapur

प्रश्न 10. मान लीजिए कि $f: X \to Y$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है। सिद्ध कीजिए कि f का प्रतिलोम फलन अद्वितीय (unique) है।

हल मान लीजिए $f: X \to Y$ में व्युत्क्रमणीय फलन है तथा f के दो प्रतिलोम g_1 तथा g_2 हैं।
तब, प्रत्येक $y \in Y$ के लिए $\Rightarrow fog_1(y) = I_y(y) = fog_2(y)$

$\Rightarrow$ $f(g_1(y)) = f(g_2(y))$

$\Rightarrow$ $g_1(y) = g_2(y)$ (f व्युत्क्रमणीय $\Rightarrow f$ एकैकी तथा आच्छादक है)

$\Rightarrow$ $g_1 = g_2$ अतः f का प्रतिलोम अद्वितीय है।

प्रश्न 11. $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$, $f(1) = a$, $f(2) = b$ तथा $f(3) = c$, द्वारा प्रदत्त फलन f पर विचार कीजिए। f^{-1} ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि $(f^{-1})^{-1} = f$ है।

हल फलन $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$

$f(1) = a, f(2) = b$ तथा $f(3) = c$ द्वारा दिया जाता है।

मान लीजिए $g: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ में, $g(a) = 1, g(b) = 2, g(c) = 3$ द्वारा दिया जाता है।

तब, $(fog)(a) = f(g(a)) = f(1) = a$

$(fog)(b) = f(g(b)) = f(2) = b$

$(fog)(c) = f(g(c)) = f(3) = c$

तथा $(gof)(1) = g(f(1)) = g(a) = 1$

$(gof)(2) = g(f(2)) = g(b) = 2$

$(gof)(3) = g(f(3)) = g(c) = 3$

अतः $gof = I_X$ तथा $fog = I_Y$

जहाँ $X = \{1, 2, 3\}$ तथा $Y = \{a, b, c\}$

अतः f का प्रतिलोम विद्यमान है तथा $f^{-1} = g$

$\therefore f^{-1}: (a, b, c) \to \{1, 2, 3\}$ में, $f^{-1}(a) = 1, f^{-1}(b) = 2, f^{-1}(c) = 3$ द्वारा दिया जाता है।

अब, हम f^{-1} का प्रतिलोम अर्थात् g का प्रतिलोम ज्ञात करेंगे।

मान लीजिए $h: \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ में,

$h(1) = a, h(2) = b, h(3) = c$ द्वारा दिया जाता है, तब

$(goh)(1) = g(h(1)) = g(a) = 1$

$(goh)(2) = g(h(2)) = g(b) = 2$

$(goh)(3) = g(h(3)) = g(c) = 3$

तथा $(hog)(a) = h(g(a)) = h(1) = a$

$(hog)(b) = h(g(b)) = h(2) = b$

$(hog)(c) = h(g(c)) = h(3) = c$

अतः $goh = I_X$ तथा $hog = I_Y$

जहाँ $X = \{1, 2, 3\}$ तथा $Y = \{a, b, c\}$

अतः g का प्रतिलोम विद्यमान है तथा $g^{-1} = h = (f^{-1})^{-1} = f$

अतः $h = f$

$\therefore$ $(f^{-1})^{-1} = f$

Durga Tutorial Since 1996 Bahlapur

1:35 PM

प्रश्न 12. मान लीजिए कि $f: X \to Y$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है। सिद्ध कीजिए कि f^{-1} का प्रतिलोम f है अर्थात् $(f^{-1})^{-1} = f$ है।

हल चूँकि $f: X \to Y$ में व्युत्क्रमणीय फलन है। अतः $g: Y \to X$ में फलन इस प्रकार होगा कि

$$gof = I_X$$

तथा $\quad fog = I_Y$

यहाँ, $\quad f^{-1} = g$

अब, $\quad gof = I_X$ तथा $fog = I_Y$

अतः: $\quad f^{-1}of = I_X$ तथा $fof^{-1} = I_Y$

अतः $f^{-1}: Y \to X$ में प्रतिलोमीय है तथा $(f^{-1})^{-1} = f$

प्रश्न 13. यदि $f: R \to R$, $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ द्वारा प्रदत्त है, तो $fof(x)$ बराबर है।

(a) $x^{1/3}$ (b) x^3 (c) x (d) $3 - x^3$

हल (c) फलन $f: R \to R$ में, $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

$\therefore \quad fof(x) = f(f(x)) = f((3 - x^3)^{1/3})$

$$= [3 - ((3 - x^3)^{1/3})^3]^{1/3} = [3 - (3 - x^3)]^{1/3} = (x^3)^{1/3} = x$$

$\therefore \quad fof(x) = x$

प्रश्न 14. मान लीजिए कि $f(x) = \frac{4x}{3x + 4}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f: R - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to R$ है। f का प्रतिलोम अर्थात् प्रतिचित्र (Map) g : परिसर $f \to R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$, निम्नलिखित में से किसके द्वारा प्राप्त होगा

(a) $g(y) = \frac{3y}{3 - 4y}$ (b) $g(y) = \frac{4y}{4 - 3y}$ (c) $g(y) = \frac{4y}{3 - 4y}$ (d) $g(y) = \frac{3y}{4 - 3y}$

हल (b) फलन $f: R - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to R$ में, $f(x) = \frac{4x}{3x + 4}$, $\forall\, x \in R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $y \in R$ के लिए $x \in R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(x) = y \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{3x + 4} = y$$

$$\Rightarrow \quad 3xy + 4y = 4x \quad \Rightarrow \quad x(4 - 3y) = 4y \Rightarrow x = \frac{4y}{4 - 3y}$$

मान लीजिए $g: f$ का परास $\to R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ में, $g(y) = \frac{4y}{4 - 3y}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

अब, $\quad (gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{4x}{3x + 4}\right)$

Durga Tutorial Baniapur

$$= \frac{4\left(\frac{4x}{3x+4}\right)}{4-3\left(\frac{4x}{3x+4}\right)} = \frac{16x}{12x+16-12x} = \frac{16x}{16} = x$$

तथा $\quad (fog)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{4y}{4-3y}\right)$

$$= \frac{4\left(\frac{4y}{4-3y}\right)}{3\left(\frac{4y}{4-3y}\right)+4} = \frac{16y}{12y+16-12y} = \frac{16y}{16} = y$$

$\therefore \quad gof = I_{R-\left\{-\frac{4}{3}\right\}}$ तथा $fog = I_R$

अत: f का प्रतिलोम g है। अर्थात् $f^{-1} = g$

प्रश्नावली 1.4

प्रश्न 1. निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित प्रत्येक संक्रिया * से एक द्विआधारी संक्रिया प्राप्त होती है या नहीं। उस दशा में जब * एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है, औचित्य भी बताइए।

(i) Z^+ में, $a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित संक्रिया *

(ii) Z^+ में, $a * b = ab$ द्वारा परिभाषित संक्रिया *

(iii) R में, संक्रिया *, $a * b = ab^2$ द्वारा परिभाषित

(iv) Z^+ में, संक्रिया *, $a * b = |a - b|$ द्वारा परिभाषित

(v) Z^+ में, संक्रिया *, $a * b = a$ द्वारा परिभाषित

हल (i) Z^+ में संक्रिया *

$a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित है।

चूँकि $1 * 2 = 1 - 2 = -1 \notin Z^+$

अत: $a * b = a - b$, Z^+ में द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

(ii) Z^+ में संक्रिया *, $a * b = ab$ द्वारा परिभाषित है। चूँकि हम जानते हैं कि दो धनात्मक पूर्णांक का गुणनफल भी एक धनात्मक पूर्णांक होता है। अत: प्रत्येक $a, b \in Z^+$ के लिए $a * b = ab \in Z^+$। अत: $a * b = ab$, Z^+ में द्विआधारी संक्रिया है।

(iii) R में संक्रिया *, $a * b = ab^2$ द्वारा परिभाषित है। चूँकि किसी वास्तविक संख्या का वर्ग भी एक वास्तविक संख्या होती है। पुन: हम जानते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं का गुणनफल भी एक वास्तविक संख्या होती है। अत: प्रत्येक $a, b \in R$ के लिए ab^2, R में एक अद्वितीय वास्तविक संख्या है। अत: R में संक्रिया *, जोकि $a * b = ab^2$ द्वारा परिभाषित है। एक द्विआधारी संक्रिया है।

Durga Tutorial
Baniapur

(iv) Z^+ में संक्रिया $*, a * b = |a - b|$ द्वारा परिभाषित है। चूँकि दो धनात्मक पूर्णांक के अन्तर का मापांक भी एक धनात्मक पूर्णांक होता है। अतः प्रत्येक $a, b \in Z^+$ के लिए $a * b = |a - b|$, Z^+ में एक अद्वितीय धनात्मक पूर्णांक है। अतः Z^+ में संक्रिया $a * b = |a - b|$ एक द्विआधारी संक्रिया है।

(v) Z^+ में संक्रिया $*, a * b = a$ द्वारा परिभाषित है। चूँकि प्रत्येक $a, b \in Z^+$ के लिए $a * b = a \in Z^+$। अतः Z^+ में संक्रिया $a * b = a$ एक द्विआधारी संक्रिया है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित परिभाषित प्रत्येक द्विआधारी संक्रिया * के लिए निर्धारित कीजिए कि क्या * द्विआधारी क्रमविनिमय है तथा क्या * साहचर्य है?

(i) Z में, $a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित

(ii) Q में, $a * b = ab + 1$ द्वारा परिभाषित

(iii) Q में, $a * b = \frac{ab}{2}$ द्वारा परिभाषित

(iv) Z में, $a * b = 2^{ab}$ द्वारा परिभाषित

(v) Z में, $a * b = a^b$ द्वारा परिभाषित

(vi) $R - \{-1\}$ में, $a * b = \frac{a}{b+1}$ द्वारा परिभाषित

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

हल (i) Z में संक्रिया $*, a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित है। चूँकि $1 * 2 = 1 - 2 = -1$ तथा $2 * 1 = 2 - 1 = 1$ अतः $1 * 2 \neq 2 * 1$ इसलिए Z में संक्रिया, $*$ जो $a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी क्रमविनिमय नहीं है।

पुनः $(1 * 2) * 3 = (1 - 2) * 3 = -1 * 3 = -1 - 3 = -4$

तथा $1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3)$

$= 1 * (-1) = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

$\therefore \quad (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$

अतः Z संक्रिया $*$, जो $a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित है, द्विआधारी साहचर्य नहीं है।

(ii) Q में संक्रिया $*$, $a * b = ab + 1$ द्वारा परिभाषित है। हम जानते हैं कि

$$\forall a, b \in Q \Rightarrow ab = ba$$

$$\Rightarrow \quad ab + 1 = ba + 1$$

$$\Rightarrow \quad a * b = b * a$$

अतः Q में संक्रिया $a * b = ab + 1$ द्विआधारी क्रमविनिमय है।

पुनः $(1 * 2) * 3 = (1 \cdot 2 + 1) * 3$

$= 3 * 3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$

तथा $1 * (2 * 3) = 1 * (2 \cdot 3 + 1) = 1 * (7) = 1 \cdot 7 + 1 = 8$

$\therefore \quad (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$

अतः Q में संक्रिया $a * b = ab + 1$ द्विआधारी साहचर्य नहीं है।

(iii) Q में संक्रिया $*, a * b = \frac{ab}{2}$ द्वारा परिभाषित है। चूँकि हम जानते हैं कि

सभी $a, b \in Q \Rightarrow ab = ba$

$$\Rightarrow \quad \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2} \Rightarrow a * b = b * a$$

अत: Q में संक्रिया $a * b = \frac{ab}{2}$ द्विआधारी क्रमविनिमय है।

पुन: सभी $a, b, c \in Q$ के लिए,

$$(a * b) * c = \left(\frac{ab}{2}\right) * c = \frac{\left(\frac{ab}{2}\right)c}{2} = \frac{abc}{4}$$

तथा $$a * (b * c) = a * \left(\frac{bc}{2}\right) = \frac{a\left(\frac{bc}{2}\right)}{2} = \frac{abc}{4}$$

अत: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in Q$

अत: Q में संक्रिया $a * b = \frac{ab}{2}$, एक द्विआधारी साहचर्य है।

(iv) Z^+ में द्विआधारी संक्रिया $*, a * b = 2^{ab}$ द्वारा परिभाषित है। हम जानते हैं कि

$\forall a, b \in Z^+ \Rightarrow ab = ba$

$$\Rightarrow \quad 2^{ab} = 2^{ba} \Rightarrow a * b = b * a$$

$\therefore Z^+$ में संक्रिया $a * b = 2^{ab}$ एक द्विआधारी क्रमविनिमय संक्रिया है।

पुन: $(1 * 2) * 3 = (2^{1 \cdot 2}) * 3 = (2^2) * 3 = 4 * 3 = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$

तथा $1 * (2 * 3) = 1 * (2^{2 \cdot 3}) = 1 * (2^6) = 1 * 64 = 2^{1 \cdot 64} = 2^{64}$

$\therefore \quad (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$

अत: Z^+ में संक्रिया $a * b = 2^{ab}$ द्विआधारी साहचर्य नहीं है।

(v) Z^+ में द्विआधारी संक्रिया $*, a * b = a^b$ द्वारा परिभाषित है। चूँकि

$1 * 2 = 1^2 = 1$

तथा $2 * 1 = 2^1 = 2$

$\therefore \quad 1 * 2 \neq 2 * 1$

अत: Z^+ में संक्रिया $a * b = a^b$ एक द्विआधारी क्रमविनिमय संक्रिया नहीं है।

पुन: $(2 * 3) * 4 = (2^3) * 4 = 8 * 4 = 8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$

तथा $2 * (3 * 4) = 2 * (3^4) = 2^{3^4} = 2^{81}$

$\therefore \quad (2 * 3) * 4 \neq 2 * (3 * 4)$

अत: Z^+ में संक्रिया $a * b = a^b$ द्विआधारी साहचर्य नहीं है।

(vi) $R - \{-1\}$ में संक्रिया $*, a * b = \frac{a}{b+1}$ द्वारा परिभाषित है। चूँकि

$$1 * 2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \text{ तथा } 2 * 1 = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore \quad 1 * 2 \neq 2 * 1$

अत: $R - \{-1\}$ में संक्रिया $a * b = \frac{a}{b+1}$ द्विआधारी क्रमविनिमय नहीं है।

Durga Tutorial
Baniapur

पुन: $(1 * 2) * 3 = \left(\frac{1}{2+1}\right) * 3 = \left(\frac{1}{3}\right) * 3 = \frac{\frac{1}{3}}{3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{12}$

तथा $1 * (2 * 3) = 1 * \left(\frac{2}{3+1}\right) = 1 * \frac{2}{4} = 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$\therefore \quad (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$

अत: $R - \{-1\}$ में संक्रिया $a * b = \frac{a}{b+1}$ द्विआधारी साहचर्य नहीं है।

प्रश्न 3. **समुच्चय** $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ **में** $a \wedge b =$ **निम्नतम** $\{a, b\}$ **द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया पर विचार कीजिए। संक्रिया** $\wedge$ **के लिए संक्रिया सारणी लिखिए।**

हल समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ में संक्रिया $a \wedge b =$ निम्नतम $\{a, b\}$ द्वारा परिभाषित है। जोकि एक द्विआधारी संक्रिया है।

संक्रिया $\wedge$ के लिए संक्रिया सारणी

$\wedge$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

Durga Tutorial
Since 1996
Banipur

प्रश्न 4. **समुच्चय** $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ **में, निम्नलिखित संक्रिया सारणी द्वारा परिभाषित, द्विआधारी संक्रिया * पर विचार कीजिए तथा**

(i) $(2 * 3) * 4$ तथा $2 * (3 * 4)$ का परिकलन कीजिए।

(ii) क्या * क्रमविनिमय है?

(iii) $(2 * 3) * (4 * 5)$ का परिकलन कीजिए।

निम्न सारणी का प्रयोग कीजिए।

संक्रिया * के लिए संक्रिया सारणी

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

हल (i) $(2 * 3) * 4 = 1 * 4 = 1$

तथा $2 * (3 * 4) = 2 * 1 = 1$

(ii) चूँकि प्रत्येक $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ के लिए $a * b = b * a$ है।

अतः समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ में संक्रिया * द्विआधारी क्रमविनिमय संक्रिया है।

(iii) $(2 * 3) * (4 * 5) = 1 * 1 = 1$

प्रश्न 5. मान लीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में एक द्विआधारी संक्रिया $*'$, $a *' b = a$ तथा b का HCF द्वारा परिभाषित है। क्या संक्रिया $*'$ उपरोक्त प्रश्न 4 में परिभाषित संक्रिया * के समान है? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में द्विआधारी संक्रिया $*'$, $a *' b = a$ तथा b का HCF द्वारा परिभाषित है। द्विआधारी संक्रिया * के लिए संक्रिया सारणी निम्न है

$*'$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

यह संक्रिया सारणी प्रश्न 4 में दी गई संक्रिया सारणी के समान है। अतः द्विआधारी संक्रिया $*'$ उपरोक्त प्रश्न 4 में परिभाषित संक्रिया * के समान है।

प्रश्न 6. मान लीजिए कि N में एक द्विआधारी संक्रिया *, $a * b = a$ तथा b का LCM द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

(i) $5 * 7$, $20 * 16$

(ii) क्या संक्रिया * क्रमविनिमय है?

(iii) क्या * साहचर्य है?

(iv) N में * का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।

(v) N के कौन-से अवयव * संक्रिया के लिए व्युत्क्रमणीय हैं?

हल N में एक द्विआधारी संक्रिया *, $a * b = a$ तथा b का LCM द्वारा परिभाषित है।

(i) $5 * 7 = 5$ तथा 7 का LCM $= 35$

तथा $20 * 16 = 20$ तथा 16 का LCM $= 80$

(ii) हम जानते हैं कि

a तथा b का LCM $= b$ तथा a का LCM

$\Rightarrow \quad a * b = b * a, \forall a, b \in N$

अतः N में संक्रिया $a * b = a$ तथा b का LCM

एक द्विआधारी क्रमविनिमय संक्रिया है।

(iii) प्रत्येक $a, b, c \in N$ के लिए

$(a * b) * c = (a$ तथा b का LCM$) * c = a, b$ तथा c का LCM

तथा $a * (b * c) = a * (b$ तथा c का LCM$) = a, b$ तथा c का LCM

अतः $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in N$

अतः N में संक्रिया $a * b = a$ तथा b का LCM एक द्विआधारी साहचर्य संक्रिया है।

(iv) हम जानते हैं कि

$$a \text{ तथा } 1 \text{ का LCM} = 1 \text{ तथा } a \text{ का LCM} = a, \forall a \in N$$

अतः N में संक्रिया $*$ का तत्समक अवयव है।

(v) अवयव $a \in N$ संक्रिया $*$ के लिए व्युत्क्रमणीय होगा, यदि N में एक अवयव b इस प्रकार विद्यमान हो कि

$$a * b = b * a = e$$

जहाँ $e = 1$ अर्थात् a तथा b का LCM $= b$ तथा a का LCM $= 1$

$\Rightarrow \quad a = b = 1$

अत : N में संक्रिया $*$ के सापेक्ष केवल 1 ही व्युत्क्रमणीय अवयव है।

प्रश्न 7. क्या समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में $a * b = a$ तथा b का LCM द्वारा परिभाषित $*$ एक द्विआधारी संक्रिया है? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में संक्रिया $*$, $a * b = a$ तथा b का LCM द्वारा परिभाषित है।

$\because \quad 2 * 3 = 2$ तथा 3 का LCM $= 6 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$

अतः समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में संक्रिया $*$, द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

प्रश्न 8. मान लीजिए कि N में $a * b = a$ तथा b का HCF द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है। क्या $*$ क्रमविनिमय है? क्या $*$ साहचर्य है? क्या N में इस द्विआधारी संक्रिया के तत्समक का अस्तित्व है?

हल दिया है, N में द्विआधारी संक्रिया $*$,

$a * b = a$ तथा b का HCF द्वारा परिभाषित है।

चूँकि हम जानते हैं कि

a तथा b का HCF $= b$ तथा a का HCF

$\Rightarrow \quad a * b = b * a, \forall a, b \in N$

अतः N में द्विआधारी संक्रिया $a * b = a$ तथा b का HCF द्विआधारी क्रमविनिमय संक्रिया है।

पुनः $\quad (a * b) * c = (a$ तथा b का HCF$) * c = a, b$ तथा c का HCF

तथा $\quad a * (b * c) = a * (b$ तथा c का HCF$) = a, b$ तथा c का HCF

$\therefore \quad (a * b) * c = a * (b * c, \forall a, b, c \in N)$

अतः N में संक्रिया $a * b = a$ तथा b का HCF एक द्विआधारी साहचर्य संक्रिया है।

पुनः अवयव $e \in N$ तत्समक होगा, यदि

$$e * a = a * e = a, \forall a \in N$$

लेकिन N में द्विआधारी संक्रिया $a * b = a$ तथा b का HCF के संबंध में ऐसा कोई अवयव नहीं है। अतः N में तत्समक अवयव विद्यमान नहीं है।

प्रश्न 9. मान लीजिए कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित $*$ एक द्विआधारी संक्रिया है

(i) $a * b = a - b$ (ii) $a * b = a^2 + b^2$

(iii) $a * b = a + ab$ (iv) $a * b = (a - b)^2$

(v) $a * b = \frac{ab}{4}$ (vi) $a * b = ab^2$

ज्ञात कीजिए कि इनमें से कौन-सी संक्रियाएँ क्रमविनिमय हैं और कौन-सी साहचर्य हैं?

हल (i) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में संक्रिया $*$, $a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित है।

चूँकि $2 * 3 = 2 - 3 = -1$

तथा $3 * 2 = 3 - 2 = 1$

$\therefore$ $2 * 3 \neq 3 * 2$

अतः Q में संक्रिया $a * b = a - b$ द्विआधारी क्रमविनिमय नहीं है।

पुनः $(2 * 3) * 4 = (2 - 3) * 4 = -1 * 4 = -1 - 4 = -5$

तथा $2 * (3 * 4) = 2 * (3 - 4) = 2 * (-1) = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

$\therefore$ $(2 * 3) * 4 \neq 2 * (3 * 4)$

अतः Q में संक्रिया $a * b = a - b$ द्विआधारी साहचर्य नहीं है।

(ii) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में संक्रिया $*$, $a * b = a^2 + b^2$ द्वारा परिभाषित है।

चूँकि प्रत्येक $a, b \in Q$ के लिए,

$$a * b = a^2 + b^2 = b^2 + a^2 = b * a$$

$\therefore$ $a * b = b * a, \forall a, b \in Q$

अतः Q में द्विआधारी संक्रिया $a * b = a^2 + b^2$

एक द्विआधारी क्रमविनिमय संक्रिया है।

पुनः $(1 * 2) * 3 = (1^2 + 2^2) * 3 = 5 * 3 = 5^2 + 3^2 = 34$

तथा $1 * (2 * 3) = 1 * (2^2 + 3^2) = 1 * 13 = 1^2 + 13^2 = 170$

$\therefore$ $(1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$

अतः Q में द्विआधारी संक्रिया $a * b = a^2 + b^2$ द्विआधारी साहचर्य संक्रिया नहीं है।

(iii) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में संक्रिया $*$, $a * b = a + ab$ द्वारा परिभाषित है।

चूँकि $1 * 2 = 1 + 1 \cdot 2 = 3$

तथा $2 * 1 = 2 + 2 \cdot 1 = 4$

$\therefore$ $1 * 2 \neq 2 * 1$

अतः Q में द्विआधारी संक्रिया $a * b = a + ab$ द्विआधारी क्रमविनिमय नहीं है।

पुनः $(1 * 2) * 3 = (1 + 1 \cdot 2) * 3 = 3 * 3 = 3 + 3 \cdot 3 = 12$

तथा $1 * (2 * 3) = 1 * (2 + 2 \cdot 3) = 1 * 8 = 1 + 1 \cdot 8 = 9$

$\therefore$ $(1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$

$\therefore$ Q में द्विआधारी संक्रिया $a * b = a + ab$ द्विआधारी साहचर्य नहीं है।

(iv) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में द्विआधारी संक्रिया $*$, $a * b = (a - b)^2$ द्वारा परिभाषित है।

चूँकि प्रत्येक $a, b \in Q$ के लिए,

$$a * b = (a - b)^2 = (b - a)^2 = b * a$$

$\therefore$ $a * b = b * a, \forall a, b \in Q$

अतः Q में द्विआधारी संक्रिया $a * b = (a - b)^2$ एक द्विआधारी क्रमविनिमय संक्रिया है।

पुनः $(1 * 2) * 3 = (1 - 2)^2 * 3 = (-1)^2 * 3 = 1 * 3 = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$

तथा $1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3)^2 = 1 * (-1)^2 = 1 * 1 = (1 - 1)^2 = 0$

$\therefore$ $(1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$

अतः Q में द्विआधारी संक्रिया $a * b = (a - b)^2$ द्विआधारी साहचर्य संक्रिया नहीं है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

(v) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में द्विआधारी संक्रिया $*$, $a * b = \frac{ab}{4}$ द्वारा परिभाषित है।

चूँकि प्रत्येक $a, b \in Q$ के लिए,

$$a * b = \frac{ab}{4} = \frac{ba}{4} = b * a$$

$\therefore$ $$a * b = b * a, \forall a, b \in Q$$

अतः Q में द्विआधारी संक्रिया $a * b = \frac{ab}{4}$ द्विआधारी क्रमविनिमय संक्रिया है।

पुनः प्रत्येक $a, b, c \in Q$ के लिए,

$$(a * b) * c = \left(\frac{ab}{4}\right) * c = \frac{abc}{4}$$

तथा $$a * (b * c) = a * \left(\frac{bc}{4}\right) = \frac{abc}{4}$$

$\therefore$ $$(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in Q$$

अतः Q में संक्रिया $a * b = \frac{ab}{4}$ द्विआधारी साहचर्य संक्रिया है।

(vi) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में द्विआधारी संक्रिया $*$, $a * b = ab^2$ द्वारा परिभाषित है।

चूँकि $$2 * 3 = 2 \cdot 3^2 = 18$$

तथा $$3 * 2 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$\therefore$ $$2 * 3 \neq 3 * 2$$

अतः Q में द्विआधारी संक्रिया $a * b = ab^2$ द्विआधारी क्रमविनिमय नहीं है।

पुनः $$\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] * \frac{1}{4} = \frac{1}{18} * \frac{1}{4} = \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{18 \times 16}$$

$$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} * \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{2} * \frac{1}{48} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{48}\right)^2 = \frac{1}{4608}$$

$$\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right), \text{ जहाँ } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \in Q$$

अतः Q में द्विआधारी संक्रिया $a * b = ab^2$ द्विआधारी साहचर्य नहीं है।

अतः भाग (ii), (iv), (v) में परिभाषित द्विआधारी संक्रियाएँ द्विआधारी क्रमविनिमय है। जबकि भाग (v) में परिभाषित संक्रियाएँ द्विआधारी साहचर्य है।

प्रश्न 10. प्रश्न 9 में दी गई संक्रियाओं में किसी का तत्समक है, वह बताइए।

हल एक अवयव $e \in Q$ तत्समक कहलाता है। यदि $a * e = e * a = a, \forall a \in Q$

(i) $a * b = a - b$

यदि $$a * e = a, a \neq 0$$

$\Rightarrow$ $$a - e = a, e \neq 0 \Rightarrow e = 0$$

पुनः $$e * a = a, a \neq 0$$

$\Rightarrow$ $$e - a = a, a \neq 0 \Rightarrow e = 2a$$

$\therefore$ $$e = 0 = 2a, a \neq 0$$

लेकिन तत्सम अवयव अद्वितीय होता है। अतः परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में परिभाषित द्विआधारी संक्रिया $a * b = a - b$ के सापेक्ष तत्समक विद्यमान नहीं है।

(ii) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में संक्रिया $*$, $a * b = a^2 + b^2$ द्वारा परिभाषित है।

यदि $a * e = a \Rightarrow a^2 + e^2 = a$

लेकिन $a = -2$ के लिए $(-2)^2 + e^2 = 4 + e^2 \neq -2$

$\therefore$ Q में संक्रिया $a * b = a^2 + b^2$ के सापेक्ष कोई तत्समक अवयव नहीं है।

(iii) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में द्विआधारी संक्रिया $*$, $a * b = a + ab$ द्वारा परिभाषित है।

यदि $a * e = a, a \neq 0$

$\Rightarrow$ $a + ae = a, a \neq 0 \Rightarrow ae = 0, a \neq 0$

$\Rightarrow$ $e = 0, a \neq 0$

पुनः $e * a = a, a \neq 0 \Rightarrow e + ea = a, a \neq 0$

$\Rightarrow$ $e = \dfrac{a}{1-a}, a \neq 0$

$\therefore$ $e = 0 = \dfrac{a}{1-a}, a \neq 0$

लेकिन तत्समक अवयव अद्वितीय होता है।

अतः Q में संक्रिया $a * b = a + ab$ के सापेक्ष कोई तत्समक अवयव विद्यमान नहीं है।

(iv) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में संक्रिया $*$, $a * b = (a - b)^2$ द्वारा परिभाषित है।

यदि $a * e = a, a \neq 0 \Rightarrow (a - e)^2 = a, a \neq 0$

$\therefore a = -2$ के लिए,

$(-2 - e)^2 \neq -2$ ($\because$ वर्ग हमेशा धनात्मक होता है)

अतः Q में संक्रिया $a * b = (a - b)^2$ के सापेक्ष कोई तत्समक अवयव विद्यमान नहीं है।

(v) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में संक्रिया $*$, $a * b = \dfrac{ab}{4}$ द्वारा परिभाषित है।

यदि $a * e = a, a \neq 0 \Rightarrow \dfrac{ae}{4} = a, a \neq 0$

$\Rightarrow$ $e = 4$

पुनः $e * a = a, a \neq 0$

$\Rightarrow$ $\dfrac{ea}{4} = a, a \neq 0 \Rightarrow e = 4$

अतः Q में संक्रिया $a * b = \dfrac{ab}{4}$ के सापेक्ष $e = 4$ तत्समक अवयव है।

(vi) परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में, संक्रिया $*$, $a * b = ab^2$ द्वारा परिभाषित है।

यदि $a * e = a, a \neq 0$

$\Rightarrow$ $ae^2 = a, a \neq 0 \Rightarrow e^2 = 1, a \neq 0 \Rightarrow e = \pm 1$

लेकिन तत्समक अवयव अद्वितीय होता है। अतः Q में संक्रिया $a * b = ab^2$ के सापेक्ष कोई तत्समक अवयव नहीं है।

Durga Tutorial Since Baniapur

प्रश्न 11. मान लीजिए कि $A = N \times N$ है तथा A में, $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है। सिद्ध कीजिए कि $*$ क्रमविनिमय तथा साहचर्य है। A में $*$ का तत्समक अवयव, यदि कोई है, तो ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि समुच्चय $A = N \times N$ में द्विआधारी संक्रिया $*$,

$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए $a, b, c, d \in N$, तब

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) * (a, b)$$

$\therefore \quad (a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b), \forall (a, b), (c, d) \in A = N \times N$

अतः समुच्चय $A = N \times N$ में द्विआधारी संक्रिया $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ एक द्विआधारी क्रमविनिमय संक्रिया है।

पुनः मान लीजिए $a, b, c, d, e, f \in N$ है।

तब, $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a + c, b + d) * (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f)$

$= (a + (c + e), b + (d + f)) = (a, b) * (c + e, d + f)$

$= (a, b) * ((c, d) * (e, f))$

$\therefore \quad ((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a, b) * ((c, d) * (e, f)),$

$\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in A = N \times N$

अतः समुच्चय $A = N \times N$ में संक्रिया $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ एक द्विआधारी साहचर्य संक्रिया है।

एक अवयव $e = (e_1, e_2) \in A = N \times N$ तत्समक अवयव होगा।

यदि $\quad a * e = a = e * a, \forall a = (a_1, a_2) \in A$

$\Rightarrow \quad (a_1, a_2) * (e_1, e_2) = (a_1, a_2) = (e_1, e_2) * (a_1, a_2)$

$\Rightarrow \quad (a_1 + e_1, a_2 + e_2) = (a_1, a_2) = (e_1 + a_1, e_2 + a_2)$

जोकि $A = N \times N$ के किसी भी अवयव के लिए सत्य नहीं है क्योंकि $a + e = e_1$

$\Rightarrow e = 0$ लेकिन $0 \notin N$ अतः $A = N \times N$ में संक्रिया $* (a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ के सापेक्ष कोई तत्समक अवयव विद्यमान नहीं है।

प्रश्न 12. बताइए कि क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। औचित्य भी बताइए।

(i) समुच्चय N में किसी भी स्वेच्छ द्विआधारी संक्रिया $*$ के लिए $a * a = a, \forall a \in N$

(ii) यदि N में $*$ एक क्रमविनिमय द्विआधारी संक्रिया है, तो $a * (b * c) = (c * b) * a$

हल

(i) मान लीजिए समुच्चय N में एक द्विआधारी संक्रिया $*$

$a * b = a + b, \forall a, b \in N$ द्वारा परिभाषित है।

मान लीजिए $\quad a = b = 3$

तब $\quad a * b = 3 * 3 = 3 + 3 = 6 \neq 3$

अतः कथन (i) असत्य है।

(ii) दायाँ पक्ष $= (c * b) * a = (b * c) * a \qquad (\because *$ क्रमविनिमय है)

$= a * (b * c) \qquad$ (पुनः चूँकि $*$ क्रमविनिमय है)

$=$ बायाँ पक्ष

अतः $\quad a * (b * c) = (c * b) * a$

इसलिए कथन (ii) सत्य है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 13. $a*b = a^3 + b^3$ प्रकार से परिभाषित N में एक द्विआधारी संक्रिया * पर विचार कीजिए। अब निम्नलिखित में से सही उत्तर का चयन कीजिए।

(a) * साहचर्य तथा क्रमविनिमय दोनों हैं।
(b) * क्रमविनिमय है किंतु साहचर्य नहीं है।
(c) * साहचर्य है किंतु क्रमविनिमय नहीं है।
(d) * न तो क्रमविनिमय है और न साहचर्य है।

हल (b) प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N में द्विआधारी संक्रिया *, $a*b = a^3 + b^3, \forall a, b \in N$ द्वारा परिभाषित है।

मान लीजिए $a, b \in N$, तब

$$a*b = a^3 + b^3 = b^3 + a^3 = b*a$$

∴ $$a*b = b*a, \forall a, b \in N$$

पुनः $$(1*2)*3 = (1^3 + 2^3)*3 = 9*3 = 9^3 + 3^3 = 729 + 27 = 756$$

तथा $$1*(2*3) = 1*(2^3 + 3^3) = 1*(8+27) = 1*35$$

$$= 1^3 + 35^3 = 1 + 42875 = 42876$$

∴ $$(1*2)*3 \neq 1*(2*3)$$

अतः N में द्विआधारी संक्रिया $a*b = a^3 + b^3$ द्विआधारी साहचर्य नहीं है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. मान लीजिए कि $f: R \to R, f(x) = 10x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन है। एक ऐसा फलन $g: R \to R$ ज्ञात कीजिए जिसके लिए $gof = fog = I_R$ हो।

हल दिया गया फलन $f: R \to R$

$$f(x) = 10x + 7 \text{ द्वारा परिभाषित है।}$$

मान लीजिए $$f(x) = f(y)$$

⇒ $$10x + 7 = 10y + 7 \Rightarrow 10x = 10y$$

⇒ $$x = y \therefore \forall x, y \in R, f(x) = f(y)$$

⇒ $$x = y$$

अतः f एकैकी फलन है।

पुनः माना $y \in R$ (परिसर) इस प्रकार है कि $f(x) = y$, जहाँ $x \in R$ (प्रांत)

⇒ $$10x + 7 = y \Rightarrow x = \frac{y-7}{10} \in R \text{ (प्रांत)}$$

अतः प्रत्येक $y \in R$ (परिसर) के लिए R (प्रांत) में एक अवयव $x = \frac{y-7}{10}$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y-7}{10}\right) = 10\left(\frac{y-7}{10}\right) + 7 = y - 7 + 7 = y$$

अतः f आच्छादक फलन है।

मान लीजिए $g : R \to R$

$$g(y) = \frac{y-7}{10} \text{ द्वारा परिभाषित है।}$$

तब, $$(gof)(x) = g(f(x)) = g(10x+7) = \frac{(10x+7)-7}{10} = \frac{10x}{10} = x$$

तथा $$(fog)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y-7}{10}\right) = 10\left(\frac{y-7}{10}\right) + 7 = y$$

$\therefore$ $gof = I_R$ तथा $fog = I_R$

अतः अभीष्ट फलन $g : R \to R$

$$g(y) = \frac{y-7}{10} \text{ द्वारा परिभाषित है।}$$

प्रश्न 2. मान लीजिए कि $f : W \to W$, $f(n) = n - 1$, यदि n विषम है तथा $f(n) = n + 1$, यदि n सम है, द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। यहाँ W समस्त पूर्णांकों का समुच्चय है।

हल दिया गया फलन $f : W \to W$, $f(n) = \begin{cases} n-1, \text{ यदि } n \text{ विषम है} \\ n+1, \text{ यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

मान लीजिए $f(n) = f(m)$

अब, यदि n विषम तथा m सम हो, तो

$$n - 1 = m + 1$$

$\Rightarrow$ $n - m = 2$

जोकि संभव नहीं है।

इसी प्रकार यदि n सम तथा m विषम हो, तो एक असंभव परिणाम प्राप्त होगा। अतः n तथा m दोनों या तो सम होंगे या दोनों विषम होंगे।

अब, यदि n तथा m दोनों विषम हों, तो

$$f(n) = f(m) \Rightarrow n - 1 = m - 1 \Rightarrow n = m$$

पुनः यदि दोनों सम हों, तो

$$f(n) = f(m) \Rightarrow n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$$

अतः f एकैकी फलन है।

अतः स्पष्ट है कि सहप्रांत W में स्थित प्रत्येक विषम संख्या $2r + 1$, प्रांत W की सम संख्या $2r$ का प्रतिबिंब है तथा सहप्रांत W में स्थित प्रत्येक सम संख्या $2r$, प्रांत W विषम संख्या $2r + 1$ का प्रतिबिंब है।

$\therefore$ f आच्छादक फलन है।

अतः f प्रतिलोमी फलन है।

अब, मान लीजिए $g : W \to W$

$$g(m) = \begin{cases} m+1, \text{ यदि } m \text{ सम है} \\ m-1, \text{ यदि } m \text{ विषम है} \end{cases} \text{ द्वारा परिभाषित है।}$$

जब n विषम हो, तो

$$(gof)(n) = g(f(n)) = g(n-1)$$
$$= n - 1 + 1 = n \qquad (\because n \text{ विषम है } \therefore n-1 \text{ सम है})$$

Durga Tutorial Banjapur 1996

जब n सम हो, तो

$$(gof)(n) = g(f(n)) = g(n+1)$$
$$= n + 1 - 1 = n \qquad (\because n \text{ सम है तथा } \therefore n+1 \text{ विषम है})$$

इसी प्रकार, जब m विषम हो, तो

$$(fog)(m) = f(g(m)) = f(m-1) = m - 1 + 1 = m$$

जब m सम हो, तो $(fog)(m) = f(g(m)) = f(m+1) = m + 1 - 1 = m$

$\therefore \qquad gof = I_W \quad$ तथा $\quad fog = I_W$

अतः f प्रतिलोमीय फलन है तथा f का प्रतिलोम $f^{-1} = g = f$ है। अतः f का प्रतिलोम f स्वयं ही है।

प्रश्न 3. यदि $f: R \to R$ जहाँ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित है, तो $f(f(x))$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया फलन $f: R \to R$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित फलन है।

अतः $\qquad f(f(x)) = f(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2$

$$= x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 12x + 4x^2 - 3x^2 + 9x - 6 + 2$$
$$= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$$

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि $f: R \to \{x \in R : -1 < x < 1\}$, जहाँ $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, $x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है।

हल दिया गया फलन $f: R \to \{x \in R : -1 < x < 1\}$

$f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, $\forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $\qquad f(x) = f(y),\ x, y \in R \Rightarrow \dfrac{x}{1+|x|} = \dfrac{y}{1+|y|}$

अब, यदि x-धनात्मक तथा y-ऋणात्मक हो, तो $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{y}{1-y} \Rightarrow 2xy = x - y$

चूँकि x-धनात्मक तथा y-ऋणात्मक है।

$\therefore \qquad x > y \Rightarrow x - y > 0$

लेकिन $2xy$ ऋणात्मक है।

$\therefore \qquad 2xy \neq x - y$

अतः x-धनात्मक तथा y-ऋणात्मक को छोड़ा जा सकता है। इसी प्रकार, x-ऋणात्मक तथा y-धनात्मक को भी छोड़ा जा सकता है।

अब, जब x तथा y दोनों धनात्मक हों, तो

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y$$

जब x तथा y दोनों ऋणात्मक हों, तो

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x - xy = y - yx \Rightarrow x = y$$

अतः f एकैकी फलन है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

अव, मान लीजिए $y \in R$ इस प्रकार है कि

$$-1 < y < 1$$

यदि y-ऋणात्मक हो, तो R में एक अवयव $x = \frac{y}{1+y}$ इस प्रकार विद्यमान होगा कि

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1+y}\right) = \frac{\left(\frac{y}{1+y}\right)}{1+\left|\frac{y}{1+y}\right|} = \frac{\frac{y}{1+y}}{1+\left(\frac{-y}{1+y}\right)} = \frac{y}{1+y-y} = y$$

यदि y-धनात्मक हो, तो R में एक अवयव $x = \frac{y}{1-y}$ इस प्रकार विद्यमान होगा कि

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1-y}\right) = \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)}{1+\left|\left(\frac{y}{1-y}\right)\right|} = \frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}} = \frac{y}{1-y+y} = y$$

∴ फलन f आच्छादक फलन है।

अत: f एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : R \to R$ एकैक (injective) है।

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

हल दिया गया फलन $f : R \to R$, $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $\quad f(x) = f(y), \forall x, y \in R \Rightarrow x^3 = y^3$

$\Rightarrow x = y$, जोकि हमेशा सत्य नहीं है।

अत: पुन: मान लीजिए $x \neq y \Rightarrow x^3 \neq y^3 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

अत: f एकैकी फलन है।

प्रश्न 6. दो फलनों $f : N \to Z$ तथा $g : Z \to Z$ के उदाहरण दीजिए जो इस प्रकार हों कि, gof एकैक है परंतु g एकैक नहीं है।

हल मान लीजिए $f : N \to Z$

$f(x) = x, \forall x \in N$ द्वारा परिभाषित फलन है

तथा $\quad g : Z \to Z$

$g(x) = |x|, \forall x \in Z$ द्वारा परिभाषित फलन है।

चूँकि $\quad g(-1) = |-1| = 1$

$g(1) = |1| = 1$

∴ $\quad g(-1) = g(1)$ लेकिन $-1 \neq 1$

अत: g एकैकी फलन नहीं है।

अब मान लीजिए फलन $gof : N \to N$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x) = |x|$$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in N$ इस प्रकार है कि

$$(gof)(x) = (gof)(y) \Rightarrow |x| = |y|$$

चूँकि $x, y \in N$, दोनों धनात्मक हैं।

$\therefore$ $|x| = |y| \Rightarrow x = y$

अत: gof एकैकी फलन है।

प्रश्न 7. दो फलनों $f : N \to N$ तथा $g : N \to N$ के उदाहरण दीजिए, जो इस प्रकार हों कि gof आच्छादक है किंतु f आच्छादक नहीं है।

हल मान लीजिए $f : N \to N$, $f(x) = x + 1$ द्वारा परिभाषित फलन है

तथा $g : N \to N$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ यदि } x > 1 \\ 1, \text{ यदि } x = 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन है।

अब, सहप्रांत N का अवयव 1 लीजिए तथा मान लीजिए

$$f(x) = 1 \Rightarrow x + 1 = 1$$

$\Rightarrow$ $x = 0$, जो प्राकृतिक संख्या नहीं है।

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है।

अब, मान लीजिए $gof : N \to N$,

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x + 1)$$
$$= (x + 1) - 1 \qquad [\because x \in N \Rightarrow (x + 1) > 1]$$
$$= x$$

अत: स्पष्ट है कि प्रत्येक $y \in N$ के लिए, $x = y \in N$ इस प्रकार है कि $(gof)(x) = y$

अत: gof आच्छादक फलन है।

प्रश्न 8. एक अरिक्त समुच्चय X दिया हुआ है। $P(X)$ जोकि X के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है, पर विचार कीजिए। निम्नलिखित तरह से $P(X)$ में एक संबंध R परिभाषित कीजिए।

$P(X)$ में उपसमुच्चयों A, B के लिए, $_AR_B$ यदि और केवल यदि $A \subset B$ है। क्या R, $P(X)$ में एक तुल्यता संबंध है? अपने उत्तर का औचित्य भी लिखिए।

हल दिया है, समुच्चय $P(X)$, जोकि X के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है तथा $P(X)$ में एक संबंध R इस प्रकार परिभाषित है कि $P(X)$ में उपसमुच्चयों A, B के लिए, ARB, यदि और केवल यदि $A \subset B$ है।

चूँकि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है। अत: प्रत्येक $A \in P(X)$ के लिए ARA प्राप्त होता है। अत: R स्वतुल्य संबंध है। अब, मान लीजिए $A = \{1, 2\}$ तथा $B = \{1, 2, 3\}$ है, तब B, A से संबंधित नहीं होगा। अत: R सममित समुच्चय नहीं है।

पुन: मान लीजिए ARB तथा BRC है।

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

तब, $A \subset B$ तथा $B \subset C$

$\Rightarrow$ $A \subset C$

अतः ARC प्राप्त होता है। अतः R संक्रमक संबंध है। इसलिए तुल्यता संबंध नहीं है क्योंकि R सममित संबंध नहीं है।

प्रश्न 9. किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय X के लिए एक द्विआधारी संक्रिया $*, P(X) \times P(X) \rightarrow P(X)$ पर विचार कीजिए, जो $A * B = A \cap B, \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $P(X)$ समुच्चय X का घात समुच्चय (Power set) है। सिद्ध कीजिए कि इस संक्रिया का तत्समक अवयव X है तथा संक्रिया * के लिए $P(X)$ में केवल X व्युत्क्रमणीय अवयव है।

हल समुच्चय $P(X)$ पर द्विआधारी संक्रिया $*$, $A * B = A \cap B, \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है। चूँकि हम जानते हैं कि

$$A * X = A \cap X = A = X \cap A = X * A$$

$\therefore$ $A^* X = X^* A, \forall A \in P(X)$

अतः $P(X)$ में द्विआधारी संक्रिया $A * B = A \cap B$ के लिए X तत्समक अवयव है।

अब अवयव $A \in P(X)$ प्रतिलोमी होगा, यदि $P(X)$ में एक अवयव $B \in P(X)$ इस प्रकार विद्यमान हो कि

$$A * B = X = B * A$$

अर्थात् $A \cap B = X = B \cap A$

जोकि तभी संभव है जबकि $A = B = X$ हो। अतः $P(X)$ में संक्रिया $A * B = A \cap B$ के सापेक्ष केवल एक अवयव X प्रतिलोमीय है।

प्रश्न 10. समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल समुच्चय $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या $1, 2, 3, \ldots, n$ के कुल क्रमचयों की संख्या के बराबर होती है। अर्थात् ${}^nP_n = n!$

प्रश्न 11. मान लीजिए कि $S = \{a, b, c\}$ तथा $T = \{1, 2, 3\}$ है। S से T तक के निम्नलिखित फलनों F के लिए F^{-1} ज्ञात कीजिए, यदि उसका अस्तित्व है

(i) $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ (ii) $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$

हल दिए गए समुच्चय $S = \{a, b, c\}$

तथा $T = \{1, 2, 3\}$ है।

(i) $F : S \rightarrow T$

$F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

$\Rightarrow$ $F(a) = 3, F(b) = 2, F(c) = 1$

अतः $F^{-1} : T \rightarrow S$

$F^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$ होगा।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

(ii) $F : S \to T$

$F = \{(a,2),(b,1),(c,1)\}$ द्वारा परिभाषित फलन है।

$\therefore$ $F(a) = 2, F(b) = 1, F(c) = 1$

चूँकि $F(b) = F(c) = 1$ अतः F एकैकी फलन नहीं है। अतः F प्रतिलोमीय फलन नहीं है। अतः F^{-1} विद्यमान नहीं है।

प्रश्न 12. $a*b = |a-b|$ तथा $aob = a, \forall a, b \in R$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रियाओं $*, R \times R \to R$ तथा $o : R \times R \to R$ पर विचाार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि * क्रमविनिमय है परंतु साहचर्य नहीं है, o साहचर्य है परंतु क्रमविनिमय नहीं है। पुनः सिद्ध कीजिए कि सभी $a, b, c \in R$ के लिए $a*(boc) = (a*b)o(a*c)$ है। [यदि ऐसा होता है, तो हम कहते हैं कि संक्रिया * संक्रिया o पर वितरित (distributes) होती है।] क्या o संक्रिया * पर वितरित होती है? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल द्विआधारी संक्रियाएँ $* :, R \times R \to R$

तथा $o : R \times R \to R$ क्रमशः $a*b = |a-b|, \forall a,b \in R$

तथा $aob = a, \forall a, b \in R$ द्वारा परिभाषित है।

चूँकि प्रत्येक $a, b \in R$ के लिए,

$$a*b = |a-b| = |b-a| = b*a \quad \therefore a*b = b*a, \forall a, b \in R$$

$\therefore$ द्विआधारी संक्रिया $a*b = |a-b|$ एक द्विआधारी क्रमविनिमय संक्रिया है।

पुनः $(1*2)*3 = (|1-2|)*3 = (|-1|)*3 = 1*3 = |1-3| = |-2| = 2$

तथा $1*(2*3) = 1*(|2-3|) = 1*|-1| = 1*1 = |1-1| = 0$

$\therefore$ $(1*2)*3 \neq 1*(2*3)$

$\therefore$ द्विआधारी संक्रिया $a*b = |a-b|$, द्विआधारी साहचर्य नहीं है।

अब, $1o2 = 1$ तथा $2o1 = 2$

अतः $1o2 \neq 2o1$, जहाँ $1, 2 \in R$

अतः द्विआधारी संक्रिया $aob = a$, द्विआधारी क्रमविनिमय नहीं है।

पुनः मान लीजिए $a, b, c \in R$, तब

$$(aob)oc = aoc = a$$

तथा $ao(boc) = aob = a$

$\therefore$ $(aob)oc = ao(boc), \forall a, b, c \in R$

अतः द्विआधारी संक्रिया $aob = a$, एक द्विआधारी साहचर्य संक्रिया है।

अब, मान लीजिए $a, b, c \in R$, तब $a*(boc) = a*b = |a-b|$

तथा $(a*b)o(a*c) = (|a-b|)o(|a-c|) = |a-b|$

$\therefore$ $a*(boc) = (a*b)o(a*c)$

अतः द्विआधारी संक्रिया *, द्विआधारी संक्रिया o पर वितरित हो जाती है।

पुनः $1o(2*3) = 1o(|2-3|) = 1o1 = 1$

तथा $(1o2)*(1o3) = 1*1 = |1-1| = 0$

$\therefore$ $1o(2*3) \neq (1o2)*(1o3)$

जहाँ $1, 2, 3 \in R$

अतः द्विआधारी संक्रिया o, द्विआधारी संक्रिया * पर वितरित नहीं होती है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 13. किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय X के लिए मान लीजिए कि $*: P(X) \times P(X) \to P(X)$, जहाँ $A * B = (A - B) \cup (B - A)$, $\forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि रिक्त समुच्चय ϕ, संक्रिया $*$ का तत्समक है तथा $P(X)$ के समस्त अवयव A व्युत्क्रमणीय हैं, इस प्रकार कि $A^{-1} = A$

हल समुच्चय $P(X)$ पर संक्रिया $*$,

$A * B = (A - B) \cup (B - A), \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है। मान लीजिए

$A \in P(X)$

तब, $A * \phi = (A - \phi) \cup (\phi - A) = A \cup \phi = A$

तथा $\phi * A = (\phi - A) \cup (A - \phi) = \phi \cup A = A$

$\therefore$ $A * \phi = \phi * A, \forall A \in P(X)$

अतः द्विआधारी संक्रिया $A * B = (A - B) \cup (B - A)$ के लिए ϕ एक तत्समक अवयव है। अब एक अवयव $A \in P(X)$ प्रतिलोमीय होगा यदि और केवल यदि $P(X)$ में एक अवयव $B \in P(X)$ इस प्रकार हो कि $A * B = B * A = \phi$

क्योंकि ϕ तत्समक अवयव है।

अब, $A * A = (A - A) \cup (A - A) = \phi \cup \phi = \phi$

$\therefore$ $A * A = \phi, \forall A \in P(X)$

अतः $P(X)$ के सभी अवयव A प्रतिलोमीय है तथा $A^{-1} = A$ है।

प्रश्न 14. निम्नलिखित प्रकार से समुच्चय $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ में एक द्विआधारी संक्रिया $*$ परिभाषित कीजिए

$$a * b = \begin{cases} a + b, \text{ यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6, \text{ यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि शून्य (0) इस संक्रिया का तत्समक है तथा समुच्चय का प्रत्येक अवयव $a \neq 0$ व्युत्क्रमणीय है, इस प्रकार कि $6 - a$, a का प्रतिलोम है।

Durga Tutorial
Baniapur

हल मान लीजिए $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा X पर द्विआधारी संक्रिया $*$,

$$a * b = \begin{cases} a + b, \text{ यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6, \text{ यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$$ द्वारा परिभाषित है।

एक अवयव $e \in X$ तत्समक होगा।

यदि $a * e = e * a = a, \forall a \in X$

अब, हम जानते हैं कि

$a * 0 = a + 0 = a$ $\quad (\because a \in X \Rightarrow a + 0 < 6)$

तथा $0 * a = 0 + a = a$ $\quad (\because a \in X \Rightarrow 0 + a < 6)$

$\therefore$ $a * 0 = 0 * a, = a, \forall a \in X$

अतः द्विआधारी संक्रिया $*$ के लिए '0' तत्समक अवयव है।

एक अवयव $a \in X$ प्रतिलोमी होगा, यदि X में एक अवयव $b \in X$ इस प्रकार विद्यमान हो कि

$a * b = b * a = 0$

अर्थात् $\begin{cases} a+b=0=b+a, \text{ यदि } a+b<6 \\ a+b-6=0=b+a-6, \text{ यदि } a+b \geq 6 \end{cases}$

अर्थात् $a=-b$ या $b=6-a$

लेकिन $X=\{1,2,3,4,5\}$ तथा $a, b \in X$

तब, $a \neq -b$

अत: $b=6-a$, a का प्रतिलोम है।

अत: $a \in X$ का प्रतिलोम $6-a$ है, जहाँ $a \neq 0$ अर्थात् $a^{-1}=6-a$

प्रश्न 15. मान लीजिए कि $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{-4,-2,0,2\}$ और $f, g: A \to B$ क्रमशः $f(x)=x^2-x, x \in A$ और $g(x)=2\left|x-\frac{1}{2}\right|-1, x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन हैं। क्या f तथा g समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए

हल दिया है, $A=\{-1,0,1,2\}$

तथा $B=\{-4,-2,0,2\}$

अब, $f, g: A \to B$ क्रमशः $f(x)=x^2-x, x \in A$

तथा $g(x)=2\left|x-\frac{1}{2}\right|-1, x \in A$

द्वारा परिभाषित फलन हैं।

चूँकि $f(-1)=(-1)^2-(-1)=1+1=2$

तथा $g(-1)=2\left|(-1)-\frac{1}{2}\right|-1=2\left(\frac{3}{2}\right)-1=3-1=2 \Rightarrow f(-1)=g(-1)$

पुन: $f(0)=(0)^2-0=0$

तथा $g(0)=2\left|0-\frac{1}{2}\right|-1=2\left(\frac{1}{2}\right)-1=1-1=0$

$\Rightarrow$ $f(0)=g(0)$

पुन: $f(1)=(1)^2-1=1-1=0$

तथा $g(1)=2\left|1-\frac{1}{2}\right|-1=2\left(\frac{1}{2}\right)-1=1-1=0 \Rightarrow f(1)=g(1)$

पुन: $f(2)=(2)^2-2=4-2=2$

तथा $g(2)=2\left|2-\frac{1}{2}\right|-1=2\left(\frac{3}{2}\right)-1=3-1=2 \Rightarrow f(2)=g(2)$

$\therefore$ $f(a)=g(a), \forall a \in A$ अत: f तथा g समान हैं।

प्रश्न 16. यदि $A=\{1,2,3\}$ हो, तो ऐसे संबंध जिनमें अवयव (1, 2) तथा (1, 3) हों और जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किंतु संक्रमक नहीं हैं, की संख्या है

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

हल (a) चूँकि संबंध R स्वतुल्य है।

अत: $(1,1),(2,2),(3,3) \in R$

पुनः चूँकि संबंध R सममित है। अतः $(1, 2), (2, 1) \in R$ तथा $(1, 3), (3, 1) \in R$
लेकिन संबंध R संक्रमक नहीं है। अतः $(3, 1), (1, 2) \in R$ लेकिन $(3, 2) \notin R$
अब यदि हम $(3, 2)$ तथा $(2, 3)$ में से कोई भी अवयव R में लेते हैं। तो R संक्रमक हो जाता है।
अतः अभीष्ट संबंधों की संख्या एक है।

प्रश्न 17. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो, तो अवयव $(1, 2)$ वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

हल (b) दिया गया है कि $A = \{1, 2, 3\}$
एक तुल्यता संबंध, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक होता है।
$(1, 2)$ को समाहित करने वाला सबसे छोटा संबंध

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$$

है जिसमें केवल चार अवयव $(2, 3), (3, 2), (1, 3)$ तथा $(3, 1)$ नहीं हैं।
अब, यदि $(2, 3) \in R_1$ हो, तो सममित संबंध के लिए $(3, 2) \in R_1$ भी होगा। पुनः संक्रमक संबंध के लिए $(1, 3)$ तथा $(3, 1)$ भी R_1 में होंगे। अतः R_1 से बड़ा संबंध केवल सार्वत्रिक संबंध होगा। अतः $(1, 2)$ को समाहित करने वाले तुल्यता संबंधों की संख्या केवल दो है।

प्रश्न 18. मान लीजिए कि $f : R \to R$ है, तब निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित चिन्ह फलन (Signum function) है। $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ तथा $g : R \to R$, $g(x) = [x]$, द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन हैं, जहाँ $[x]$, x से कम या x के बराबर पूर्णांक है, तो क्या fog तथा gof अंतराल $[0, 1]$ में संपाती (coincide) हैं?

हल दिया गया चिन्ह फलन $f : R \to R$ में,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन है
तथा

$$g : R \to R,$$
$$g(x) = [x],$$

द्वारा परिभाषित फलन है। जहाँ $[x]$, x से कम या x के बराबर पूर्णांक है।
अब, मान लीजिए $x \in [0, 1]$, तो

$$[x] = \begin{cases} 1 \text{ यदि } x = 1 \\ 0 \text{ यदि } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\therefore$ $$(fog)(x) = f(g(x)) = f([x]) = \begin{cases} f(1), \text{ यदि } & x = 1 \\ f(0), \text{ यदि } & 0 < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x = 1 \\ 0, & \text{यदि } 0 < x < 1 \end{cases}$$

तथा $(gof)(x) = g(f(x)) = g(1) = [1] = 1$ $(\because x > 0)$

$\therefore$ जब $x \in (0, 1)$

$(fog)(x) = 0$

तथा $(gof)(x) = 1$

लेकिन $(fog)(1) \neq (gof)(1)$

अतः gof तथा fog, $(0, 1]$ में संपाती नहीं हैं।

प्रश्न 19. समुच्चय $\{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है

(a) 10 (b) 16 (c) 20 (d) 8

हल (b) समुच्चय $\{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या $= 2^4 = 16$ होगी।

Durga Tutorial Baniapur

Durga Tutorial

Online Classes

Thank You For Downloading Notes

ज्यादा जानकारी के लिए हमें
Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511