Durga Tutorial

Online Classes

बिहार बोर्ड और CBSE बोर्ड की तैयारी Free Notes के लिए

www.durgatutorial.com

पर जाएँ।

ज्यादा जानकारी के लिए हमें Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6OizfohqJ7eZvgeHQ

9973735511

अध्याय 2

प्रतिलोम (व्युत्क्रम) त्रिकोणमितीय फलन

Inverse Trigonometric Functions

प्रश्नावली 2.1

निर्देश (प्र. सं. 1-10) निम्नलिखित प्रश्नों के मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

प्रश्न 2. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

प्रश्न 3. $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$

प्रश्न 4. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

प्रश्न 5. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

प्रश्न 6. $\tan^{-1}(-1)$

प्रश्न 7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

प्रश्न 8. $\cot^{-1}(\sqrt{3})$

प्रश्न 9. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

प्रश्न 10. $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

Durga Tutorial
Since 1996
Danlapur

हल (प्र.सं. 1-10)

1. मान लीजिए $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta \Rightarrow \sin\theta=-\frac{1}{2}$

हमें ज्ञात है कि $\sin^{-1}\theta$ की मुख्य मान का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ है।

$\therefore \quad \sin\theta=-\frac{1}{2}=-\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad [\because \sin(-\theta)=-\sin\theta]$

$\Rightarrow \quad \theta=-\frac{\pi}{6}$, जहाँ $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$

अतः $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{6}$ है।

2. मान लीजिए $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

हमें ज्ञात है कि $\cos^{-1}\theta$ की मुख्य मान का परिसर $[0, \pi]$ है।

$\therefore\ \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$, जहाँ $\theta \in [0, \pi] \Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

अत: $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

3. मान लीजिए $\operatorname{cosec}^{-1} 2 = \theta \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = 2$

हमें ज्ञात है कि $\operatorname{cosec}^{-1}\theta$ की मुख्य मान का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ है।

$$\operatorname{cosec}\theta = 2 = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}$$

$\Rightarrow\quad \theta = \frac{\pi}{6}$, जहाँ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \Rightarrow \operatorname{cosec}^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$

अत: $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

4. मान लीजिए $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \theta \Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{3}$

हमें ज्ञात है कि $\tan^{-1}\theta$ की मुख्य मान का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ है।

$\therefore\quad \tan\theta = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad[\because \tan(-\theta) = -\tan\theta]$

$\Rightarrow\quad \theta = -\frac{\pi}{3}$, जहाँ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

अत: $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{3}$ है।

5. मान लीजिए $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$

हमें ज्ञात है कि $\cos^{-1}\theta$ की मुख्य मान का परिसर $[0, \pi]$ है।

$\therefore\quad \cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad[\because \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta]$

$= \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$; जहाँ $\theta \in [0, \pi] \Rightarrow \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

अत: $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ है।

6. मान लीजिए $\tan^{-1}(-1) = \theta \Rightarrow \tan\theta = -1$

हमें ज्ञात है कि $\tan^{-1}\theta$ की मुख्य मान का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ है।

Durga Tutorial Baniapur

$\therefore \quad \tan\theta = -1 = -\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad [\because \tan(-\theta) = -\tan\theta]$

$\Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$, जहाँ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad \left[\because \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}\right]$

अतः $\tan^{-1}(-1)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है।

7. मान लीजिए $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

हमें ज्ञात है कि $\sec^{-1}\theta$ की मुख्य मान का परिसर $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ है।

$\therefore \quad \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$, जहाँ $\theta \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$\Rightarrow \quad \sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

अतः $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

8. मान लीजिए $\cot^{-1}(\sqrt{3}) = \theta \Rightarrow \cot\theta = \sqrt{3}$

हमें ज्ञात है कि $\cot^{-1}\theta$ की मुख्य मान का परिसर $(0, \pi)$ है।

$\therefore \quad \cot\theta = \sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$, जहाँ $\theta \in (0, \pi) \Rightarrow \cot^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$

अत : $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

9. मान लीजिए $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

हमें ज्ञात है कि $\cos^{-1}\theta$ की मुख्य मान का परिसर $[0, \pi]$ है।

$\therefore \quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad [\because \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta]$

$\Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$, जहाँ $\theta \in [0, \pi] \Rightarrow \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$

अतः $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{3\pi}{4}$ है।

10. मान लीजिए $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2}) = \theta$

हमें ज्ञात है कि $\operatorname{cosec}^{-1}\theta$ की मुख्य मान का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ है।

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = -\sqrt{2} = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad [\because \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta]$

$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$, जहाँ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \Rightarrow \operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$

अतः $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है।

Durga Tutorial Since Baniapur

निर्देश (प्र. सं. 11-14) निम्नलिखित प्रश्नों के मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

प्रदत्त समीकरण एक मानक सर्वसमिका नहीं है। इसलिए हम $\tan^{-1}(1)$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का अलग-अलग मान ज्ञात कर सरल करेंगे।

हल मान लीजिए $\tan^{-1}(1) = x \Rightarrow \tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

जहाँ, x का मुख्य मान $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ है। $\therefore \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

मान लीजिए $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y \Rightarrow \cos y = -\frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $[\because \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta]$

$\Rightarrow$ $y = \frac{2\pi}{3}$, जहाँ y का मुख्य मान $y \in [0, \pi]$ है।

$\therefore$ $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

मान लीजिए $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = z \Rightarrow \sin z = -\frac{1}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

$\Rightarrow$ $z = -\frac{\pi}{6}$, जहाँ z का मुख्य मान $Z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है।

$\therefore$ $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = x + y + z = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

$= \frac{3\pi + 8\pi - 2\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$

प्रश्न 12. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

हल हम दिए गए समीकरण के अलग-अलग पदों के मान ज्ञात कर इसे सरल कर सकते हैं।

मान लीजिए $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ (मुख्य अंतराल)

पुनः, माना $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = y \Rightarrow \sin y = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (मुख्य अंतराल)

$\therefore$ $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x + 2y = \frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

Durga Tutorial Since 1996 Banlapur

प्रश्न 13. यदि $\sin^{-1} x = y$, तब

(a) $0 \le y \le \pi$ (b) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ (c) $0 < y < \pi$ (d) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

हल चूँकि $\sin^{-1} x$ का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है, इसलिए $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$।

अतः सही उत्तर (b) है।

प्रश्न 14. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ **का मान बराबर है**

(a) π (b) $-\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

हल मान लीजिए $\tan^{-1}\sqrt{3} = x \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (मुख्य अंतराल)

मान लीजिए $\sec^{-1}(-2) = y \Rightarrow \sec y = -2$

$\Rightarrow \quad \sec y = -\sec\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sec = \sec\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ $[\because \sec(\pi - \theta) = -\sec\theta]$

$\Rightarrow \quad \sec y = \sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \quad y = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi] - \left(\frac{\pi}{2}\right)$ (मुख्य अंतराल)

$\therefore \quad \tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2) = x - y = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

अतः सही उत्तर (b) है।

प्रश्नावली 2.2

निर्देश (प्र. सं. 1-4) निम्नलिखित प्रश्नों को सिद्ध कीजिए

प्रश्न 1. $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3), x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

दिए गए समीकरण के दाहिने पक्ष में $\sin^{-1} x$ को θ के द्वारा विस्थापित करने पर, $x = \sin\theta$ के रूप में मानक समीकरण $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin\theta$ का प्रयोग कर इस समीकरण को इस प्रकार सरल कर सकते हैं।

हल मान लीजिए $\sin^{-1} x = \theta$

$\Rightarrow \quad x = \sin\theta$, तब

बायाँ पक्ष $= 3\sin^{-1} x = 3\sin^{-1}(\sin\theta) = 3\theta$

दायाँ पक्ष $= \sin^{-1}(3x - 4x^3) = \sin^{-1}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

$= \sin^{-1}(\sin 3\theta) = 3\theta$ $[\because \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta]$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

इति सिद्धम्

Durga Tutorial
Banjapur

प्रश्न 2. $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x), x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

जब हम दिए गए समीकरण के दाहिने पक्ष में $\cos^{-1}x$ को θ के द्वारा विस्थापित करते हैं तब, $x = \cos\theta$ के रूप में मानक समीकरण $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ का प्रयोग कर इस समीकरण को प्रकार सरल कर सकते हैं।

हल मान लीजिए $x = \cos\theta$

बायाँ पक्ष $= 3\cos^{-1}x = 3\cos^{-1}(\cos\theta) = 3\theta$

दायाँ पक्ष $= \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

$= \cos^{-1}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$= \cos^{-1}(\cos 3\theta) = 3\theta$ $\quad (\because \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 3. $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

हल ज्ञात है, $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

बायाँ पक्ष $= \tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{11} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{2}{11}\cdot\frac{7}{24}}\right)$

$\left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{48+77}{264}}{1 - \frac{14}{264}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{125}{264}}{\frac{264-14}{264}}\right) = \tan^{-1}\frac{\frac{125}{264}}{\frac{250}{264}}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{125}{264} \times \frac{264}{250}\right) = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 4. $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$

सर्वप्रथम सर्वसमिका $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ का प्रयोग करेंगे ताकि सर्वसमिका $\tan^{-1}(A) + \tan^{-1}(B) = \tan^{-1}\left(\frac{A+B}{1-AB}\right)$ के माध्यम से ज्ञात परिणाम को प्राप्त किया जा सके।

हल ज्ञात है, $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$

बायाँ पक्ष $= 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right] + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

$$\left[\because 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}}\right) \qquad \left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{28+3}{21}}{1-\frac{4}{21}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{31}{21}}{\frac{17}{21}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{21}\times\frac{21}{17}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right) =$ दायाँ पक्ष

इति सिद्धम्

निर्देश (प्र. सं. 5-10) **निम्नलिखित फलनों को सरल कीजिए।**

प्रश्न 5. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, x \neq 0$

x को $\tan\theta$ के द्वारा विस्थापित कर वर्गमूल के चिन्ह को हटा सकते हैं।

हल मान लीजिए $x = \tan\theta$, तब $\theta = \tan^{-1}x$ ...(i)

$$\therefore \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{\sec^2\theta}-1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right)$$

$$(\because 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)$ $\left(\because 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right.$ तथा $\left.\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{\tan^{-1}x}{2}$ [समी (i) से]

$$\therefore \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 6. $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

दिए गए समीकरण में x को $\sec\theta$ के द्वारा विस्थापित कर वर्गमूल का चिन्ह हटाकर अब इसे इस प्रकार सरल करेंगे।

हल मान लीजिए $x = \sec\theta$, तब $\theta = \sec^{-1}x$ ...(i)

$$\therefore \quad \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta}}\right) \quad (\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\cot\theta) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] \quad \left[\because \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}x \quad \text{[समी (i) से]}$$

प्रश्न 7. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), x < \pi$

सूत्रों $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$ तथा $1+\cos x = 2\cos^2(x/2)$ का प्रयोग कर वर्गमूल के चिन्ह को हटाते हुए हम इसे इस प्रकार सरल कर सकते हैं।

हल $$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}}\right) \quad \left[\because 1-\cos x = 2\sin^2(x/2) \text{ तथा } 1+\cos x = 2\cos^2(x/2)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

Durga Tutorial
1996
Baniapur

प्रश्न 8. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), 0 < x < \pi$

सर्वप्रथम दिए गए फलन के कोण को हम $\tan\theta$ में परिवर्तित करेंगे ताकि सर्वसमिका की सहायता से इसे सरल किया जा सके और इसके लिए हम अंश तथा हर के कोण का मान $\tan x$ में परिवर्तित कर सर्वसमिका $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$ का प्रयोग कर फलन को इस प्रकार हल कर सकेंगे।

हल $$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x +}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}\right)$$

कोष्ठक के भीतर अंश तथा हर को $\cos x$ द्वारा भाग देने पर,

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$$

$$\left[\because \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - x$$

प्रश्न 9. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, |x| < a$

दिए गए फलन को हल करने के लिए सर्वप्रथम हम x को $a\sin\theta$ के द्वारा विस्थापित कर वर्गमूल का चिन्ह हटाएंगे और तब सर्वसमिका का प्रयोग कर इसे हल करेंगे।

हल मान लीजिए $x = a\sin\theta \Rightarrow \frac{x}{a} = \sin\theta \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \theta$ ...(i)

$$\therefore \quad \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \tan^{-1}\left(\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a\sin\theta}{a\sqrt{1-\sin^2\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \qquad \left(\begin{array}{l}\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}\end{array}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$ [समी (i) से]

प्रश्न 10. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right), a > 0, -\frac{a}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{a}{\sqrt{3}}$

फलन के कोण का मान $x = a\tan\theta$ द्वारा प्रतिस्थापित करके, सर्वसमिका $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$, द्वारा सरल कर सकते हैं।

जहाँ, $$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

हल मान लीजिए $x = a\tan\theta \Rightarrow \frac{x}{a} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ ... (i)

$$\therefore \tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3a^2(a\tan\theta)-(a\tan\theta)^3}{a^3-3a(a\tan\theta)^2}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{a^3(3\tan\theta-\tan^3\theta)}{a^3(1-3\tan^2\theta)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 3\theta) \qquad \left(\because \tan 3\theta = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$$

$$= 3\theta = 3\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$ [समी (i) से]

Durga Tutorial
Baniapur

निर्देश (प्र. सं. 11-15) निम्नलिखित में से प्रत्येक की गणना कीजिए।

प्रश्न 11. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

हल $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]=\tan^{-1}\left[2\cos\left\{2\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]$ $\left(\because \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\right)$

$=\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)\right]=\tan^{-1}\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$=\tan^{-1}\left(2\times\frac{1}{2}\right)=\tan^{-1}(1)$ $\left(\because \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right)$

$=\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because \tan\frac{\pi}{4}=1\right)$

प्रश्न 12. $\cot(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a)$

हल $\cot(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a)=\cot\frac{\pi}{2}=0$ $\left(\because \tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right)$

प्रश्न 13. $\tan\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right), |x|<1, y>0$ तथा $xy<1$

मानक समीकरण का प्रयोग करते हुए tan के कोण को $\tan^{-1}x$ के द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं ताकि हम सर्वसमिका $\tan(\tan^{-1}\theta)=\theta$ का प्रयोग करके फलन को सरल कर सकें और उसके लिए हम $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ का प्रयोग करेंगे।

हल $\tan\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$

$\left[\because 2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\text{ तथा } 2\tan^{-1}y=\cos^{-1}\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\right]$

$=\tan\left[\frac{1}{2}(2\tan^{-1}x+2\tan^{-1}y)\right]=\tan\left[\frac{1}{2}\times 2(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)\right]$

$=\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)$

$=\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]=\frac{x+y}{1-xy}$ $\left(\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}\right)$

प्रश्न 14. यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right)=1$, तब x का मान ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है, $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right)=1\Rightarrow\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x=\sin^{-1}1$

$(\because \sin\theta=x\Rightarrow\theta=\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $\left[\because \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\right]$

Durga Tutorial Since 1996 Banlapur

निर्देश (प्र. सं. 11-15) निम्नलिखित में से प्रत्येक की गणना कीजिए।

प्रश्न 11. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

हल $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right] = \tan^{-1}\left[2\cos\left\{2\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]$ $\left(\because \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right)$

$= \tan^{-1}\left[2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)\right] = \tan^{-1}\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$= \tan^{-1}\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = \tan^{-1}(1)$ $\left(\because \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\left(\because \tan\frac{\pi}{4} = 1\right)$

प्रश्न 12. $\cot(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a)$

हल $\cot(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a) = \cot\frac{\pi}{2} = 0$ $\left(\because \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right)$

प्रश्न 13. $\tan\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right), |x| < 1, y > 0$ तथा $xy < 1$

मानक समीकरण का प्रयोग करते हुए tan के कोण को $\tan^{-1} x$ के द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं ताकि हम सर्वसमिका $\tan(\tan^{-1}\theta) = \theta$ का प्रयोग करके फलन को सरल कर सकें और उसके लिए हम $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ का प्रयोग करेंगे।

हल $\tan\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$

$\left[\because 2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right.$ तथा $\left.2\tan^{-1}y = \cos^{-1}\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\right]$

$= \tan\left[\frac{1}{2}(2\tan^{-1}x + 2\tan^{-1}y)\right] = \tan\left[\frac{1}{2} \times 2(\tan^{-1}x + \tan^{-1}y)\right]$

$= \tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}y)$

$= \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right] = \frac{x+y}{1-xy}$ $\left(\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}\right)$

प्रश्न 14. यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$, तब x का मान ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है, $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1 \Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x = \sin^{-1}1$

$(\because \sin\theta = x \Rightarrow \theta = \sin^{-1}x)$

$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $\left[\because \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\right]$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin^{-1}\frac{1}{5} = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}x$$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\frac{1}{5} = \sin^{-1}x \qquad \left(\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{5} = x$$

प्रश्न 15. यदि $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, तब x का मान ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है, $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left[\frac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}\right] = \frac{\pi}{4} \qquad \left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left[\frac{\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}}\right] = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)} = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x^2-4}{(x^2-4)-(x^2-1)} = 1 \qquad \left(\because \tan\frac{\pi}{4} = 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 4 = -3 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

निर्देश (प्र. सं. 16-18) निम्नलिखित व्यंजकों की गणना कीजिए।

प्रश्न 16. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

चूँकि $\sin^{-1}x$ की शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है, इसलिए पहले हम $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ लिखेंगे और इसके बाद सर्वसमिका $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ प्रयोग कर फलन का मान निकालेंगे।

हल $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\left[\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad [\because \sin(\pi - \theta) = \sin\theta]$

$= \frac{\pi}{3}$ जो $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ के बीच स्थित है।

प्रश्न 17. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

हल $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)=\tan^{-1}\left[\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\tan^{-1}\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)$

$[\because \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta]$

$=\tan^{-1}\left[\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ $[\because -\tan\theta=\tan(-\theta)]$

$=-\frac{\pi}{4}$ जो $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ के मध्य स्थित है।

प्रश्न 18. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

tan का कोण $\tan^{-1}$ में परिवर्तित किया ताकि हम सर्वसमिका और इसके लिए हम $\sin^{-1}\frac{3}{5}$ तथा $\cot^{-1}\frac{3}{2}$ को $\tan^{-1}\theta$ मे बदलेंगे और सूत्र $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ का प्रयोग कर इसे सरल करेंगे।

हल $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\tan\left[\tan^{-1}\frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}+\tan^{-1}\frac{2}{3}\right]$

$\left(\because \sin^{-1}x=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\text{ तथा }\cot^{-1}\frac{x}{y}=\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$

$=\tan\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)=\tan\left[\tan^{-1}\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}\right]=\tan\left(\tan^{-1}\frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2}}\right)$

$\left[\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$

$=\tan\left(\tan^{-1}\frac{17}{6}\right)=\frac{17}{6}$

प्रश्न 19. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ बराबर है

(a) $\frac{7\pi}{6}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

सर्वप्रथम $\frac{7\pi}{6}$ का मान $[0,\pi]$ अंतराल के अनुसार परिवर्तित करेंगे अर्थात् $\cos\theta=\cos(2\pi-\theta)$ का प्रयोग कर सर्वसमिका $\cos^{-1}(\cos\theta)=\theta$ की सहायता से इसका मान इस प्रकार ज्ञात करते हैं।

Durga Tutorial 1996 Baniapur

हल $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)=\cos^{-1}\left[\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

जहाँ, $\frac{5\pi}{6}\in[0,\pi]$ $\therefore$ $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)=\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]=\frac{5\pi}{6}$

$[\because \cos(2\pi-\theta)=\cos\theta]$

अतः सही उत्तर (b) है।

प्रश्न 20. $\sin\left[\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ **बराबर है**

(a) 1/2 (b) 1/3 (c) 1/4 (d) 1

हल $\sin\left[\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\sin\left[\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$ $\left(\because \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\right)$

$=\sin\left[\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]$ $[\because \sin(-x)=-\sin x]$

$=\sin\left[\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

इस प्रकार सही उत्तर (d) है।

प्रश्न 21. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ **बराबर है**

(a) π (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) 0 (d) $2\sqrt{3}$

हल $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$

$=\tan^{-1}\sqrt{3}-[\pi-\cot^{-1}\sqrt{3}]$ $[\because \cot^{-1}(-x)=\pi-\cot^{-1}x]$

$=\tan^{-1}\sqrt{3}-\pi+\cot^{-1}\sqrt{3}$

$=\tan^{-1}\sqrt{3}-\pi+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\because \tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x\right)$

$=\left[\tan^{-1}\sqrt{3}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]-\pi$

$=\tan^{-1}\frac{\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}-\pi$ $\left[\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$

$=\tan^{-1}(\infty)-\pi$

$=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$ $\left(\because \tan\frac{\pi}{2}=\infty\right)$

अतः सही उत्तर (b) है।

Durga Tutorial Baniapur Since 1996

विविध प्रश्नावली

निर्देश (प्र. सं. 1-2) निम्नलिखित फलनों की गणना कीजिए।

प्रश्न 1. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$

हल $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)=\cos^{-1}\left[\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]$, जहाँ $\frac{\pi}{6}\in[0,\pi]$

[इस प्रकार, दिए गए कोण का अंतराल अर्थात् $[0, \pi]$ के मध्य नहीं है, इसलिए हम इसे ऐसे परिवर्तित करेंगे कि इसका मान $[0, \pi]$ अंतराल के मध्य हो।]

$$=\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\pi}{6} \qquad [\because \cos(2\pi+\theta)=\cos\theta]$$

प्रश्न 2. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

हल $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)=\tan^{-1}\left[\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]$, जहाँ $\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (मुख्य अंतराल)

$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)=\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$ $\quad [\because \tan(\pi+\theta)=\tan\theta]$

निर्देश (प्र. सं. 3-12) निम्नलिखित फलनों को सिद्ध कीजिए

प्रश्न 3. $2\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{24}{7}$

हल ज्ञात है, $2\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{24}{7}$

बायाँ पक्ष $=2\sin^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\left[2\times\frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right]$ $\quad [\because 2\sin^{-1}y=\sin^{-1}(2y\sqrt{1-y^2})]$

$$=\sin^{-1}\left(2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{24}{25}}{\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}}\right] \qquad \left(\because \sin^{-1}y=\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{24}{25}}{\sqrt{1-\frac{576}{625}}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{24}{25}\times\frac{25}{7}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right)=$$ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 4. $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

दो $\sin^{-1}$ फलनों को जोड़ने के लिए हम निम्न संबंध का प्रयोग करते हैं

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

हल ज्ञात है, $\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

बायाँ पक्ष $= \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left[\frac{8}{17}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} + \frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}\right]$

$[\because \sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})]$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\times\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\times\frac{15}{17}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{77}{85}}{\sqrt{1-\left(\frac{77}{85}\right)^2}}\right] \qquad \left(\because \sin^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$= \tan^{-1}\left(\frac{77}{85}\times\frac{85}{36}\right) = \tan^{-1}\frac{77}{36} =$ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 5. $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$

हल ज्ञात है, $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$

बायाँ पक्ष $= \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \cos^{-1}\left[\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} - \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}\right]$

$[\because \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})]$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{48}{65} - \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2}\right] = \cos^{-1}\left(\frac{48}{65} - \frac{3}{5}\times\frac{5}{13}\right)$$

$= \cos^{-1}\left(\frac{48}{65} - \frac{3}{13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right) =$ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 6. $\cos^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$

यहाँ बाएँ पक्ष में निम्न प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन है। इसलिए हम $\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$ को $\sin^{-1}\theta$ के रूप में परिवर्तित कर सूत्र $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$ की सहायता से फलन की गणना करेंगे।

हल ज्ञात है, $\cos^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$

माना $\cos^{-1}\frac{12}{13} = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{12}{13}$

$\therefore \quad \sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} \qquad [\because \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}]$

$\Rightarrow \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13} \quad \Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}\frac{5}{13}$

अब, बायाँ पक्ष $= \cos^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5}$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} + \frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}\right)$$

$[\because \sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})]$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\sqrt{\frac{16}{25}} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{144}{169}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13}\right)$$

$= \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right) =$ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 7. $\tan^{-1}\frac{63}{16} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$

यहाँ हम $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = x$ रखते हैं तथा x को $\tan^{-1}$ के रूप में परिवर्तित करते हैं। इसी प्रकार, $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = y$ रखते हैं तथा y को भी $\tan^{-1}$ के रूप में परिवर्तित कर सूत्र $\tan^{-1}a + \tan^{-1}b = \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ का प्रयोग कर अभिव्यक्त फलन की गणना करते हैं।

हल ज्ञात है, $\tan^{-1}\frac{63}{16} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$

दायाँ पक्ष $= \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$

मान लीजिए $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = x \Rightarrow \sin x = \frac{5}{13}$

$\because \quad 1 - \sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \cos^2 x$

$\Rightarrow \quad \frac{169-25}{169} = \cos^2 x \Rightarrow \frac{144}{169} = \cos^2 x \Rightarrow \frac{12}{13} = \cos x$

$\therefore \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12} \Rightarrow \quad x = \tan^{-1}\frac{5}{12}$

Baniapur

माना $\qquad \cos^{-1}\frac{3}{5} = y \Rightarrow \cos y = \frac{3}{5}$

$\because \qquad 1-\cos^2 y = \sin^2 y \Rightarrow 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \sin^2 y$

$\Rightarrow \qquad \frac{25-9}{25} = \sin^2 y \Rightarrow \frac{16}{25} = \sin^2 y \Rightarrow \frac{4}{5} = \sin y$

$\therefore \qquad \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} \Rightarrow \tan y = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \tan^{-1}\frac{4}{3}$

अतः ज्ञात समीकरण का प्रारूप इस प्रकार है

$$\tan^{-1}\frac{63}{16} = x + y \Rightarrow \tan^{-1}\frac{63}{16} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $= \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{5}{12}+\frac{4}{3}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}}\right)$

$$\left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{15+48}{12\times 3}}{\frac{12\times 3-20}{12\times 3}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{63}{36}\times\frac{36}{36-20}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) =$ बायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष $\qquad$ इति सिद्धम्

प्रश्न 8. $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

हम सभी $\tan^{-1} x$ प्रकार के फलनों को एकसाथ नहीं जोड़ सकते है, इसलिए हम इसे जोड़े में बदलकर सर्वसमिका $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ की सहायता से हल करते हैं।

हल दिया है, $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

बायाँ पक्ष $= \left(\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7}\right) + \left(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}}\right) \qquad \left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$

Durga Tutorial Baniapur Since 1996

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{7+5}{35}}{\frac{35-1}{35}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{8+3}{24}}{\frac{24-1}{24}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{17}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{11}{23}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{6}{17}+\frac{11}{23}}{1-\frac{6}{17}\times\frac{11}{23}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6\times 23+11\times 17}{17\times 23-6\times 11}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{325}{325}\right) = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = \text{दायाँ पक्ष}$$ इति सिद्धम्

प्रश्न 9. $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), x \in [0, 1]$

हल ज्ञात है, $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), x \in [0, 1]$

बायाँ पक्ष $= \tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\times(2\tan^{-1}\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\times\cos^{-1}\frac{1-(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2}$

$$\left[\because 2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \text{दायाँ पक्ष}$$ इति सिद्धम्

प्रश्न 10. $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

समीकरण से वर्गमूल का चिन्ह हटाने के लिए सर्वसमिका $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$ तथा संबंध $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$ तथा सर्वसमिकाओं $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ तथा $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ का भी उपयोग करते हुए इसकी गणना करेंगे।

हल ज्ञात है, $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

बायाँ पक्ष $= \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)$ ...(i)

इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\sqrt{1+\sin x} = \sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$\left(\because \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2} = 1 \text{ तथा } \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$$

Durga Tutorial
Baniapur

$\Rightarrow \quad \sqrt{1+\sin x} = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$

इसी प्रकार, हम ज्ञात कर सकते हैं $\sqrt{1-\sin x} = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$

समी (i) में, $\sqrt{1+\sin x}$ तथा $\sqrt{1-\sin x}$ का मान रखने पर,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \cot^{-1}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\cot\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

वैकल्पिक विधि

$$\text{बायाँ पक्ष} = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}} \times \frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\right)$$

(हर के व्युत्क्रम का अंश तथा हर में गुणा करने पर)

$$= \cot^{-1}\left[\frac{(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})^2}{(\sqrt{1+\sin x})^2-(\sqrt{1-\sin x})^2}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{1+\sin x+1-\sin x+2\sqrt{1-\sin^2 x}}{1+\sin x-1+\sin x}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{2+2\cos x}{2\sin x}\right)$$

$(\because \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x})$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{2\cos^2 x/2}{2\sin x/2\cos x/2}\right)$$

$\left(\because 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} \text{ तथा } \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$

$$= \cot^{-1}\left(\cot\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 11. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x$

इसे सरल करने के लिए सर्वप्रथम x को $\cos\theta$ के द्वारा प्रतिस्थापित कर वर्गमूल के चिन्ह को हटाते हैं तथा सम्बन्ध $1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$ तथा $1-\cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ का प्रयोग कर इसे सरल करते हैं।

Durga Tutorial Since 1996 Banipur

हल मान लीजिए $x = \cos\theta$ ताकि $\cos^{-1} x = \theta$

$$\therefore \quad \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$\left(\because 1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right.$ तथा $\left.1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}\right)$$

(कोष्ठक के भीतर अंश तथा हर में $\cos\theta/2$ की गुणा करने पर)

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right] \qquad \left[\because \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1} x$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 12. $\frac{9\pi}{8}-\frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

सर्वप्रथम पद $\frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ को बाईं ओर से दाईं ओर विस्थपित करने पर, सम्बन्ध $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$, का प्रयोग करके अभीष्ट परिणाम प्राप्त करेंगे।

हल ज्ञात हैं, $\frac{9\pi}{8}-\frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{9\pi}{8} = \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \Rightarrow \frac{9\pi}{8} = \frac{9}{4}\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{9}{4}\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{9}{4}\left[\sin^{-1}\left\{\frac{1}{3}\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right\}\right]$$

$[\because \sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})]$

$$= \frac{9}{4}\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right] = \frac{9}{4}\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\right)\right] = \frac{9}{4}\sin^{-1}(1)$$

$$= \frac{9}{4}\times\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{8} = \text{बायाँ पक्ष}$$

इति सिद्धम्

Durga Tutorial Since 1996 Banjapur

वैकल्पिक विधि

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{4}\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{9}{4}\left[\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right] \qquad \left(\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} \qquad (\because \cos^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2})$$

$$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3} = \text{दायाँ पक्ष}$$

इति सिद्धम्

निर्देश (प्र. सं. 13-17) निम्नलिखित समीकरणों को हल का मान ज्ञात करें

निर्देश प्रश्न 13. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

हल ज्ञात है, $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{2\cos x}{1-\cos^2 x}\right) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x) \qquad \left[\because 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{2\cos x}{\sin^2 x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sin x}\right) \Rightarrow \frac{2\cos x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x} \Rightarrow \frac{2\cos x}{\sin x} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

प्रश्न 14. $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x, (x > 0)$

दोनों पक्षों में 2 की गुणा कर बाएँ पक्ष में सम्बन्ध $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ का प्रयोग करते हुए दोनों पक्षों को बराबर कर x के मान की गणना करते हैं।

हल ज्ञात है,

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x \quad \text{या} \quad 2\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left[\frac{2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\right] = \tan^{-1}x \qquad \left[\because 2\tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left[\frac{\frac{2(1-x)}{(1+x)}}{\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}}\right] = \tan^{-1}x \Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x)^2-(1-x)^2}\right] = \tan^{-1}x$$

Durga Tutorial Since 1996 Banjapur

$\Rightarrow \quad an^{-1}\left[\dfrac{2(1-x^2)}{1^2+x^2+2x-1^2-x^2+2x}\right]=\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left[\dfrac{2(1-x^2)}{4x}\right]=\tan^{-1}x \Rightarrow \tan^{-1}\left[\dfrac{(1-x^2)}{2x}\right]=\tan^{-1}x$

t

$\Rightarrow \quad \dfrac{1-x^2}{2x}=x \Rightarrow 1-x^2=2x^2 \Rightarrow 1=3x^2 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

[$\because x>0$ ज्ञात है, इसलिए हम $\left(x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, x का मान ऋणात्मक नहीं ले सकते हैं]

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 15. $\sin(\tan^{-1}x), |x|<1$ का मान बराबर है

(a) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

हल $\sin(\tan^{-1}x)=\sin\left[\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$ $\left(\because \tan^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

अत: सही उत्तर (d) है।

प्रश्न 16. $\sin^{-1}(1-x)-2\sin^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$, तब x का मान बराबर है

(a) $0,\dfrac{1}{2}$ (b) $1,\dfrac{1}{2}$ (c) 0 (d) $\dfrac{1}{2}$

(i) $2\sin^{-1}x$ का पक्षान्तर बाएँ पक्ष से दाहिने पक्ष में कर सर्वसमिका $\cos^{-1}a=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}a$ का प्रयोग कर सकते हैं।

(ii) अब दोनों पक्षों का (cos) ज्या लेकर सम्बन्ध $\cos(-x)=\cos x$ तथा $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ के प्रयोग के द्वारा मान निकालते हैं।

हल ज्ञात है, $\sin^{-1}(1-x)-2\sin^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad -2\sin^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}(1-x) \Rightarrow -2\sin^{-1}x=\cos^{-1}(1-x)$

$\left[\because \sin^{-1}(1-x)+\cos^{-1}(1-x)=\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \quad \cos(-2\sin^{-1}x)=1-x$ (दोनों पक्षों में $\cos x$ की गुणा करने पर)

$\Rightarrow \quad \cos(2\sin^{-1}x)=1-x$ [$\because \cos(-x)=+\cos x$]

$\Rightarrow \quad [1-2\sin^2(\sin^{-1}x)]=1-x$ ($\because \cos 2x=1-2\sin^2 x$)

$\Rightarrow \quad 1-2[\sin(\sin^{-1}x)]^2=1-x$ [$\because \sin^2 x=(\sin x)^2$]

$\Rightarrow \quad 1-2x^2=1-x \Rightarrow 2x^2-x=0$

$\Rightarrow \quad x(2x-1)=0 \Rightarrow x=0$ या $2x-1=0 \Rightarrow x=0$ या $\dfrac{1}{2}$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

किन्तु $x=\frac{1}{2}$ ज्ञात समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करता है, इसलिए $x=0$ सही है।

अत: उत्तर (c) सही है।

वैकल्पिक विधि

ज्ञात है, $\sin^{-1}(1-x)-2\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

माना $x=\sin\theta \Rightarrow \theta=\sin^{-1}x$, तब

$$\sin^{-1}(1-\sin\theta)-2\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1}(1-\sin\theta)=\frac{\pi}{2}+2\theta$$

$$\Rightarrow 1-\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right) \Rightarrow 1-\sin\theta=\cos 2\theta$$

$$\left[\because \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow 1-\sin\theta=1-2\sin^2\theta \qquad (\because \cos 2\theta=1-2\sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\theta-\sin\theta=0 \Rightarrow \sin\theta(2\sin\theta-1)=0$$

या $\sin\theta=0$ या $2\sin\theta-1=0$

$\Rightarrow x=0$ या $2x-1=0$ $\qquad (\because \sin\theta=x)$

$\Rightarrow x=0$ या $x=\frac{1}{2}$

किन्तु $x=\frac{1}{2}$ ज्ञात समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करता है, इसलिए $x=0$ रखकर हल प्राप्त करेंगे। उत्तर जाँचने के लिए ज्ञात समीकरण में $x=0$ रखने पर,

$$\therefore \sin^{-1}(1-0)-2\sin^{-1}0=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}-2\times 0=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

ज्ञात समीकरण में $x=\frac{1}{2}$ रखने पर,

$$\therefore \sin^{-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)-2\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{2}-2\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}-2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \frac{\pi-2\pi}{6}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}$, इसलिए $x=\frac{1}{2}$ सम्भव नहीं हैं।

प्रश्न 17. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ बराबर है

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{3\pi}{4}$

हल $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{x}{y}+1}\right)$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}-\tan^{-1}1\right) \qquad \left[\because \tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right]$$

$$=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$$

अत: सही उत्तर (c) है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

Durga Tutorial

Online Classes

Thank You For Downloading Notes

ज्यादा जानकारी के लिए हमें

Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511