# Durga Tutorial

Online Classes

## बिहार बोर्ड और CBSE बोर्ड की तैयारी Free Notes के लिए

## www.durgatutorial.com

## पर जाएँ।

**ज्यादा जानकारी के लिए हमें Social Media पर Follow करें।**

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511

# आव्यूह

## अध्याय 3

## Matrix

### प्रश्नावली 3.1

**प्रश्न 1.** आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$ के लिए, ज्ञात कीजिए।

(i) आव्यूह की कोटि (ii) अवयवों की संख्या

(iii) आव्यूह $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}$.

**हल** (i) दिए गए आव्यूह में पंक्तियों की संख्या 3 तथा स्तंभ 4 हैं। इसलिए आव्यूह की कोटि $3 \times 4$ होगी।

(ii) चूँकि आव्यूह की कोटि $3 \times 4$ है। इसलिए यहाँ $3 \times 4 = 12$ अवयव

(iii) माना $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

समान आव्यूह के संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$a_{13} = 19 ; a_{21} = 35 ; a_{33} = -5 ; a_{24} = 12 ; a_{23} = \frac{5}{2}$

**प्रश्न 2.** यदि किसी आव्यूह में 24 अवयव हैं, तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 13 अवयव हों, तो कोटियाँ क्या होंगी?

**हल** हम जानते हैं कि यदि $m \times n$ कोटि का कोई आव्यूह हो, तो इसमें आव्यवों की संख्या $mn$ होती है। अत: 24 अवयवों के आव्यूह निम्नलिखित कोटियों के हो सकते हैं।

$1 \times 24,\ 2 \times 12,\ 3 \times 8,\ 4 \times 6,\ 6 \times 4,\ 8 \times 3,\ 12 \times 2$ तथा $24 \times 1$

इसी प्रकार, एक आव्यूह जिसमें कुल 13 अवयव हों, की कोटि $1 \times 13$ अथवा $13 \times 1$ हो सकती है।

**प्रश्न 3.** यदि किसी आव्यूह में 18 अवयव हैं, तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 5 अवयव हों, तो क्या होगा?

**हल** चूँकि आव्यूह में 18 अवयव हैं अत: इसकी निम्नलिखित कोटियाँ हो सकती हैं

$1 \times 18,\ 18 \times 1,\ 2 \times 9,\ 9 \times 2,\ 3 \times 6,\ 6 \times 3$

और इसी प्रकार, आव्यूह में यदि 5 अवयव हों, तो इसकी कोटि क्रमश: $1 \times 5$ अथवा $5 \times 1$ होगी।

**प्रश्न 4.** एक $2 \times 2$ आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्रदत्त हैं।

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

**हल** (i) ज्ञात आव्यूह की कोटि $2 \times 2$ है, अत: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, जहाँ $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$

$a_{11}$ को ज्ञात करने के लिए $i = 1$ तथा $j = 1$ रखने पर,

Durga Tutorial Banjapur

$$\therefore \quad a_{11} = \frac{(1+1)^2}{2} = 2 \quad \text{इसी प्रकार, } a_{12} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2},$$

$$a_{21} = \frac{(2+1)^2}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{तथा} \quad a_{22} = \frac{(2+2)^2}{2} = 8$$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 9/2 \\ 9/2 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ है।

(ii) यहाँ, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$, जहाँ $a_{ij} = \frac{i}{j}$

$$\therefore \quad a_{11} = \frac{1}{1} = 1, a_{12} = \frac{1}{2}, \quad a_{21} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{तथा} \quad a_{22} = \frac{2}{2} = 1$$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ है।

(iii) यहाँ, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$, जहाँ $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

$$\therefore \quad a_{11} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2}, \quad a_{12} = \frac{(1+4)^2}{2} = \frac{25}{2},$$

$$a_{21} = \frac{(2+2)^2}{2} = 8 \quad \text{तथा} \quad a_{22} = \frac{(2+4)^2}{2} = 18$$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 9/2 & 25/2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ है।

**प्रश्न 5.** एक $3 \times 4$ आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होते हैं

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$

**हल** (i) चूँकि ज्ञात आव्यूह $3 \times 4$ कोटि का है अतः अभीष्ट आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{3\times 4}, \text{ जहाँ } a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$$

$i$ तथा $j$ के स्थान पर मान रखने पर आव्यूह $A$ के सभी अवयवों को इस प्रकार ज्ञात करते हैं।

$$\therefore \quad a_{11} = \frac{1}{2}|-3+1| = 1, \qquad a_{12} = \frac{1}{2}|-3+2| = \frac{1}{2}$$

$$a_{13} = \frac{1}{2}|-3+3| = 0, \qquad a_{14} = \frac{1}{2}|-3+4| = \frac{1}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}|-6+1| = \frac{5}{2}, \qquad a_{22} = \frac{1}{2}|-6+2| = 2$$

$$a_{23} = \frac{1}{2}|-6+3| = \frac{3}{2}, \qquad a_{24} = \frac{1}{2}|-6+4| = 1$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$a_{31} = \frac{1}{2}|-9+1| = 4, \qquad a_{32} = \frac{1}{2}|-9+2| = \frac{7}{2}$$

$$a_{33} = \frac{1}{2}|-9+3| = 3 \text{ तथा } a_{34} = \frac{1}{2}|-9+4| = \frac{5}{2}$$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 5/2 & 2 & 3/2 & 1 \\ 4 & 7/2 & 3 & 5/2 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ है।

(ii) यहाँ, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{3\times 4}$ जहाँ $a_{ij} = 2i - j$

$\therefore$ $a_{11} = 2 - 1 = 1, \qquad a_{12} = 2 - 2 = 0,$

$a_{13} = 2 - 3 = -1, \qquad a_{14} = 2 - 4 = -2,$

$a_{21} = 4 - 1 = 3, \qquad a_{22} = 4 - 2 = 2,$

$a_{23} = 4 - 3 = 1, \qquad a_{24} = 4 - 4 = 0$

$a_{31} = 6 - 1 = 5, \qquad a_{32} = 6 - 2 = 4,$

$a_{33} = 6 - 3 = 3$ तथा $a_{34} = 6 - 4 = 2$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ है।

**प्रश्न 6.** **निम्नलिखित समीकरण से $x$, $y$ तथा $z$ का मान ज्ञात कीजिए।**

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

यदि दो आव्यूह समान हों, तो उनके संगत अवयव भी बराबर होते हैं। अर्थात् जब $A_{ij} = B_{ij}$, तब $[a_{ij}] = [b_{ij}]$, इसलिए $x$, $y$ तथा $z$ का मान ज्ञात करने लिए पहले हम ज्ञात आव्यूह के संगत अवयवों को बराबर करेंगे।

**हल** (i) दिया है, $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$,

समान आव्यूह की परिभाषा से, हम जानते हैं कि ज्ञात आव्यूह बराबर हैं, तो उनके संगत अवयव बराबर होते हैं।

अतः संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$4 = y,\ 3 = z \text{ तथा } x = 1 \Rightarrow x = 1,\ y = 4 \text{ तथा } z = 3$$

(ii) दिया है, $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$,

समान आव्यूह की परिभाषा से, हम जानते हैं कि ज्ञात आव्यूह समान हैं, तो उसके संगत अवयव भी बराबर होंगे।

अतः संगत अवयवों की तुलना करने पर,

Durga Tutorial
Banjanpur

$$x + y = 6 \quad \text{...(i)}$$
$$5 + z = 5 \quad \text{...(ii)}$$
तथा $$xy = 8 \quad \text{...(iii)}$$
समी (ii) से, $$z = 0$$
समी (i) से, $$y = 6 - x \quad \text{...(iv)}$$
$y$ का मान समी (iii) में रखने पर,
$$x(6 - x) = 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ या } x = 4$$
जब $x = 2$, तब समी (iv) से, $y = 6 - 2 = 4$ तथा
जब $x = 4$, तब समी (iv) से, $y = 6 - 4 = 2$
अतः $x = 2, y = 4$ तथा $z = 0$
अथवा $x = 4, y = 2$ तथा $z = 0$

(iii) दिया है, $\begin{bmatrix} x + y + z \\ x + z \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

समान आव्यूह की परिभाषा से हम जानते हैं कि ज्ञात आव्यूह बराबर हैं, तो उसके संगत अवयव भी बराबर होंगे।
अतः संगत अवयवों की तुलना करने पर,
$$x + y + z = 9 \quad \text{...(i)}$$
$$x + z = 5 \quad \text{...(ii)}$$
$$y + z = 7 \quad \text{...(iii)}$$
समी (i) से समी (ii) को घटाने पर हम प्राप्त करते हैं, $y = 4$
समी (ii) से समी (iii) को घटाने पर हम प्राप्त करते हैं, $x = 2$
समी (iii) में $y = 4$ प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं
$$4 + z = 7 \Rightarrow z = 7 - 4 = 3$$
अतः $$x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$$

**प्रश्न 7.** समीकरण $\begin{bmatrix} a - b & 2a + c \\ 2a - b & 3c + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ से $a, b, c$ तथा $d$ के मान ज्ञात कीजिए।

यदि दो आव्यूह बराबर हैं, तब उनके संगत अवयव भी बराबर होते हैं। इसलिए $a, b$ तथ $c$ का मान निकालने के लिए अवयवों को बराबर कर समीकरण परिकलित कर उनको हल करते हैं।

**हल** दिया है, $\begin{bmatrix} a - b & 2a + c \\ 2a - b & 3c + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$

समान आव्यूह की परिभाषा से चूँकि प्रदत्त आव्यूह बराबर हैं, तो उनके संगत अवयव भी बराबर होंगे। संगत अवयवों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं
$$a - b = -1 \quad \text{...(i)}$$
$$2a - b = 0 \quad \text{...(ii)}$$
$$2a + c = 5 \quad \text{...(iii)}$$
तथा $$3c + d = 13 \quad \text{...(iv)}$$

Durga Tutorial Bahjapur

समी (ii) में से समी (i) को घटाने पर, $a = 1$

समी (i) तथा समी (iii) में $a = 1$ रखने पर, $1 - b = -1$ तथा $2 + c = 5$

$\Rightarrow \quad b = 2 \quad$ तथा $\quad c = 3$

समी (iv) में $c = 3$ प्रतिस्थापित करने पर, $3 \times 3 + d = 13 \Rightarrow d = 13 - 9 = 4$

इस प्रकार, $a = 1, b = 2, c = 3$ तथा $d = 4$

**प्रश्न 8.** $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ **एक वर्ग आव्यूह है, यदि**

(a) $m < n$ (b) $m > n$ (c) $m = n$ (d) इनमें से कोई नहीं

**हल** (c) चूँकि यह एक वर्ग आव्यूह है और इसमें पंक्तियो तथा स्तम्भों की संख्या बराबर होती हैं।

अतः $\quad m = n$

$\therefore \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}$

**प्रश्न 9.** $x$ **तथा** $y$ **के प्रदत्त किन मानों के लिए आव्यूहों के निम्नलिखित युग्म समान हैं?**

$$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) $x = \frac{-1}{3}, y = 7$ (b) ज्ञात करना संभव नहीं हैं

(c) $y = 7, x = \frac{-2}{3}$ (d) $x = \frac{-1}{3}, y = \frac{-2}{3}$

यदि दो आव्यूह बराबर हैं, तब उनके संगत अवयव बराबर होते हैं। अतः $x$ तथा $y$ के मान प्राप्त करने के लिए हम अवयवों को बराबर कर समीकरण स्थापित करते हैं और फिर उनको सरल करते हैं।

**हल** (b) प्रश्नानुसार, $\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

समान आव्यूह की परिभाषा से,

$$3x + 7 = 0 \quad \ldots(i)$$

$$5 = y - 2 \quad \ldots(ii)$$

$$y + 1 = 8 \quad \ldots(iii)$$

$$2 - 3x = 4 \quad \ldots(iv)$$

समी (ii) से, $\quad y = 7$

समी (i) से, $\quad 3x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7}{3}$

समी (iv) से, $\quad 2 - 3x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2}{3}$

चूँकि एक समय में $x$ का केवल एक मान हो सकता है, अतः यहाँ $x$ तथा $y$ का वह मान प्राप्त करना संभव नहीं हैं जिसके लिए प्रदत्त आव्यूह बराबर है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

**प्रश्न 10.** $3 \times 3$ कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल कितनी संख्या होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है?

(a) 27 (b) 18 (c) 81 (d) 512

**हल** चूँकि $3 \times 3$ कोटि के आव्यूह में 9 अवयव होते हैं और प्रत्येक अवयव को दो तरीकों से चयनित किया जा सकता है (या तो 0 है या फिर 1 है)

इस प्रकार, सभी स्थान के अवयवों की स्थिति $2^9 = 512$ तरीकों से चयनित की जा सकती हैं।

(गुणज सिद्धांत के द्वारा)

अतः अभीष्ट आव्यूहों की संख्या 512 है।

# प्रश्नावली 3.2

**प्रश्न 1.** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

(i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $3A - C$ (iv) $AB$ (v) $BA$

**हल**

(i) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 4+3 \\ 3+(-2) & 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 4-3 \\ 3-(-2) & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = 3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6-(-2) & 12-5 \\ 9-3 & 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

(iv) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1+4\times(-2) & 2\times3+4\times5 \\ 3\times1+2\times(-2) & 3\times3+2\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$

(v) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times2+3\times3 & 1\times4+3\times2 \\ (-2)\times2+5\times3 & (-2)\times4+5\times2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

Durga Tutorial
Since 1996
Banjapur

**प्रश्न 2.** निम्नलिखित को परिकलित कीजिए

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

**हल** (i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a & b+b \\ -b+b & a+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2+2ab & b^2+c^2+2bc \\ a^2+c^2-2ac & a^2+b^2-2ab \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix} \quad \left[\because \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \end{array}\right]$$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+12 & 4+7 & -6+6 \\ 8+8 & 5+0 & 16+5 \\ 2+3 & 8+2 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin^2 x + \cos^2 x & \cos^2 x + \sin^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

**प्रश्न 3.** निम्न गुणनफल परिकलित कीजिए

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

**हल** (i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \times a + b \times b & a \times (-b) + b \times a \\ (-b) \times a + a \times b & (-b) \times (-b) + a \times a \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2 & -ab+ab \\ -ab+ab & b^2+a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & b^2+a^2 \end{bmatrix}$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

(ii) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}_{3\times1}[2 \quad 3 \quad 4]_{1\times3}=\begin{bmatrix}1\times2 & 1\times3 & 1\times4\\2\times2 & 2\times3 & 2\times4\\3\times2 & 3\times3 & 3\times4\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\4 & 6 & 8\\6 & 9 & 12\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+(-2)\times2 & 1\times2+(-2)\times3 & 1\times3+(-2)\times1\\2\times1+3\times2 & 2\times2+3\times3 & 2\times3+3\times1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-3 & -4 & 1\\8 & 13 & 9\end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\0 & 2 & 4\\3 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+0+12 & -6+6+0 & 10+12+20\\3+0+15 & -9+8+0 & 15+16+25\\4+0+18 & -12+10+0 & 20+20+30\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}14 & 0 & 42\\18 & -1 & 56\\22 & -2 & 70\end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1 & 0+2 & 2+1\\3-2 & 0+4 & 3+2\\-1-1 & 0+2 & -1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 4 & 5\\-2 & 2 & 0\end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\-1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-1+9 & -9+0+3\\-2+0+6 & 3+0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -6\\4 & 5\end{bmatrix}$

**प्रश्न 4.** यदि, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\5 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\4 & 2 & 5\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\0 & 3 & 2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}$, तो $(A+B)$ तथा $(B-C)$ परिकलित कीजिए। साथ ही सत्यापित कीजिए कि

$$A+(B-C)=(A+B)-C$$

**हल** $A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\5 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\4 & 2 & 5\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\9 & 2 & 7\\3 & -1 & 4\end{bmatrix}$

तथा $B-C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\4 & 2 & 5\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\0 & 3 & 2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\4 & -1 & 3\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore$ $(A+B)-C=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\9 & 2 & 7\\3 & -1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\0 & 3 & 2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\9 & -1 & 5\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

तथा $A+(B-C)=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 4 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 9 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

अत: $(A+B)-C=A+(B-C)$ सत्य है।

**प्रश्न 5.** यदि $A=\begin{bmatrix}2/3 & 1 & 5/3\\ 1/3 & 2/3 & 4/3\\ 7/3 & 2 & 2/3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2/5 & 3/5 & 1\\ 1/5 & 2/5 & 4/5\\ 7/5 & 6/5 & 2/5\end{bmatrix}$ हो, तो $3A-5B$ 'परिकलित कीजिए।

सर्वप्रथम आव्यूह $A$ के प्रत्येक अवयव को 3 से तथा आव्यूह $B$ के प्रत्येक अवयव को 5 से गुणा करें।

**हल** $3A-5B=3\begin{bmatrix}2/3 & 1 & 5/3\\ 1/3 & 2/3 & 4/3\\ 7/3 & 2 & 2/3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2/5 & 3/5 & 1\\ 1/5 & 2/5 & 4/5\\ 7/5 & 6/5 & 2/5\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 4\\ 7 & 6 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 4\\ 7 & 6 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

**प्रश्न 6.** सरल कीजिए $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

**हल** $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta\\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\\ -\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta+\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad (\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1)$$

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

**प्रश्न 7.** $X$ तथा $Y$ ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $X+Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ तथा $X-Y=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

(ii) $2X+3Y=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ तथा $3X+2Y=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$

**हल** (i) दिया है, $X+Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ ...(i)

तथा $X-Y=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$2X = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$$2Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) दिया है, $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ...(i)

तथा $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ...(ii)

समी (i) को 2 से तथा समी (ii) को 3 से गुणा करके परस्पर घटाने पर,

$$2(2X + 3Y) - 3(3X + 2Y) = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 4X + 6Y - 9X - 6Y = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -5X = \begin{bmatrix} 4-6 & 6+6 \\ 8+3 & 0-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ 11 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 12 \\ 11 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & -12/5 \\ -11/5 & 3 \end{bmatrix}$$

तब समी (i) से, $3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2/5 & -12/5 \\ -11/5 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 - \frac{4}{5} & 3 + \frac{24}{5} \\ 4 + \frac{22}{5} & 0 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 & 39/5 \\ 42/5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad Y = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6/5 & 39/5 \\ 42/5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 13/5 \\ 14/5 & -2 \end{bmatrix}$$

**प्रश्न 8.** $X$ तथा $Y$ ज्ञात कीजिए, यदि $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

**हल** दिया है, $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-3 & 0-2 \\ -3-1 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

**प्रश्न 9.** $x$ तथा $y$ ज्ञात कीजिए, यदि $2\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y & 0\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\1 & 8\end{bmatrix}$

**हल** दिया है, $2\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y & 0\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\1 & 8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2+y & 6+0\\0+1 & 2x+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\1 & 8\end{bmatrix}$

समान आव्यूह की परिभाषा से, हम जानते हैं कि ज्ञात आव्यूह समान हैं, तो इनके संगत अवयव भी समान होंगे। अतः संगत अवयवों को समान रखने पर हमें प्राप्त होता है कि,

$$2+y=5 \quad \ldots(i)$$

तथा

$$2x+2=8 \quad \ldots(ii)$$

$\Rightarrow \quad y=5-2=3$ तथा $2x=8-2 \Rightarrow y=3$ तथा $x=\frac{6}{2}=3$

**प्रश्न 10.** प्रदत्त समीकरण को $x, y, z$ तथा $t$ के लिए हल कीजिए, यदि

$$2\begin{bmatrix}x & z\\y & t\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 6\end{bmatrix}$$

**हल** दिया है, $2\begin{bmatrix}x & z\\y & t\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 6\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2x & 2z\\2y & 2t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -3\\0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 15\\12 & 18\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2x+3 & 2z-3\\2y+0 & 2t+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 15\\12 & 18\end{bmatrix}$$

समान आव्यूह की परिभाषा से, हम जानते हैं कि ज्ञात आव्यूह समान हैं, तो उसके संगत अवयव भी समान होंगे। इस प्रकार संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$2x+3=9,\ 2y+0=12,\ 2z-3=15 \text{ तथा } 2t+6=18$$

$$\Rightarrow x=\frac{9-3}{2},\ y=\frac{12}{2},\ z=\frac{15+3}{2} \text{ तथा } t=\frac{18-6}{2}$$

$$\Rightarrow x=3,\ y=6,\ z=9 \text{ तथा } t=6$$

**प्रश्न 11.** यदि $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ है, तो $x$ तथा $y$ के मान ज्ञात कीजिए।

**हल** यदि $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2x+y(-1)\\3x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$

समान आव्यूह की परिभाषा से, हम जानते हैं कि ज्ञात आव्यूह समान हैं, तो इनके संगत अवयव भी समान होंगे। अतः संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$2x-y=10 \quad \ldots(i)$$

तथा

$$3x+y=5 \quad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) को जाड़ने पर,

$$5x=15 \Rightarrow x=3$$

समी (i) में $x=3$ प्रतिस्थापित करने पर,

$$2\times3-y=10 \Rightarrow y=6-10=-4$$



Durga Tutorial Baniapur

**प्रश्न 12.** यदि $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ है, तो $x, y, z$ तथा $w$ के मानों को ज्ञात कीजिए।

**हल** दिया है, $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+z+w & 2w+3 \end{bmatrix}$$

समान आव्यूह की परिभाषा से, हम जानते हैं कि ज्ञात आव्यूह समान हैं, तो इसके संगत अवयव समान होंगे। अतः संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$3x = x+4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

तथा $3y = 6+x+y \Rightarrow 2y = 6+x \Rightarrow y = \frac{6+x}{2}$

तथा उपरोक्त में $x$ का मान रखने पर,

$$y = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$3z = -1+z+w, \quad 2z = -1+w$$

$$z = \frac{-1+w}{2} \qquad \ldots(i)$$

$$3w = 2w+3 \Rightarrow w = 3$$

अब, समी (i) में $w$ का मान रखने पर,

$$z = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

अतः $x, y, z$ तथा $w$ के मान क्रमशः 2, 4, 1 तथा 3 हैं।

**प्रश्न 13.** यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $F(x)F(y) = F(x+y)$

$F(y)$ के लिए $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ में $x$ को $y$ के द्वारा प्रतिस्थापित कीजिए इसी प्रकार, $F(x+y)$ के लिए $F(x)$ में $x$ को $(x+y)$ के द्वारा प्रतिस्थापित कीजिए, अब आव्यूह गुणज द्वारा $F(X)$ तथा $F(y)$ को गुणा करते हैं तथा इसे हल करके अभीष्ट निष्कर्ष प्राप्त करते हैं।

**हल** बायाँ पक्ष $= F(x)\,F(y) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

$$= \begin{bmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -\sin y \cos x - \sin x \cos y & 0 \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \because \cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin (A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos (x+y) & -\sin (x+y) & 0 \\ \sin (x+y) & \cos (x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अब, $F(x)$ में $x$ को $(x+y)$ के द्वारा प्रतिस्थापित करने पर,

$$\therefore \quad F(x+y) = \begin{bmatrix} \cos (x+y) & -\sin(x+y) & 0 \\ \sin (x+y) & \cos (x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$F(x)\, F(y) = F(x+y) =$ दायाँ पक्ष

**प्रश्न 14.** दर्शाइए कि (i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**हल**

(i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-3 & 5-4 \\ 12+21 & 6+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 33 & 34 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+6 & -2+7 \\ 15+24 & -3+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 39 & 25 \end{bmatrix}$

अतः $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) यहाँ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0+6 & 1-2+9 & 0+2+12 \\ 0+0+0 & 0+(-1)+0 & 0+1+0 \\ -1+0+0 & 1-1+0 & 0+1+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+0+0 & -2+1+0 & -3+0+0 \\ 0+0+1 & 0-1+1 & 0+0+0 \\ 2+0+4 & 4+3+4 & 6+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 6 \end{bmatrix}$

अतः अभीष्ट प्रतिबन्ध सत्यापित हुआ।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

**प्रश्न 15.** यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है, तो $A^2 - 5A + 6I$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हल** यहाँ, $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+0+1 & 0+0-1 & 2+0+0 \\ 4+2+3 & 0+1-3 & 2+3+0 \\ 2-2+0 & 0-1+0 & 1-3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 - 5A + 6I = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-10+6 & -1+0+0 & 2-5+0 \\ 9-10+0 & -2-5+6 & 5-15+0 \\ 0-5+0 & -1+5+0 & -2+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

**प्रश्न 16.** यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$

**हल** यहाँ, $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+4 & 0+0+0 & 2+0+6 \\ 0+0+2 & 0+4+0 & 0+2+3 \\ 2+0+6 & 0+0+0 & 4+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+0+16 & 0+0+0 & 10+0+24 \\ 2+0+10 & 0+8+0 & 4+4+15 \\ 8+0+26 & 0+0+0 & 16+0+39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

Durga Tutorial Since 1996 Paniapur

$$\therefore A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & 0 & 48 \\ 12 & 24 & 30 \\ 48 & 0 & 78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 7 \\ 14 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-30+7+2 & 0-0+0+0 & 34-48+14+0 \\ 12-12+0+0 & 8-24+14+2 & 23-30+7+0 \\ 34-48+14+0 & 0-0+0+0 & 55-78+21+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

**प्रश्न 17.** यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $A^2 = kA - 2I$ हो, तो $k$ ज्ञात कीजिए।

**हल** दिया है, $A^2 = kA - 2I \Rightarrow AA = kA - 2I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9-8 & -6+4 \\ 12-8 & -8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ 4k & -2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k \\ 4k & -2k-2 \end{bmatrix}$$

समान आव्यूह के गुणधर्म द्वारा समान आव्यूह के संगत अवयवों को समान रखने पर,

$$3k - 2 = 1 \Rightarrow k = 1$$
$$-2k = -2 \Rightarrow k = 1$$
$$4k = 4 \Rightarrow k = 1$$
$$-4 = -2k - 2 \Rightarrow k = 1 \quad \text{अत: } k = 1$$

**प्रश्न 18.** यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ तथा $I$ कोटि 2 का एक तत्समक आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि $I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

**हल** यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix}$, जहाँ $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

अब, $\cos\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ तथा $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$$\text{दायाँ पक्ष} = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -t \\ +t & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

Durga Tutorial
Since 1996
Banjapur

$$=\begin{bmatrix}1 & t\\ -t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2}\\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-t^2+2t^2}{1+t^2} & \frac{-2t+t(1-t^2)}{1+t^2}\\ \frac{-t(1-t^2)+2t}{1+t^2} & \frac{2t^2+1-t^2}{1+t^2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1+t^2}{1+t^2} & \frac{-2t+t-t^3}{1+t^2}\\ \frac{-t+t^3+2t}{1+t^2} & \frac{2t^2+1-t^2}{1+t^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1+t^2}{1+t^2} & \frac{-t(1+t^2)}{1+t^2}\\ \frac{t(1+t^2)}{1+t^2} & \frac{1+t^2}{1+t^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{bmatrix}$$

तथा बायाँ पक्ष $=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -t\\ t & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+1 & -t+0\\ t+0 & 0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{bmatrix}=$ दायाँ पक्ष

$t$ का मान दोनों पक्षों में रखने पर,

$$\begin{bmatrix}1 & -\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 1\end{bmatrix}$$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

**वैकल्पिक विधि** यहाँ, $A=\begin{bmatrix}0 & -\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0\end{bmatrix}$

∴ $I+A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0\end{bmatrix}$

तथा $I-A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ -\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 1\end{bmatrix}$

∴ $(I-A)\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\ -\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha+\tan(\alpha/2)\sin\alpha & -\sin\alpha+\tan(\alpha/2)\cos\alpha\\ -\tan(\alpha/2)\cos\alpha+\sin\alpha & \tan(\alpha/2)\sin\alpha+\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\cos\alpha\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)\sin\alpha}{\cos(\alpha/2)} & \frac{-\sin\alpha\cos(\alpha/2)+\sin(\alpha/2)\cos\alpha}{\cos(\alpha/2)}\\ \frac{-\sin(\alpha/2)\cos\alpha+\cos(\alpha/2)\sin\alpha}{\cos(\alpha/2)} & \frac{\sin(\alpha/2)\sin\alpha+\cos(\alpha/2)\cos\alpha}{\cos(\alpha/2)}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} & \dfrac{-\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ \dfrac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} & \dfrac{\cos\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} & \dfrac{-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} & \dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \end{array}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 1 \end{bmatrix} = I + A \quad \text{अतः } I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

**प्रश्न 19.** किसी व्यापार संघ के पास ₹ 30000 का कोष है जिसे दो भिन्न-भिन्न प्रकार के ब्रांडों में निवेशित करना है। प्रथम ब्रांड पर 5% वार्षिक तथा द्वितीय ब्रांड पर 7% वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है। आव्यूह गुणन के प्रयोग द्वारा यह निर्धारित कीजिए कि ₹ 30000 के कोष को दो प्राकर के ब्रांडों में निवेश करने के लिए यह किस प्रकार बाँटें जिससे व्यापार संघ को प्राप्त कुल वार्षिक ब्याज

(i) ₹ 1800 (ii) ₹ 2000

**हल** मान लीजिए प्रथम ब्रांड पर ₹ $x$ तथा द्वितीय ब्रांड पर ₹ $(30000 - x)$ निवेशित करता है।

(i) प्रश्नानुसार, $[x \quad 30000 - x]\begin{bmatrix} \frac{5}{100} \\ \frac{7}{100} \end{bmatrix} = [1800]$

$\Rightarrow \left[\dfrac{5x}{100} + \dfrac{(30000 - x)7}{100}\right] = [1800]$

$\Rightarrow \dfrac{5x + 210000 - 7x}{100} = 1800$

$\Rightarrow 210000 - 2x = 180000 \Rightarrow 30000 = 2x \Rightarrow x = 15000$

अतः दोनों ब्राडों पर निवेशित मान क्रमशः ₹ 15000 तथा ₹ (30000 − 15000) = ₹ 15000 हैं।

(ii) प्रश्नानुसार, $[x \quad 30000 - x]\begin{bmatrix} \frac{5}{100} \\ \frac{7}{100} \end{bmatrix} = [2000]$

$\Rightarrow \left[\dfrac{5x}{100} + \dfrac{(30000 - x)7}{100}\right] = [2000]$

अतः दोनों प्रकार के ब्राडों पर निवेशित मात्रा क्रमशः ₹ 5000 तथा ₹ (30000 − 5000) = ₹ 25000 हैं।

Durga Tutorial Since Barisipur

**प्रश्न 20.** किसी स्कूल की पुस्तकों की दुकान में 10 दर्जन रसायन विज्ञान, 8 दर्जन भौतिक विज्ञान तथा 10 दर्जन अर्थशास्त्र की पुस्तकें हैं। इन पुस्तकों का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹ 80, ₹ 60 तथा ₹ 40 प्रति पुस्तक है। आव्यूह बीजगणित के प्रयोग द्वारा ज्ञात कीजिए कि सभी पुस्तकों को बेचने से दुकान को कुल कितनी धनराशि प्राप्त होगी।

**हल** मान लीजिए $$A = [10 \times 12 \quad 8 \times 12 \quad 10 \times 12]$$

तथा $$B = [80 \quad 60 \quad 40]^T = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix}$$

तीनों प्रकार की किताबों को बेचने से विक्रेता को प्राप्त धनराशि की गणना अव्यूह $A$ तथा $B$ के आव्यूह गुणन द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

अब, $$AB = [120 \quad 96 \quad 120] \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix} = [120 \times 80 + 96 \times 60 + 120 \times 40]_{1 \times 1}$$

$$= [9600 + 5760 + 4800]_{1 \times 1} = [20160]_{1 \times 1}$$

इस प्रकार, किताब विक्रेता को प्राप्त धनराशि = ₹ 20160

**निर्देश** (प्र. सं. 21-22) मान लीजिए कि $X, Y, Z, W$ तथा $P$ क्रमशः $2 \times n, 3 \times k, 2 \times p, n \times 3$ तथा $p \times k$ कोटियों के आव्यूह हैं। नीचे दिए प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए।

**प्रश्न 21.** $PY + WY$ के परिभाषित होने के लिए $n, k$ तथा $p$ पर क्या प्रतिबंध होगा?

(a) $k = 3, p = n$ (b) $k$ स्वेच्छ है, $p = 2$ (c) $p$ सवेच्छ है, $l = 3$ (d) $k = 2, p = 3$

**हल** (a) आव्यूह $P$ तथा $Y$ की कोटि क्रमशः $p \times k$ तथा $3 \times k$ हैं।

इस प्रकार यदि $k = 3$, तो आव्यूह परिभाषित होगा, तद्नुसार $PY, p \times k$ कोटि का तथा आव्यूह तथा $Y$ क्रमशः $n \times 3$ तथा $3 \times k$ कोटि के होंगे।

चूँकि आव्यूह $W$ में स्तम्भों की संख्या $Y$ में पंक्तियों की संख्या के बराबर हैं इसलिए $WY$ परिभाषित है और इसकी कोटि $n \times k$ है। आव्यूह $PY$ तथा $WY$ को केवल तभी जोड़े जा सकते हैं जब उनकी कोटियाँ समान हों।

फिर भी आव्यूह $PY, p \times k$ कोटि का तथा $WY, n \times k$ कोटि का है अर्थात् $p = n$ होगा। अतः $PY, WY$ के परिभाषित होने के लिए $n, k$ तथा $P$ पर $k = 3$ तथा $P = n$ प्रतिबंध है।

**प्रश्न 22.** यदि $n = p$, तो आव्यूह $7X - 5Z$ की कोटि है

(a) $p \times 2$ (b) $2 \times n$ (c) $n \times 3$ (d) $p \times n$

**हल** (b) आव्यूह $X$ $2 \times n$ कोटि का है। इसलिए $7X$ गुणन से प्राप्त आव्यूह भी समान कोटि का होगा। $Z$ आव्यूह की कोटि $2 \times p$ है। चूँकि $n = p$ अतः आव्यूह $Z$ की कोटि $2 \times n$ होगी।

इस प्रकार, आव्यूह $Z$ में 5 के गुणन से प्राप्त आव्यूह भी समान कोटि का होगा।
अतः दोनों आव्यूह $7X$ तथा $5Z$, $2 \times n$ कोटि के होंगे।
इस प्रकार, आव्यूह $7X - 5Z$ परिभाषित है और इसकी कोटि $2 \times n$ है।

# प्रश्नावली 3.3

**प्रश्न 1.** निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक का परिवर्त ज्ञात कीजिए

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

**हल** (i) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$, तब $A' = [5 \quad 1/2 \quad -1]_{1 \times 3}$

(ii) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, तब $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, तब $A' = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

**प्रश्न 2.** यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$

**हल**

(i) यहाँ, $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 6 & 9 & 9 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad (A + B)' = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 3 & 9 & 4 \\ -2 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ ...(i)

तथा $A' + B' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}'$

$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 3 & 9 & 4 \\ -2 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ ...(ii)

अतः समी (i) तथा (ii) से यह सत्यापित होता है कि $(A + B)' = A' + B'$

(ii) यहाँ, $A - B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Durga Tutorial Baniapur

$$= \begin{bmatrix} -1+4 & 2-1 & 3+5 \\ 5-1 & 7-2 & 9-0 \\ -2-1 & 1-3 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 9 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad (A-B)' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots(i)$$

तथा $$A' - B' = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4 & 5-1 & -2-1 \\ 2-1 & 7-2 & 1-3 \\ 3-(-5) & 9-0 & 1-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots(ii)$$

अत: समी (i) तथा (ii) से यह सत्यापित होता है कि $(A-B)' = A' - B'$

**प्रश्न 3.** यदि $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A+B)' = A' + B'$ (ii) $(A-B)' = A' - B'$.

**हल** $\because A = (A')' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(i) यहाँ, $A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= (A+B)' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$A' \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

यहाँ, दायाँ पक्ष $= A' + B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

अत: $(A+B)' = A' + B'$ सत्यापित हुआ।

(ii) यहाँ,

दायाँ पक्ष $= A' - B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 4-1 \\ -1-2 & 2-2 \\ 0-1 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Durga Tutorial
Since 1996
Bariapur

तथा $(A-B)' = \left(\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\right)'$   $[\because A = (A')']$

$$= \begin{bmatrix}3+1 & -1-2 & 0-1\\ 4-1 & 2-2 & 1-3\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}4 & -3 & -1\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

अत: $(A-B)' = A' - B'$ सत्यापित हुआ।

**प्रश्न 4.** यदि $A' = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ है, तो $(A+2B)'$ ज्ञात कीजिए।

**हल** दिया है, $A' = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $A = (A')' = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$   $[\because (A')' = A]$

तथा $2B = 2\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

$\therefore$ $A + 2B = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 1\\ 5 & 6\end{bmatrix} \Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix}-4 & 1\\ 5 & 6\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}-4 & 5\\ 1 & 6\end{bmatrix}$

**प्रश्न 5.** $A$ तथा $B$ आव्यूहों के लिए सत्यापित कीजिए कि $(AB)' = B'A'$, जहाँ

(i) $A = \begin{bmatrix}1\\ -4\\ 3\end{bmatrix}, B = [-1 \quad 2 \quad 1]$   (ii) $A = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}, B = [1 \quad 5 \quad 7]$

**हल** (i) यहाँ, $AB = \begin{bmatrix}1\\ -4\\ 3\end{bmatrix}[-1 \quad 2 \quad 1] = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 4 & -8 & -4\\ -3 & 6 & 3\end{bmatrix}$

$$(AB)' = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 4 & -8 & -4\\ -3 & 6 & 3\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}-1 & 4 & -3\\ 2 & -8 & 6\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix} \quad \ldots(i)$$

तथा $B'A' = [-1 \quad 2 \quad 1]' \begin{bmatrix}1\\ -4\\ 3\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}[1 \quad -4 \quad 3] = \begin{bmatrix}-1 & 4 & -3\\ 2 & -8 & 6\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से, $(AB)' = B'A'$

(ii) यहाँ, $(AB)' = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}[1 \quad 5 \quad 7] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 7\\ 2 & 10 & 14\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 10\\ 0 & 7 & 14\end{bmatrix}$ ...(i)

Durga Tutorial Baniapur

तथा $B'A' = [1 \quad 5 \quad 7]' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से यह सत्यापित होता है कि $(AB)' = B'A'$.

**प्रश्न 6.** (i) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ **हो, तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$**

(ii) **यदि $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$**

**हल**

(i) यहाँ, $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A'A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (\cos\alpha)(\cos\alpha) + (\sin\alpha)(\sin\alpha) & (\cos\alpha)(\sin\alpha) + (-\sin\alpha)(\cos\alpha) \\ (\sin\alpha)(\cos\alpha) + (\cos\alpha)(-\sin\alpha) & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$(\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$

अत: $A'A = I$ सत्य है।

(ii) यहाँ, $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A'A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (\sin\alpha)(\sin\alpha) + (-\cos\alpha)(-\cos\alpha) & (\sin\alpha)(\cos\alpha) + (-\cos\alpha)(\sin\alpha) \\ (\sin\alpha)(\cos\alpha) + (\sin\alpha)(-\cos\alpha) & (\cos\alpha)(\cos\alpha) + (\sin\alpha)(\sin\alpha) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$(\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$

$\therefore A'A = 1$

अत: $A'A = I$ सत्यापित होता है

**प्रश्न 7.** (i) **सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।**

(ii) **सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है।**

Durga Tutorial Since 1996 Banjapur

सममित आव्यूह के लिए हम $A' = A$ तथा विषम सममित आव्यूह के लिए हम $A' = -A$ सिद्ध करते हैं।

**हल**

(i) यहाँ, $A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A \quad \therefore \; A' = A$

अर्थात् $A$ एक समामित आव्यूह हैं।

(ii) यहाँ, $A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$

$\therefore \; A' = -A$ अर्थात् $A$ एक विषम सममित आव्यूह है।

**प्रश्न 8.** आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

**(i) $(A + A')$ एक सममित आव्यूह है।**

**(ii) $(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।**

(i) $(A + A')$ को सममित आव्यूह सत्यापित करने के लिए $(A + A')$ का पहले परिवर्त आव्यूह प्राप्त करेंगे तथा गुणधर्म, यदि $A$ एक सममित आव्यूह है, तो $A = A'$ का प्रयोग करते हुए इसे प्रदर्शित करेंगे।

(ii) $(A - A')$ को विषम सममित दिखाने के लिए पहले इसका परिवर्त आव्यूह ज्ञात करेंगे और इसके गुणधर्म $A$ एक विषम सममित आव्यूह होगा, यदि $A = -A'$ का प्रयोग करते हुए इसे सत्यापित करेंगे।

**हल** (i) यहाँ, $A + A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$

$A + A' = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$ तथा $(A + A')' = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$

($\because$ $A' = A$, तब $A$ एक सममित आव्यूह है।)

अत: $(A + A')$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) $A - A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad A - A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

तथा $\quad (A - A')' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (A - A')$

($\because$ $A' = -A$, तब $A$ एक विषम सममित आव्यूह है।)

अत: $(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

Durga Tutorial
Bahiapur

**प्रश्न 9.** यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$, तो $\frac{1}{2}(A + A')$ तथा $\frac{1}{2}(A - A')$ ज्ञात कीजिए।

**हल** अब, $\frac{1}{2}(A + A')$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}'\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

तथा $\frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}'\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2a & 2b \\ -2a & 0 & 2c \\ -2b & -2c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

**प्रश्न 10.** निम्नलिखित आव्यूहों को एक सममित आव्यूह तथा विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Durga Tutorial 1996 Baniapur

**हल**

(i) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, तब $A = P + Q$

जहाँ, $P = \frac{1}{2}(A + A')$ तथा $Q = \frac{1}{2}(A - A')$

अब, $P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad P' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = P$ $\quad$ ($\because P' = P$, अत: $P$ एक सममित आव्यूह है।)

इस प्रकार, $P=\frac{1}{2}(A+A')$ एक सममित आव्यूह है।

अब, $Q=\frac{1}{2}(A-A')=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 4\\ -4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore \quad Q'=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=-Q$

($\because Q'=-Q$, अतः $Q$ एक विषम सममित आव्यूह है।)

इस प्रकार, $Q=\frac{1}{2}(A-A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

अतः $A$ को $P$ तथा $Q$ के योग द्वारा निम्न प्रकार प्रदर्शित कर सकते हैं।

$$P+Q=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}=A$$

(ii) मान लीजिए $A=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$, तब $A'=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}=A$

अब, $A+A'=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -4 & 4\\ -4 & 6 & -2\\ 4 & -2 & 6\end{bmatrix}$

मान लीजिए $P=\frac{1}{2}(A+A')=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}12 & -4 & 4\\ -4 & 6 & -2\\ 4 & -2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$

अब, $P'=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}'=P$

अतः $P=\frac{1}{2}(A+A')$ एक सममित आव्यूह है।

अब, $A-A'=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

मान लीजिए $Q=\frac{1}{2}(A-A')=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

अब, $Q'=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=-Q$

अतः $Q=\frac{1}{2}(A-A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

अतः $A$ को $P$ तथा $Q$ के योग द्वारा निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं।

$$P+Q=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}=A$$

(iii) मान लीजिए $A=\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}$, तब $A'=\begin{bmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & -2 & -5\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

अब, $$A+A'=\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & -2 & -5\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 1 & -5\\ 1 & -4 & -4\\ -5 & -4 & 4\end{bmatrix}$$

$$P=\frac{1}{2}(A+A')=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 1 & -5\\ 1 & -4 & -4\\ -5 & -4 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1/2 & -5/2\\ 1/2 & -2 & -2\\ -5/2 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

अब, $$P'=\begin{bmatrix}3 & 1/2 & -5/2\\ 1/2 & -2 & -2\\ -5/2 & -2 & 2\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}3 & 1/2 & -5/2\\ 1/2 & -2 & -2\\ -5/2 & -2 & 2\end{bmatrix}=P$$

अतः $P=\frac{1}{2}(A+A')$ एक सममित आव्यूह है।

अब, $$A-A'=\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & -2 & -5\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 5 & 3\\ -5 & 0 & 6\\ -3 & -6 & 0\end{bmatrix}$$

मान लीजिए $$Q=\frac{1}{2}(A-A')=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 5 & 3\\ -5 & 0 & 6\\ -3 & -6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 5/2 & 3/2\\ -5/2 & 0 & 3\\ -3/2 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

अब, $$Q'=\begin{bmatrix}0 & 5/2 & 3/2\\ -5/2 & 0 & 3\\ -3/2 & -3 & 0\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}0 & -5/2 & -3/2\\ 5/2 & 0 & -3\\ 3/2 & 3 & 0\end{bmatrix}=-Q$$

अतः $Q=1/2\,(A-A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

अतः $A$ को $P$ तथा $Q$ के योग द्वारा निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं

$$P+Q=\begin{bmatrix}3 & 1/2 & -5/2\\ 1/2 & -2 & -2\\ -5/2 & -2 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 5/2 & 3/2\\ -5/2 & 0 & 3\\ -3/2 & -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}=A$$

(iv) मान लीजिए $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, तब $A'=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

अब, $$A+A'=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

मान लीजिए $P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

अब, $P' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = P$

अत: $P = \frac{1}{2}(A + A')$ एक सममित आव्यूह है।

अब, $A - A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

मान लीजिए $Q = \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

अब, $Q' = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$

अत: $Q = \frac{1}{2}(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

अत: $A$ को $P$ तथा $Q$ के योग द्वारा निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं

$$P + Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

**निर्देश** (प्र.सं. 11-12) निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए।

**प्रश्न 11.** यदि $A$ तथा $B$ समान कोटि के सममित आव्यूह हैं, तो $AB - BA$ एक

(a) विषम सममित आव्यूह है (b) सममित आव्यूह है
(c) शून्य आव्यूह है (d) तत्समक आव्यूह है

Durga Tutorial
Since 19
Baniapur

**हल** (a) दिया है, $A$ तथा $B$ सममित आव्यूह हैं।

$\Rightarrow$ $A' = A$ तथा $B' = B$

$(AB - BA)' = (AB)' - (BA)'$ $[\because (A - B)' = A' - B']$

$= B'A' - A'B'$ $[\because (AB)' = B'A']$

$= BA - AB$ $(\because A' = A$ तथा $B' = B)$

$= -(AB - BA) \Rightarrow (AB - BA)' = -(AB - BA)$

अत: $(AB - BA)$ एक विषम सममित आव्यूह है।

**प्रश्न 12.** यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, तथा $A + A' = I$, तब $\alpha$ का मान है

(a) $\pi/6$ (b) $\pi/3$ (c) $\pi$ (d) $3\pi/2$

**हल** (b) यहाँ, $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा $A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

दिया है, $A + A' = I$

$$\therefore \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

दिए गए आव्यूह के संगत अवयवों की तुलना करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है।

$$2\cos\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

# प्रश्नावली 3.4

**निर्देश** (प्र. सं. 1-17) निम्नलिखित प्रश्नों में आव्यूहों के व्युत्क्रम, यदि उनका अस्तित्व है, तो प्रारंभिक रूपांतरण के प्रयोग से ज्ञात कीजिए।

**प्रश्न 1.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$A^{-1}$ का मान शुरूआत में $A = IA$ मानकर पंक्ति रूपांतरण के द्वारा इसे $AA^{-1} = A^{-1}A$ के रूप में बदलकर प्राप्त करते हैं।

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A$$

($R_2 \to R_2 - 2R_1$ के प्रयोग से)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} A$$

$\left(R_2 \to \frac{1}{5}R_2 \text{ के प्रयोग से}\right)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} A$$

($R_1 \to R_1 + R_2$ के प्रयोग से)

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$(\because AA^{-1} = I)$

**प्रश्न 2.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि $A = IA$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A \qquad (R_1 \leftrightarrow R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to R_2 - 2R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \qquad [R_2 \to (-1)R_2 \text{ के प्रयोग से}]$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \qquad (R_1 \to R_1 - R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**प्रश्न 3.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to R_2 - 2R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_1 \to R_1 - 3R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**प्रश्न 4.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$,

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to \frac{1}{2}R_1 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-5}{2} & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to R_2 - 5R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} A \qquad [R_2 \to (-2) R_2 \text{ के प्रयोग से}]$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to R_1 - \frac{3}{2}R_2 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

**प्रश्न 5.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to \frac{1}{2}R_1 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -7/2 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to R_2 - 7R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to 2R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

**प्रश्न 6.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि $A = IA$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \leftrightarrow R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to R_2 - 2R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \qquad [R_2 \to (-1)R_2 \text{ के प्रयोग से}]$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \qquad (R_1 \to R_1 - 3R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\because AA^{-1} = I)$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

**प्रश्न 7.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to \frac{1}{3} R_1 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -5/3 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to R_2 - 5R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to 3R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to R_1 - \frac{1}{3} R_2 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

**प्रश्न 8.** $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5/4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to \frac{1}{4} R_1 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 5/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to R_2 - 3R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 5/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to 4R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to R_1 - \frac{5}{4} R_2 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\text{अतः} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad (\because AA^{-1} = I)$$

**प्रश्न 9.** $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

Durga Tutorial
Since 1996
Bariarpur

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 10/3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to \frac{1}{3}R_1 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 10/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -2/3 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to R_2 - 2R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 10/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to 3R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to R_1 - \frac{10}{3}R_2 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (\because AA^{-1} = I)$$

**प्रश्न 10.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to \frac{1}{3}R_1 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 4/3 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to R_2 + 4R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix} A \qquad \left(R_2 \to \frac{3}{2}R_2 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} A \qquad \left(R_1 \to R_1 + \frac{1}{3}R_2 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad (\because AA^{-1} = I)$$

**प्रश्न 11.** $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$ ($R_1 \leftrightarrow R_2$ के प्रयोग से)

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} A$ ($R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ के प्रयोग से)

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} A$ $\left[R_2 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) R_2\right.$ के प्रयोग से$\left.\right]$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} A$ ($R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2$ के प्रयोग से)

$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ $(\because A = A^{-1})$

**प्रश्न 12.** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$\therefore \quad \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ $\left(R_1 \rightarrow \frac{1}{6} R_1\right.$ के प्रयोग से$\left.\right)$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} A$ ($R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1$ के प्रयोग से)

इस प्रकार, हम देख सकते हैं कि बाएँ पक्ष में अभीष्ट आव्यूह के द्वितीय पंक्ति के सभी अवयव शून्य हैं, अतः $A^{-1}$ स्थापित नहीं हो सकता है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

**प्रश्न 13.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ $\left(R_1 \rightarrow \frac{1}{2} R_1\right.$ के प्रयोग से$\left.\right)$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A$ ($R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ के प्रयोग से)

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} A$ ($R_2 \to 2R_2$ के प्रयोग से)

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} A$ $\left(R_1 \to R_1 + \frac{3}{2}R_2 \text{ के प्रयोग से}\right)$

$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $(\because AA^{-1} = I)$

**प्रश्न 14.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ $\left(R_1 \to \frac{1}{2}R_1 \text{ के प्रयोग से}\right)$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A$ ($R_2 \to R_2 - 4R_1$ के प्रयोग से)

इस प्रकार, हम देख सकते हैं कि बाएँ पक्ष में अभीष्ट आव्यूह के द्वितीय पंक्ति के सभी अवयव शून्य हैं, अतः $A^{-1}$ स्थायित्व नहीं हो सकता है।

**प्रश्न 15.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$,

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$ ($R_1 \to R_1 + R_2 - R_3$ के प्रयोग से)

$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} A$

($R_2 \to R_2 - 2R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - 3R_1$ के प्रयोग से)

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \leftrightarrow R_3 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3/5 & 3/5 & -4/5 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} A$$

$$\left(R_2 \to -\frac{1}{5}R_2 \text{ तथा } R_3 \to -\frac{1}{5}R_3 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix} A$$

$$(R_2 \to R_2 - 2R_3 \text{ तथा } R_1 \to R_1 - 4R_3 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} A \qquad (R_1 \to R_1 - R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \quad I_3 = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} A \;\therefore\; A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\because AA^{-1} = I)$$

**प्रश्न 16.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$,

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$(R_2 \to R_2 + 3R_1 \text{ तथा } R_3 \to R_3 - 2R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

Durga Tutorial
Baniapur

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -11/9 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/9 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad \left[R_2 \to \frac{1}{9}R_2 \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -11/9 \\ 0 & 0 & 25/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/9 & 0 \\ -5/3 & 1/9 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_3 \to R_3 + R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -11/9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/9 & 0 \\ -3/5 & 1/25 & 9/25 \end{bmatrix} A \qquad \left[R_3 \to \left(\frac{9}{25}\right)R_3 \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/25 & 18/25 \\ -2/5 & 4/25 & 11/25 \\ -3/5 & 1/25 & 9/25 \end{bmatrix} A$$

$$\left[R_2 \to R_2 + \left(\frac{11}{9}\right)R_3 \text{ तथा } R_1 \to R_1 + 2R_3 \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -3/5 \\ -2/5 & 4/25 & 11/25 \\ -3/5 & 1/25 & 9/25 \end{bmatrix} A \qquad (R_1 \to R_1 - 3R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

अतः $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -3/5 \\ -2/5 & 4/25 & 11/25 \\ -3/5 & 1/25 & 9/25 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 25 & -10 & -15 \\ -10 & 4 & 11 \\ -15 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ $\qquad (\because AA^{-1} = I)$

**प्रश्न 17.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**हल** मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

हम जानते हैं कि, $A = IA$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad \left[R_1 \to \left(\frac{1}{2}\right)R_1 \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to R_2 - 5R_1 \text{ के प्रयोग से})$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & -1 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_3 \to R_3 - R_2 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} A \quad (R_3 \to 2R_3 \text{ के प्रयोग से})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} A$$

$$\left(R_2 \to R_2 - \frac{5}{2}R_3 \text{ तथा } R_1 \to R_1 + \frac{1}{2}R_3 \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (\because AA^{-1} = I)$$

**निर्देश** (प्र.सं. 18) निम्नलिखित प्रश्न में सही उत्तर का चयन कीजिए।

**प्रश्न 18.** आव्यूह $A$ तथा $B$ एक-दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि

(a) $AB = BA$ (b) $AB = BA = O$ (c) $AB = O, BA = I$ (d) $AB = BA = I$

**हल** (d) हम जानते हैं कि यदि $A$ एक $m$ कोटि का वर्ग आव्यूह है और इसके साथ एक अन्य आव्यूह $B$ भी समान कोटि का इस प्रकार विद्यमान है कि $AB = BA = I$, तो $B$, $A$ का व्युत्क्रम कहलाता है।

अर्थात् आव्यूह $A$ तथा $B$ एक-दूसरे के व्युत्क्रम होंगे, यदि $AB = BA = I$।

## विविध प्रश्नावली

**प्रश्न 1.** मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए कि सभी $n \in N$ के लिए, $(aI + bA)^n = a^n I + na^{n-1} bA$, जहाँ $I$, कोटि 2 का तत्समक आव्यूह है।

**हल** दिया है, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

गणितीय आगमन के सिद्धांत से हम अभीष्ट परिणाम सिद्ध करेंगे।

मान लीजिए $P(n) : (aI + bA)^n = a^n I + na^{n-1} bA$

$n = 1$ रखने पर,

$$P(1) : (aI + bA)^1 = a^1 I + 1 \cdot a^{1-1} bA$$

$aI + bA = aI + bA$, जो $n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए यह $n = k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \quad P(k) : (aI + bA)^k = a^k I + k \cdot a^{k-1} bA \quad \ldots(i)$$

अब, इसे हम $n = k + 1$ के लिए सिद्ध करेंगे।

$\therefore \quad P(k+1) : (aI + bA)^{k+1} = a^{k+1}I + (k+1) \cdot a^{k+1-1}bA$

बाएँ पक्ष से, $(aI + bA)^{k+1} = (aI + bA)^k \, (aI + bA)$

$(\because a^{x+y} = a^x \times a^y)$

$$= (a^k I + k \cdot a^{k-1}bA)(aI + bA)$$

[समी (i) से $(aI + bA)^k = a^k I + k\, a^{k-1}bA$ रखने पर]

$$= a^{k+1}I + ka^k IbA + a^k IbA + ka^{k-1}b^2A^2$$

$$= a^{k+1}I + ka^k b(IA) + a^k b((IA) + ka^{k-1}b^2(A^2)$$

$$\left(\because AI = A \text{ तथा } A^2 = AA \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\right)$$

$$= a^{k+1}I + ka^k bA + a^k bA + ka^{k-1}b^2 \times 0 = a^{k+1}I + (k+1) \cdot a^k bA$$

इस प्रकार, यह $n = k + 1$ के लिए सत्य है, अतः गणितीय आगमन के सिद्धांत से यह $n \in N$ अर्थात् $n$ के सभी मान के लिए सत्य होगा।

**प्रश्न 2.** यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, **तो सिद्ध कीजिए** $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}, n \in N$

इसे गणितीय आगमन के सिद्धांत द्वारा सिद्ध करते हैं।

**हल** यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा हम इसे सिद्ध करेंगे।

मान लीजिए $\quad P(n) : A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$

$n = 1$ रखने पर,

$$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} 3^{1-1} & 3^{1-1} & 3^{1-1} \\ 3^{1-1} & 3^{1-1} & 3^{1-1} \\ 3^{1-1} & 3^{1-1} & 3^{1-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots(i)$$

जोकि $n = 1$ के लिए सत्य है, मान लीजिए कि यह $n = k$ के लिए भी सत्य है।

$$\therefore \quad P(k) : A^k = \begin{bmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{bmatrix} \quad \ldots(ii)$$

$n = k + 1$ रखने पर, $\therefore \; P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \end{bmatrix}$

Durga Tutorial
Since 1996
Bahiapur

बायाँ पक्ष $= A^{k+1} = A^k \,.\, A^1$

$$A^k \cdot A^1 = \begin{bmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ [समी (i) तथा (ii) के प्रयोग से]

$$= \begin{bmatrix} 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} & 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} & 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} \\ 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} & 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} & 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} \\ 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} & 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} & 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} \end{bmatrix}$$

आव्यूह गुणनफल के प्रयोग से,

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} \\ 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} \\ 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} & 3 \times 3^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \end{bmatrix} = \text{दायाँ पक्ष}$$

अतः जब यह $n = k$ के लिए सत्य है, तो $n = k+1$ के लिए भी सत्य होगा। अर्थात् गणितीय आगमन $n \in N$ के लिए यह सत्य है।

**प्रश्न 3.** यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$, जहाँ $n$ एक धन पूर्णांक है।

**हल** हम $n \in N$, $n$ के सभी मान के लिए इसे सिद्ध करेंगे। $P(n) = A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$

मान लीजिए $n = 1$

$$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} 1+2(1) & -4\,(1) \\ 1 & 1-2\,(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{...(i)}$$

जो $n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए यह परिणाम $n = k$ के लिए सत्य है।

$$P(k) = A^k = \begin{bmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{bmatrix} \quad \text{...(ii)}$$

मान लीजिए $n = k+1$

तब, $P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1+2(k+1) & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k+3 & -4k+4 \\ k+1 & -2k-1 \end{bmatrix}$

अब, बाएँ पक्ष से, $= A^{k+1} = A^k \; A^1$

$$= \begin{bmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$ [समी (i) तथा (ii) के प्रयोग से]

$$= \begin{bmatrix} (1+2k)\cdot 3 + (-4k)\cdot 1 & (1+2k)\cdot(-4) + (-4k)\cdot(-1) \\ k\cdot 3 + (1-2k)\cdot 1 & k\cdot(-4) + (1-2k)\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2k & -4-4k \\ k+1 & -1-2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2(k+1) & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{bmatrix}$$

इस प्रकार, जब यह $n = k$ के लिए सत्य है, तो $n = k+1$ के लिए भी यह सत्य है, अतः गणितीय आगमन के सिद्धांत से यह $n \in N$ के सभी मानों के लिये सत्य है।

Durga Tutorial
Baniapur

**प्रश्न 4.** यदि $A$ तथा $B$ सममित आव्यूह हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $AB - BA$ एक विषम सममित आव्यूह है।

**हल** चूँकि यहाँ $A$ तथा $B$ सममित आव्यूह हैं, तो $A' = A$ तथा $B' = B$

अब, $(AB - BA)' = (AB)' - (BA)'$ $\quad [\because (A - B)' = A' - B'$ तथा $(AB)' = B'A']$

$= B'A' - A'B' = BA - AB$ $\quad (\because B' = B$ तथा $A' = A)$

$= -(AB - BA)$

$\therefore \quad (AB - BA)' = -(AB - BA)$

अतः $(AB - BA)$ एक विषम सममित आव्यूह है।

**प्रश्न 5.** सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $B'AB$ सममित अथवा विषम सममित है, यदि $A$ सममित अथवा विषम सममित है।

**हल** मान लीजिए $A$ एक सममित आव्यूह है, तब $A' = A$

अब, $(B'AB)' = \{B'(AB)\}' = (AB)'(B')'$ $\quad [\because (AB)' = B'A']$

$= B'A'(B)$ $\quad [\because (B')' = B]$

$= B'(A'B) = B'(AB)$ $\quad (\because A' = A)$

$\therefore \quad (B'AB)' = B'AB$

जोकि $B'AB$ को एक सममित आव्यूह प्रदर्शित करता है।

पुनः मान लीजिए कि $A$ एक विषम सममित आव्यूह है।

तब, $\quad A' = -A$

अब, $(B'AB)' = [B'(AB)]' = (AB)'(B')'$ $\quad [\because (AB)' = B'A'$ तथा $(A')' = A]$

$= (B'A')B = B'(-A)B = -B'AB$ $\quad (\because A' = -A)$

$\therefore$ $(B'AB)' = -B'AB$ जो यह निरूपित करता है कि $B'AB$ एक विषम सममित आव्यूह है।

**प्रश्न 6.** $x, y$ तथा $z$ के मानों को ज्ञात कीजिए, यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ समीकरण $A'A = I$ को संतुष्ट करता है।

**हल** दिया है, $A'A = I$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 2y & y & -y \\ z & -z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 + x^2 + x^2 & 0 + xy - xy & 0 - xz + xz \\ 0 + yx - yx & 4y^2 + y^2 + y^2 & 2yz - yz - yz \\ 0 - zx + zx & 2yz - yz - yz & z^2 + z^2 + z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$2x^2 = 1, \quad 6y^2 = 1, \quad 3z^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}, \quad y^2 = \frac{1}{6}, \quad z^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

**प्रश्न 7.** $x$ के किस मान के लिए $[1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix} = 0$ है?

**हल** दिया है, $[1 \quad 2 \quad 1]\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad [1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}0+4+0\\ 0+0+x\\ 0+0+2x\end{bmatrix} = 0$$

($\because$ आव्यूह का गुणनफल साहचर्य के नियम का अनुसरण करता है)

$$\Rightarrow \quad [1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}4\\ x\\ 2x\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [4 + 2x + 2x] = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4 + 4x = 0 \Rightarrow x = -1$$

**प्रश्न 8.** यदि $A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ है।

**हल** दिया है, $\quad A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

अब, $\quad A^2 = AA = \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9-1 & 3+2\\ -3-2 & -1+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 - 5A + 7I = \begin{bmatrix}8 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}8 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}15 & 5\\ -5 & 10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8-15+7 & 5-5+0\\ -5+5+0 & 3-10+7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = 0$$

**प्रश्न 9.** यदि $[x \quad -5 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 4\\ 1\end{bmatrix} = 0$ है, तो $x$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हल** यहाँ, $\quad [x \quad -5 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 4\\ 1\end{bmatrix} = 0$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$\Rightarrow \quad [x \;\; -5 \;\; -1]\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\4\\1\end{bmatrix}\right)=0 \Rightarrow [x \;\; -5 \;\; -1]\begin{bmatrix}x+0+2\\0+8+1\\2x+0+3\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad [x(x+2)+(-5)(9)+(-1)(2x+3)]=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-48=0 \Rightarrow x^2=48 \Rightarrow x=\pm\sqrt{48}=\pm 4\sqrt{3}$$

**प्रश्न 10.** एक निर्माता तीन प्रकार की वस्तुएँ $x$, $y$ तथा $z$ का उत्पादन करता है जिनका वह दो बाजारों में विक्रय करता है। वस्तुओं की वार्षिक बिक्री नीचे सूचित (निर्दशित) है

| बाजार | | उत्पादन | |
|---|---|---|---|
| I | 10000 | 2000 | 18000 |
| II | 6000 | 20000 | 8000 |

(a) यदि $x$, $y$ तथा $z$ की प्रत्येक इकाई का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹ 2.50, ₹ 1.50 तथा ₹ 1.00 हैं, तो प्रत्येक बाजार में कुल आय (Revenue), आव्यूह बीजगणित की सहायता से ज्ञात कीजिए।

(b) यदि उपरोक्त तीन वस्तुओं की प्रत्येक इकाई की लागत (Cost) क्रमशः ₹ 2.00, ₹ 1.00 तथा 50 पैसे है, तो कुल लाभ (Gross Profit) ज्ञात कीजिए।

**हल** यहाँ, $A$ एक आव्यूह है जो बिक्री को निरूपित कर रहा है।

$$A=\begin{bmatrix}10000 & 2000 & 18000\\6000 & 20000 & 8000\end{bmatrix}$$

(a) $B$ आव्यूह प्रत्येक इकाई के विक्रय मूल्य को प्रदर्शित कर रहा है।

$$B=\begin{bmatrix}2.50\\1.50\\1.00\end{bmatrix}$$

आव्यूह गुणनफल $AB$ प्रत्येक बाजार की कुल आय का आव्यूह है।

$$AB=\begin{bmatrix}10000 & 2000 & 18000\\6000 & 20000 & 8000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5/2\\3/2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10000\times\frac{5}{2}+2000\times\frac{3}{2}+18000\times 1\\6000\times\frac{5}{2}+20000\times\frac{3}{2}+8000\times 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46000\\53000\end{bmatrix}$$

अतः बाजार I में कुल आय ₹ 46000 तथा बाजार II में कुल आय ₹ 53000 है।

(b) यहाँ, $C$ प्रति इकाई के लागत मूल्य का आव्यूह है।

$$\therefore \quad C=\begin{bmatrix}2.00\\1.00\\0.50\end{bmatrix}$$

अतः आव्यूह गुणनफल $AC$ दोनों बाजारों के कुल लागत मूल्य का आव्यूह है।

$$AC = \begin{bmatrix} 10000 & 2000 & 18000 \\ 6000 & 20000 & 8000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 10000 \times 2 + 2000 \times 1 + 18000 \times \frac{1}{2} \\ 6000 \times 2 + 20000 \times 1 + 8000 \times \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31000 \\ 36000 \end{bmatrix}$$

बाजारों I में लाभ = ₹(46000 − 31000) = ₹15000

तथा बाजार II में लाभ = ₹(53000 − 36000) = ₹17000

∴ कुल लाभ = ₹ (15000 + 17000) = ₹ 32000

**प्रश्न 11.** आव्यूह $X$ ज्ञात कीजिए, यदि $X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ है।

**हल** यहाँ, $X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

प्रदत्त समीकरण के यहाँ दाएँ पक्ष में $2 \times 3$ कोटि का आव्यूह है तथा बाएँ पक्ष में एक आव्यूह भी समान कोटि का है। इसलिए, यहाँ $X$ एक $2 \times 2$ कोटि का आव्यूह होगा।

अब, मान लीजिए $X = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

अतः $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+4c & 2a+5c & 3a+6c \\ b+4d & 2b+5d & 3b+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

दोनों आव्यूह के संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$a + 4c = -7, \quad 2a + 5c = -8, \quad 3a + 6c = -9$$

$$b + 4d = 2, \quad 2b + 5d = 4, \quad 3b + 6d = 6$$

अब, $a + 4c = -7 \Rightarrow a = -7 - 4c$

$2a + 5c = -8 \Rightarrow -14 - 8c + 5c = -8 \Rightarrow -3c = 6 \Rightarrow c = -2$

∴ $a = -7 - 4(-2) = -7 + 8 = 1$

अब, $b + 4d = 2 \Rightarrow b = 2 - 4d$ and $2b + 5d = 4 \Rightarrow 4 - 8d + 5d = 4$

$\Rightarrow -3d = 0 \Rightarrow d = 0 \quad \therefore \quad b = 2 - 4(0) = 2$

इस प्रकार, $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2, \quad d = 0$

अतः अभीष्ट आव्यूह $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ है।

**प्रश्न 12.** यदि $A$ तथा $B$ समान कोटि के वर्ग आव्यूह इस प्रकार हैं कि $AB = BA$ है, तो गणितीय आगमन द्वारा सिद्ध कीजिए कि $AB^n = B^nA$ होगा। इसके अतिरिक्त सिद्ध कीजिए कि समस्त $n \in N$ के लिए $(AB)^n = A^nB^n$ होगा।

**हल** (a) दिया है, $AB = BA$ ...(i)

हम सिद्ध करना चाहते हैं, $AB^n = B^n A$ ...(ii)

$n = 1$ के लिए समी (ii) स्पष्टतया सत्य है।

मान लीजिए समी (ii) धनात्मक पूर्णांक $n = m$ के लिए सत्य है।

अर्थात् $AB^m = B^m A$ ...(iii)

तब, $n = m + 1$ के लिए, $AB^{m+1} = A(B^m B) = (AB^m)B$

(आव्यूह गुणनफल के साहचर्य नियम से)

$= (B^m A)B$ [समी (iii) के प्रयोग से]

$= B^m (AB) = B^m (BA)$ [समी (i) के प्रयोग से]

$= (B^m B)A = B^{m+1}A$

अतः $n \in N$, के सभी मान के लिए यह सत्य है। (गणितीय आगमन के सिद्धांत से)

(b) यहाँ, दिया है, $AB = BA$ ...(i)

हमें सिद्ध करना है, $(AB)^n = A^n B^n$ ...(ii)

$n = 1$ के लिए समी (ii) स्पष्टतया सत्य है। [∵ समी (i) से]

मान लीजिए समी (ii) धनात्मक पूर्णांक $n = m$ के लिए सत्य है।

अर्थात् $(AB)^m = A^m B^m$ ...(iii)

तथा $n = m + 1$ के लिए, $(AB)^{m+1} = (AB)^m (AB) = (A^m B^m)(AB)$

[समी (iii) के प्रयोग से]

$= A^m (B^m A)B = A^m (AB^m)B$ ($\because AB^n = B^n A, n \in N$ के लिए, जब $AB = BA$)

$= (A^m A)(B^m B) = A^{m+1} B^{m+1}$

अतः गणितीय आगमन के सिद्धांत से, $n \in N$ के सभी मानों के लिए यह सत्य है।

**निर्देश** (प्र.सं. 13-15) निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए।

**प्रश्न 13.** यदि $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2 = I$, तो

(a) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (b) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(c) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (d) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

(i) सर्वप्रथम, $A^2$ प्राप्त कर प्रश्नानुसार ज्ञात संबंध $A^2 = I$ का प्रयोग करते हैं।

(ii) अब, $A^2$ तथा $I$ दो समान आव्यूह के संगत अवयवों को बराबर कर सही विकल्प ज्ञात करते हैं।

**हल** (c) दिया है, $A^2 = I$

$$\therefore \quad AA = I \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta - \alpha\beta \\ \alpha\gamma - \gamma\alpha & \gamma\beta + \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

समान आव्यूह के संगत अवयवों की तुलना करने पर,

$$\alpha^2 + \beta\gamma = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta\gamma - 1 = 0 \Rightarrow 1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$$

**प्रश्न 14.** यदि एक आव्यूह सममित तथा विषम सममित दोनों ही हैं, तो

(a) $A$ एक विकर्ण आव्यूह है (b) $A$ एक शून्य आव्यूह है

(c) $A$ एक वर्ग आव्यूह है (d) इनमें से कोई नहीं

Durga Tutorial
Baniapur

(c) $A$ एक वर्ग आव्यूह है (d) इनमें से कोई नहीं



**हल** मान लीजिए $A$ एक सममित तथा विषम समिजत आव्यूह है।

$\Rightarrow \quad A' = A \quad (\because A$ सममित आव्यूह है)

तथा $\quad A' = -A \quad (\because A$ विषम सममित आव्यूह है)

$\therefore \quad A = -A \Rightarrow A + A = 0 \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow A = 0$

**प्रश्न 15.** यदि $A$ एक वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2 = A$, तो $(I + A)^3 - 7A$ बराबर है

(a) $A$ (b) $I - A$ (c) $I$ (d) $3A$

**हल** (c) यहाँ, $A^2 = A$

$\therefore \quad (I + A)^3 - 7A = I^3 + A^3 + 3I^2A + 3A^2I - 7A$

$[\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab^2 + 3a^2b]$

$= I + A^3 + 3A + 3A^2 - 7A$

$= I + A^2 \cdot A + 3A + 3A - 7A \quad (\because A^2 = A)$

$= I + A \cdot A - A = I + A - A \quad (\because A^2 = A)$

$= I$

$\therefore \quad (I + A)^3 - 7A = I$

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

# Durga Tutorial

Online Classes

# Thank You For Downloading Notes

ज्यादा जानकारी के लिए हमें Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511