सारणिक अध्याय 4

Determinant

प्रश्नावली 4.1

निर्देश (प्र. सं. 1-2) निम्नलिखित प्रश्नों में सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ जोकि एक वर्ग आव्यूह है।

$\therefore \quad |A| = 2 \times (-1) - (-5) \times 4 = -2 + 20 = 18$

प्रश्न 2. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

हल (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = (\cos\theta)(\cos\theta) - (\sin\theta)(-\sin\theta)$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

(ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix} = (x^2 - x + 1)(x + 1) - (x + 1)(x - 1)$

$= x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 - (x^2 - 1) = x^3 + 1 - (x^2 - 1) = x^3 - x^2 + 2$

प्रश्न 3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि $|2A| = 4|A|$

हल दिया है, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad 2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 4 & 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

बायाँ पक्ष $= |2A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 8 \times 4 = -24$

अब, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 4 \times 2 = -6$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $= 4|A| = 4 \times (-6) = -24$ $\therefore$ अत: बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

प्रश्न 4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए कि $|3A| = 27|A|$

हल दिया है, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

चूँकि प्रथम स्तंभ में दो अवयव शून्य हैं। अतः सारणिक का विस्तार प्रथम स्तंभ के अवयवों के संगत करने पर,

$$\therefore \quad |A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 \times 4 - 0 \times 2) = 4$$

$$\therefore \quad 27|A| = 27 \times 4 = 108 \quad \ldots(i)$$

अब, $3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad |3A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$

चूँकि प्रथम स्तंभ के दो अवयव शून्य हैं। अतः सारणिक का विस्तार प्रथम अवयव के संगत करने पर,

$$|3A| = 3\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3(3 \times 12 - 0 \times 6)$$

$$\Rightarrow \quad |3A| = 3(36) = 108 \quad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से, $|3A| = 27|A|$

प्रश्न 5. निम्नलिखित सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

हल (i) माना $A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

चूँकि दूसरी पंक्ति में दो अवयव शून्य हैं, अतः सारणिक का विस्तार दूसरी पंक्ति के अवयवों के संगत करने पर,

$$|A| = -0\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \{3 \times (-5) - 3 \times (-1)\}$$

$$= -15 + 3 = -12$$

(ii) माना $A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+6) + 4(1+4) + 5(3-2)$$
$$= 3(7) + 4(5) + 5(1) = 21 + 20 + 5 = 46$$

(iii) माना $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$|A| = 0\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1(0-6) + 2(-3-0)$$
$$= -1(-6) + 2(-3) = 6 - 6 = 0$$

(iv) माना $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

द्वितीय पंक्ति के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$|A| = -0\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$
$$= 0 + 2(0+6) + (-10+3) = 12 - 7 = 5$$

प्रश्न 6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ **हो, तो $|A|$ का मान ज्ञात कीजिए।**

हल दिया है, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -9 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-9+12) - 1(-18+15) - 2(8-5)$$
$$= 1(3) - 1(-3) - 2(3) = 3 + 3 - 6 = 0$$

प्रश्न 7. x **के मान ज्ञात कीजिए, यदि**

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

हल (i) दिया है, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$

दोनों सारणिक का विस्तार करने पर,

$$2 \times 1 - 5 \times 4 = 2x \times x - 6 \times 4 \Rightarrow 2 - 20 = 2x^2 - 24$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 = -18 + 24 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

(ii) दिया है, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

दोनों सारणिक का विस्तार करने पर,

$$2 \times 5 - 4 \times 3 = 5 \times x - 3 \times 2x \Rightarrow 10 - 12 = 5x - 6x \Rightarrow -2 = -x \Rightarrow x = 2$$

प्रश्न 8. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो, तो x बराबर है

(a) 6 (b) ± 6 (c) – 6 (d) 0

हल (b) दिया है, $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$

दोनों सारणिक का विस्तार करने पर,

$$x \times x - 18 \times 2 = 6 \times 6 - 18 \times 2 \Rightarrow x^2 - 36 = 36 - 36$$

$$\Rightarrow x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$$

प्रश्नावली 4.2

निर्देश (प्र.सं. 1-5) बिना विस्तार किए और सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्नलिखित प्रश्नों को सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 1. $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$

हल माना $A = \begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix}$

$C_3 \to C_3 - C_1$ से, $A = \begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix} = 0$ [चूँकि दो स्तंभ $(C_2 = C_3)$ बराबर हैं।]

प्रश्न 2. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

हल माना $A = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से,

$$= \begin{vmatrix} a-b+b-c+c-a & b-c & c-a \\ b-c+c-a+a-b & c-a & a-b \\ c-a+a-b+b-c & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

(चूँकि C_1 स्तंभ का प्रत्येक अवयव शून्य है।)

वैकल्पिक विधि

$$A = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix},$$

$R_1 \to R_1 + R_2$ से,

$$A = \begin{vmatrix} a-c & b-a & c-b \\ b-c & c-a & a-b \\ -(a-c) & -(b-a) & -(c-b) \end{vmatrix}$$

R_3 से '–' चिन्ह उभयनिष्ठ लेने पर,

$$= -\begin{vmatrix} a-c & b-a & c-b \\ b-c & c-a & a-b \\ a-c & b-a & c-b \end{vmatrix} = 0 \text{ (चूँकि दो पंक्तियाँ } R_1 \text{ तथा } R_2 \text{ समान हैं)}$$

प्रश्न 3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$

हल माना $A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 65-63 \\ 3 & 8 & 75-72 \\ 5 & 9 & 86-81 \end{vmatrix}$ ($C_3 \to C_3 - 9C_2$ से)

$$= \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 0$$ (चूँकि दो स्तंभ C_3 तथा C_1 समान हैं)

प्रश्न 4. $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

हल माना $A = \begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & bc & ab+ac+bc \\ 1 & ca & bc+ba+ca \\ 1 & ab & ca+cb+ab \end{vmatrix}$ ($C_3 \to C_3 + C_2$ से)

C_3 से $ab + bc + ca$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$A = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & bc & 1 \\ 1 & ca & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (ab+bc+ca) \times 0 = 0$$ (चूँकि C_1 तथा C_3 समान हैं)

प्रश्न 5. $\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

हल बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

(पंक्ति तथा स्तंभ को आपस में परिवर्तित करने पर)

$$= \begin{vmatrix} b+c & c+a & -2c \\ q+r & r+p & -2r \\ y+z & z+x & -2z \end{vmatrix} \qquad [C_3 \to C_3 - (C_1 + C_2) \text{ से}]$$

$$= -2\begin{vmatrix} b+c & c+a & c \\ q+r & r+p & r \\ y+z & z+x & z \end{vmatrix} \qquad (C_3 \text{ से '}-2\text{' उभयनिष्ठ लेने पर})$$

$$= -2\begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 - C_3 \text{ तथा } C_2 \to C_2 - C_3 \text{ से})$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \qquad (C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ से})$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = \text{दायाँ पक्ष}$$

(पंक्ति तथा स्तंभ को आपस में परिवर्तित करने पर)

निर्देश (प्र. सं. 6-14) सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्नलिखित प्रश्नों को सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 6. $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

हल माना $A = \begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} 0 & ac & -bc \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ $\qquad (R_1 \to cR_1$ से)

$$= \frac{1}{c}\begin{vmatrix} ab & ac & 0 \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \qquad (R_1 \to R_1 - bR_2 \text{ से})$$

$$= \frac{a}{c}\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$ (चूँकि पंक्ति R_1 तथा R_2 समान हैं)

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2 b^2 c^2$

हल बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}$

(R_1 से a, R_2 से b तथा R_3 से c उभयनिष्ठ लेने पर)

$= (abc)(abc)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (C_1 से a, C_2 से b तथा C_3 से c उभयनिष्ठ लेने पर)

$= a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ($R_1 \to R_1 + R_2$ तथा $R_2 \to R_2 - R_3$ से)

अब, प्रथम पंक्ति के संगत विस्तार करने पर,

बायाँ पक्ष $= a^2b^2c^2\left[0\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right]$

$= a^2b^2c^2\,[0 - 0 + 2\,(0 + 2)] = 4a^2\, b^2c^2 =$ दायाँ पक्ष

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए

(i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

हल (i) माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

$R_1 \to R_1 - R_3$ तथा $R_2 \to R_2 - R_3$ से,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & (a-c) & (a^2-c^2) \\ 0 & (b-c) & (b^2-c^2) \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & (a-c) & (a+c)(a-c) \\ 0 & (b-c) & (b+c)(b-c) \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$= (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & (a+c) \\ 0 & 1 & (b+c) \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ [R_1 तथा R_2 से क्रमशः $(a-c)$ तथा $(b-c)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

अब, C_1 के संगत विस्तार करने पर,

$\Delta = (a-c)(b-c)(b+c-a-c) = (a-b)(b-c)(c-a) =$ दायाँ पक्ष

(ii) माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

$C_1 \to C_1 - C_2$ तथा $C_2 \to C_2 - C_3$ से,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (a-b) & (b-c) & c \\ (a-b)(a^2+ab+b^2) & (b-c)(b^2+bc+c^2) & c^3 \end{vmatrix}$$

$[\because x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)]$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

[C_1 तथा C_2 से क्रमशः $(a-b)$ तथा $(b-c)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

अब, R_1 के संगत विस्तार करने पर,

$$\Delta = (a-b)(b-c)[1 \times (b^2+bc+c^2) - 1 \times (a^2+ab+b^2)]$$

$$= (a-b)(b-c)[b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2]$$

$$= (a-b)(b-c)(bc-ab+c^2-a^2)$$

$$= (a-b)(b-c)[b(c-a) + (c-a)(c+a)]$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 9. $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

हल बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = \dfrac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x^2 & x^3 & xyz \\ y^2 & y^3 & xyz \\ z^2 & z^3 & xyz \end{vmatrix}$

($R_1 \to xR_1, R_2 \to yR_2$ तथा $R_3 \to zR_3$ से)

$$= \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} x^2 & x^3 & 1 \\ y^2 & y^3 & 1 \\ z^2 & z^3 & 1 \end{vmatrix}$$ (C_3 से xyz उभयनिष्ठ लेने पर)

$$= \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & 1 \\ y^2 - x^2 & y^3 - x^3 & 0 \\ z^2 - x^2 & z^3 - x^3 & 0 \end{vmatrix}$$

($R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से)

C_3 के संगत विस्तार करने पर,

बायाँ पक्ष $= 1\begin{vmatrix} y^2 - x^2 & y^3 - x^3 \\ z^2 - x^2 & z^3 - x^3 \end{vmatrix}$

$$= [(y^2 - x^2)(z^3 - x^3) - (z^2 - x^2)(y^3 - x^3)]$$
$$= (y+x)(y-x)(z-x)(z^2 + x^2 + xz)$$
$$- (z+x)(z-x)(y-x)(y^2 + x^2 + xy)$$
$$= (y-x)(z-x)$$
$$[(y+x)(z^2 + x^2 + xz) - (z+x)(y^2 + x^2 + xy)]$$
$$= (y-x)(z-x)(yz^2 + yx^2 + xyz + xz^2 + x^3$$
$$+ x^2z - zy^2 - zx^2 - xyz - xy^2 - x^3 - x^2y)$$
$$= (y-x)(z-x)(yz^2 - zy^2 + xz^2 - xy^2)$$
$$= (y-x)(z-x)[yz(z-y) + x(z^2 - y^2)]$$
$$= (y-x)(z-x)[yz(z-y) + x(z-y)(z+y)]$$
$$= (y-x)(z-x)[(z-y)(xy + yz + zx)]$$
$$= (x-y)(y-z)(z-x)(xy + yz + zx) = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 10. (i) $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

(ii) $\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

हल (i) बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x+4 & 2x & 2x \\ 5x+4 & x+4 & 2x \\ 5x+4 & 2x & x+4 \end{vmatrix}$

($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से)

$= (5x+4) \begin{vmatrix} 1 & 2x & 2x \\ 1 & x+4 & 2x \\ 1 & 2x & x+4 \end{vmatrix}$ [C_1 से $(5x+4)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$= (5x+4) \begin{vmatrix} 1 & 2x & 2x \\ 0 & -x+4 & 0 \\ 0 & 0 & -x+4 \end{vmatrix}$

($R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से)

C_1 के संगत विस्तार करने पर,

बायाँ पक्ष $= (5x+4)\{1(4-x)(4-x)\} = (5x+4)(4-x)^2 =$ दायाँ पक्ष

(ii) बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y+k & y & y \\ 3y+k & y+k & y \\ 3y+k & y & y+k \end{vmatrix}$

($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से)

$= (3y+k) \begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 1 & y+k & y \\ 1 & y & y+k \end{vmatrix}$ [C_1 से $(3y+4)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$= (3y+k) \begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}$ ($R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से)

C_3 के संगत विस्तार करने पर,

बायाँ पक्ष $= (3y+k)(1 \times k \cdot k) = k^2(3y+k) =$ दायाँ पक्ष

प्रश्न 11. (i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

(ii) $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$

हल (i) बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

($R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से)

R_1 से $(a+b+c)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

बायाँ पक्ष $= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

($C_2 \to C_2 - C_1$ तथा $C_3 \to C_3 - C_1$ से)

R_1 के संगत विस्तार करने पर,

बायाँ पक्ष $= (a+b+c)\{1(-b-c-a)(-c-a-b)\}$

$= (a+b+c)[-(b+c+a) \times (-)(c+a+b)]$

$= (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c) = (a+b+c)^3 =$ दायाँ पक्ष

(ii) बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2(x+y+z) & x & y \\ 2(x+y+z) & y+z+2x & y \\ 2(x+y+z) & x & z+x+2y \end{vmatrix}$$

($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से)

C_1 से $2(x+y+z)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

बायाँ पक्ष $= 2(x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y+z+2x & y \\ 1 & x & z+x+2y \end{vmatrix}$

$$= 2(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & y+z+x & 0 \\ 0 & 0 & z+x+y \end{vmatrix}$$

($R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से)

$$= 2(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(R_1 तथा R_2 से $(x+y+z)$ उभयनिष्ठ लेने पर)

R_3 के संगत विस्तार करने पर,

बायाँ पक्ष $= 2(x+y+z)^3\,[(1)(1-0)] = 2(x+y+z)^3 =$ दायाँ पक्ष

प्रश्न 12. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

हल दाँया पक्ष $= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & x & x^2 \\ 1+x+x^2 & 1 & x \\ 1+x+x^2 & x^2 & 1 \end{vmatrix}$

($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से)

C_1 से $(1+x+x^2)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

दायाँ पक्ष $= (1+x+x^2)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1+x+x^2)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1-x & x-x^2 \\ 0 & x^2-x & 1-x^2 \end{vmatrix}$

($R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से)

$$= (1+x+x^2)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1-x & x(1-x) \\ 0 & x(x-1) & 1-x^2 \end{vmatrix}$$

R_1 तथा R_2 से $(1-x)$ उभयनिष्ठ लेने पर,

दायाँ पक्ष $= (1+x+x^2)(1-x)(1-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & -x & 1+x \end{vmatrix}$

C_1 के संगत विस्तार करने पर,

दायाँ पक्ष $= (1+x+x^2)(1-x)(1-x)\,[(1\times(1+x) - (-x)(x)]$

$= (1+x+x^2)(1-x)(1-x)(1+x+x^2)$

$= [(1-x^3)(1-x^3)] = (1-x^3)^2 =$ दायाँ पक्ष

$[\;\because 1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)]$

प्रश्न 13. $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

हल बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

($C_1 \to C_1 - bC_3$ तथा $C_2 \to C_2 + aC_3$ से)

$= (1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

[C_1 तथा C_2 से $(1+a^2+b^2)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

बायाँ पक्ष $= (1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1+a^2+b^2 \end{vmatrix}$ ($R_3 \to R_3 - bR_1 + aR_2$ से)

R_1 के संगत विस्तार करने पर,

बायाँ पक्ष $= (1+a^2+b^2)^2\,[1(1+a^2+b^2)] = (1+a^2+b^2)^3 =$ दायाँ पक्ष

प्रश्न 14. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$

(i) R_1, R_2, R_3 से क्रमशः a, b, c उभयनिष्ठ लेते हैं

(ii) $R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ का प्रयोग करने के बाद C_1 को a से, C_2 को b से तथा C_3 को c से गुणा करते हैं।

हल बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix}$

R_1, R_2 तथा R_3 से क्रमशः a, b, c उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\text{बायाँ पक्ष} = abc\begin{vmatrix} a+\frac{1}{a} & b & c \\ a & b+\frac{1}{b} & c \\ a & b & c+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} a+\frac{1}{a} & b & c \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} \quad (R_2 \to R_2 - R_1 \text{ तथा } R_3 \to R_3 - R_1 \text{ से})$$

C_1, C_2 तथा C_3 को क्रमशः a, b, c से गुणा करने पर,

$$\text{बायाँ पक्ष} = abc \times \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

R_3 के संगत विस्तार करने पर,

$$= -1 \times (-c^2) + 1[1(a^2+1) + 1(b^2)]$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + 1) = 1 + a^2 + b^2 + c^2 = \text{दायाँ पक्ष}$$

निर्देश (प्र.सं. 15-16) निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए।

प्रश्न 15. यदि A एक 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है, तो $|kA|$ का मान होगा।

(a) $k|A|$ (b) $k^2|A|$ (c) $k^3|A|$ (d) $3k|A|$

हल दिया है, A एक 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है।

माना $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, तो $kA = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad |kA| = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$$

प्रत्येक पंक्ति से k उभयनिष्ठ लेने पर, $|kA| = k^3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow |kA| = k^3|A|$

प्रश्न 16. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही है?

(a) सारणिक एक वर्ग आव्यूह है।

(b) सारणिक एक आव्यूह से संबद्ध एक संख्या है।

(c) सारणिक एक वर्ग आव्यूह से संबद्ध एक संख्या है।

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

हल हम जानते हैं कि प्रत्येक n क्रम के वर्ग आव्यूह $A=[a_{ij}]$ जहाँ $a_{ij}=A$ का (ij) वाँ अवयव है, को किसी व्यंजक या संख्या के साथ स्थापित किया जा सकता है जिसे सारणिक कहते हैं अतः प्रत्येक वर्ग आव्यूह से संबद्ध एक सारणिक होता है।

प्रश्नावली 4.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित प्रत्येक में दिए गए शीर्ष बिंदुओं वाले त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)
(iii) (–2, –3), (3, 2), (–1, – 8)

हल (i) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|1(0-3)-0(6-4)+1(18-0)|$

$= \frac{1}{2}|-3+18)| = \frac{15}{2}$ वर्ग इकाई

(ii) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|2(1-8)-7(1-10)+1(8-10)|$

$= \frac{1}{2}|2(-7)-7(-9)+1(-2)| = \frac{1}{2}|-14+63-2| = \frac{47}{2}$ वर्ग इकाई

(iii) अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-2(2+8)+3(3+1)+1(-24+2)|$

$= \frac{1}{2}|-20+12-22|$

$= \frac{1}{2}|-30| = 15$ वर्ग इकाई

प्रश्न 2. दर्शाइए कि बिंदु $A(a, b+c)$, $B(b, c+a)$ और $C(c, a+b)$ संरेखीय हैं।

तीन बिंदु संरेखीय कहलाते हैं, यदि उनसे बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य है।

हल ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|a\{(c+a)\times 1-(a+b)\times 1\}$

$$-(b+c)\{b\times 1-1\times c\}+1\{b\times(a+b)-(c+a)\times c\}|$$

$$=\frac{1}{2}|a(c+a-a-b)-(b+c)(b-c)+1(ab+b^2-c^2-ac)|$$

$$=\frac{1}{2}|ac-ab-b^2+c^2+ab+b^2-c^2-ac|=\frac{1}{2}\times 0=0$$

चूँकि ΔABC का क्षेत्रफल $=0$

अतः बिंदु $A(a, b+c)$, $B(b, c+a)$ तथा $C(c, a+b)$ संरेखीय हैं।

प्रश्न 3. प्रत्येक में k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुजों का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है, जहाँ शीर्ष बिंदु निम्नलिखित हैं

(i) $(k, 0), (4, 0) (0, 2)$ (ii) $(-2, 0), (0, 4), (0, k)$

हल त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

(i) दिया है, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow |k(0-2)+1(8-0)| = 8 \Rightarrow k(0-2)+1(8-0) = \pm 8$

'+' चिन्ह लेने पर, $-2k+8=8 \Rightarrow -2k=0 \Rightarrow k=0$

'–' चिन्ह लेने पर, $-2k+8=-8$

$\Rightarrow$ $-2k=-16 \Rightarrow k=8$ $\therefore$ $k=0, 8$

(ii) दिया है, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow |-2(4-k)+1(0-0)| = 8$

$\Rightarrow -2(4-k)+1(0-0) = \pm 8 \Rightarrow (-8+2k) = \pm 8$

'+' चिन्ह लेने पर, $2k-8=8 \Rightarrow 2k=16 \Rightarrow k=8$

'–' चिन्ह लेने पर, $2k-8=-8 \Rightarrow 2k=0 \Rightarrow k=0$

$\therefore$ $k=0, 8$

प्रश्न 4. (i) सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) और (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) सारणिकों का प्रयोग करके (3, 1) और (9, 3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल (i) माना बिंदु $P(x, y)$, बिंदुओं $A(1, 2)$ तथा $B(3, 6)$ को मिलने वाली रेखा पर स्थित है। तब, बिंदु A, B, P संरेखीय होंगे और इनसे बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[1(6-y) - 2(3-x) + 1(3y-6x)] = 0$$

$$\Rightarrow 6 - y - 6 + 2x + 3y - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y - 4x = 0 \Rightarrow y = 2x$$

अतः दिए गए बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा का समीकरण $y = 2x$ है।

(ii) माना बिंदु $P(x, y)$, बिंदुओं $A(3, 1)$ तथा $B(9, 3)$ को मिलाने वाली रेखा पर स्थित है। तब, बिंदु A, B, P संरेखीय होगें और इनसे बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}|3(3-y) - 1(9-x) + 1(9y-3x)| = 0$$

$$\Rightarrow \quad 9 - 3y - 9 + x + 9y - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 6y - 2x = 0 \Rightarrow x - 3y = 0$$

अतः दिए गए बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा का समीकरण $x - 3y = 0$ है।

प्रश्न 5. यदि शीर्ष $(2, -6)$, $(5, 4)$ और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो, तो k का मान है

(a) 12 (b) -2 (c) $-12, -2$ (d) $12, -2$

हल (d) दिया है, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ k & 4 & 1 \end{vmatrix} = 35$

$$\Rightarrow \quad |2(4-4) + 6(5-k) + 1(20-4k)| = 70$$

$$\Rightarrow \quad 2(4-4) + 6(5-k) + 1(20-4k) = \pm 70 \Rightarrow 30 - 6k + 20 - 4k = \pm 70$$

'+' चिन्ह लेने पर, $-10k + 50 = 70 \Rightarrow -10k = 20 \Rightarrow k = -2$

'–' चिन्ह लेने पर, $-10k + 50 = -70 \Rightarrow -10k = -120 \Rightarrow k = 12$

$$\therefore \quad k = 12, -2$$

प्रश्नावली 4.4

निर्देश (प्र. सं. 1-2) निम्नलिखित सारणिकों के अवयवों के उपसारणिक सहखण्ड लिखिए।

प्रश्न 1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

हल (i) माना $A = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

$\therefore$ उपसारणिक $M_{11} = 3, M_{12} = 0, M_{21} = -4$ तथा $M_{22} = 2$

तथा सहखण्ड $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \times 3 = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \times 0 = 0$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1) \times (-4) = 4$

तथा $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1 \times 2 = 2$

(ii) माना $A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

$\therefore$ उपसारणिक, $M_{11} = d, M_{12} = b, M_{21} = c$ तथा $M_{22} = a$

तथा सहखण्ड $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \times d = d$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \times b = -b$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1) \times c = -c$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1 \times a = a$

प्रश्न 2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

हल (i) माना $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के उपसारणिक निम्न है

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1,\ M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

तथा $M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

द्वितीय पंक्ति के अवयवों के उपसारणिक निम्न है

$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$ तथा $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

तृतीय पंक्ति के अवयवों के उपसारणिक निम्न है

$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$ तथा $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

अब प्रथम पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \times 1 = 1,\quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1 \times 0 = 0$

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1 \times 0 = 0$

द्वितीय पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1 \times 0 = 0, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1 \times 1 = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1 \times 0 = 0$$

तृतीय पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 1 \times 0 = 0, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -1 \times 0 = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1 \times 1 = 1$$

(ii) माना $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के उपसारणिक निम्न हैं

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 1 = 11,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \text{ तथा } M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$$

द्वितीय पंक्ति के अवयवों के उपसारणिक निम्न हैं

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4,$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

तथा $$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

तृतीय पंक्ति के अवयवों के उपसारणिक निम्न हैं

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 12 = -13 \text{ तथा } M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5$$

अतः प्रथम पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \times 11 = 11,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1 \times 6 = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1 \times 3 = 3$$

द्वितीय पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1 \times -4 = 4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1 \times 2 = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1 \times 1 = -1$$

तृतीय पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 1 \times -20 = -20$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -1 \times -13 = 13$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1 \times 5 = 5$$

प्रश्न 3. दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखण्डों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

द्वितीय पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9-16) = 7 \qquad [\because A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}]$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

तथा $$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10-3) = -7$$

अत: $$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 2 \times 7 + 0 \times 7 + 1(-7) = 14 - 7 = 7$$

प्रश्न 4. तीसरे स्तंभ के अवयवों के सहखण्डों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

यहाँ हम दिए गए सारणिक का C_3 के संगत विस्तार करेंगे।

हल दिया है, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$

तृतीय पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix} = 1(z-y) = z - y,$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = -1(z-x) = x - z$$

तथा $$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 1(y-x) = y - x$$

अत: $$\begin{aligned} \Delta &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x) \\ &= yz^2 - y^2z + zx^2 - z^2x + xy^2 - x^2y \\ &= x^2(z-y) + x(y^2 - z^2) + yz(z-y) = (z-y)\{x^2 - x(y+z) + yz\} \\ &= (z-y)\{x^2 - xy - xz + yz\} = (z-y)[x(x-y) - z(x-y)] \\ &= (y-z)(x-y)(z-x) = (x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

प्रश्न 5. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ और a_{ij} का सहखण्ड A_{ij} हो, तो Δ का मान निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है

(a) $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$ (b) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(c) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ (d) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

हल (d) Δ, किसी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों तथा उनके संगत सहखंडों के गुणनफल के योग के बराबर होता है।

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad \text{या} \quad a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

या $\quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$ या $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

या $\quad a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$ या $a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$

प्रथम स्तंभ के अवयवों तथा उनके संगत सहखण्डों के गुणनफल का योग

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

प्रश्नावली 4.5

निर्देश (प्र. सं. 1-2) निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक आव्यूह का सहखण्डज (adjoint) ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A_{11} = 4, A_{12} = -3, A_{21} = -2$ तथा $A_{22} = 1$

$\therefore$ अतः $\quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3,$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 10) = -12, \; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-6) = 6$$

द्वितीय पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-0) = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (1+4) = 5,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

तृतीय पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-5-6) = -11, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(5-4) = -1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3+2 = 5$$

अतः
$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ -11 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

निर्देश (प्र.सं. 3-4) निम्नलिखित प्रश्नों में सत्यापित कीजिए कि

$$A\,(\text{adj}\,A) = (\text{adj}\,A)\cdot A = |A|\cdot In.$$

प्रश्न 3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -12-(-12) = -12+12 = 0$

$\therefore$
$$|A|\,I_2 = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

A के सहखण्ड $A_{11} = -6, A_{12} = 4, A_{21} = -3, A_{22} = 2$

$\therefore$
$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

अब,
$$(\text{adj}\,A)A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12+12 & -18+18 \\ 8-8 & 12-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

तथा
$$A\,(\text{adj}\,A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12+12 & -6+6 \\ 24-24 & 12-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

अतः $A\,(\text{adj}\,A) = (\text{adj}\,A)A = |A|\,I_2$

प्रश्न 4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

अब, $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1(0-0) - (-1)(9+2) + 2(0-0)$$
$$= 0 + 11 + 0 = 11$$

$\therefore$ $$|A|\, I_3 = 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$A_{11} = 0$, $A_{12} = -(9+2) = -11$, $A_{13} = 0$, $A_{21} = -(-3-0) = 3$, $A_{22} = 3-2 = 1$,
$A_{23} = -(0+1) = -1$, $A_{31} = 2-0 = 2$, $A_{32} = -(-2-6) = 8$,
$A_{33} = 0 + 3 = 3$

$\therefore$ $$\text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} 0 & -11 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

अब, $$A\,(\text{adj}\,A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0+11+0 & 3-1-2 & 2-8+6 \\ 0+0+0 & 9+0+2 & 6+0-6 \\ 0+0+0 & 3+0-3 & 2+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

तथा $$(\text{adj}\,A)A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0+9+2 & 0+0+0 & 0-6+6 \\ -11+3+8 & 11+0+0 & -22-2+24 \\ 0-3+3 & 0+0+0 & 0+2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

अतः $$A(\text{adj}\,A) = (\text{adj}\,A)A = |A|\, I_3$$

निर्देश (प्र. सं. 5-11) निम्नलिखित में दिए गए प्रत्येक आव्यूह का व्युत्क्रम (जिनका अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-8) = 14$

A के सहखण्ड निम्न हैं $A_{11} = 3$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = 2$, $A_{22} = 2$

$\therefore$ $$\text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

अब, $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{14}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{14} & \frac{2}{14}\\ -\frac{4}{14} & \frac{2}{14}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{14} & \frac{1}{7}\\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

प्रश्न 6. $\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix}-1 & 5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ $\therefore$ $|A| = \begin{vmatrix}-1 & 5\\ -3 & 2\end{vmatrix} = -2-(-15) = 13$

A के सहखण्ड निम्न हैं $A_{11} = 2, A_{12} = 3, A_{21} = -5, A_{22} = -1$

$\therefore$ $$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix}2 & 3\\ -5 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

अब, $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}2 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{13} & -\frac{5}{13}\\ \frac{3}{13} & -\frac{1}{13}\end{bmatrix}$$

प्रश्न 7. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

$\therefore$ $|A| = 1(10-0) - 2(0-0) + 3(0-0) = 10$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$A_{11} = 10 - 0 = 10, A_{12} = -(0-0) = 0, A_{13} = 0 - 0 = 0,$
$A_{21} = -(10-0) = -10$
$A_{22} = 5 - 0 = 5, A_{23} = -(0-0) = 0$
$A_{31} = 8 - 6 = 2, A_{32} = -(4-0) = -4, \quad A_{33} = 2 - 0 = 2$

$\therefore$ $$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ -10 & 5 & 0\\ 2 & -4 & 2\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}10 & -10 & 2\\ 0 & 5 & -4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

अब $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}10 & -10 & 2\\ 0 & 5 & -4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & \frac{1}{5}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5}\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

प्रश्न 8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-3-0) - 0 + 0 = -3$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{11} = -3 - 0 = -3, \quad A_{12} = -(-3-0) = 3, \quad A_{13} = 6 - 15 = -9$$
$$A_{21} = -(0-0) = 0, \quad A_{22} = -1 - 0 = -1, \quad A_{23} = -(2-0) = -2$$
$$A_{31} = 0 - 0 = 0, \quad A_{32} = -(0-0) = 0, \quad A_{33} = 3 - 0 = 3$$

$$\therefore \qquad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

अब,
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 9. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\therefore |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 2(-1-0) - 1(4-0) + 3(8-7) = -2 - 4 + 3 = -3$$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{11} = -1 - 0 = -1, \quad A_{12} = -(4-0) = -4, \quad A_{13} = 8 - 7 = 1$$
$$A_{21} = -(1-6) = 5, \quad A_{22} = 2 + 21 = 23, \quad A_{23} = -(4+7) = -11$$
$$A_{31} = 0 + 3 = 3, \quad A_{32} = -(0-12) = 12, \quad A_{33} = -2 - 4 = -6$$

$$\therefore \qquad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 5 & 23 & -11 \\ 3 & 12 & -6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

अब,
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{23}{3} & -4 \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1(8-6) - (-1)(0+9) + 2(0-6) = 2 + 9 - 12 = -1$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$A_{11} = 8 - 6 = 2, \quad A_{12} = -(0+9) = -9, \quad A_{13} = 0 - 6 = -6$

$A_{21} = -(-4+4) = 0, \quad A_{22} = 4 - 6 = -2, \quad A_{23} = -(-2+3) = -1$

$A_{31} = 3 - 4 = -1, \quad A_{32} = -(-3-0) = 3, \quad A_{33} = 2 - 0 = 2$

$\therefore \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -9 & -6 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -9 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

अब, $\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -9 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

हल माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = 1(-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$= -(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = -1 \qquad (\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$A_{11} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1, \quad A_{12} = -(0-0) = 0, \quad A_{13} = 0 - 0 = 0$

$A_{21} = -(0-0) = 0, \quad A_{22} = -\cos\alpha - 0 = -\cos\alpha,$

$A_{23} = -(\sin\alpha - 0) = -\sin\alpha$

$A_{31} = 0 - 0 = 0, \quad A_{32} = -(\sin\alpha - 0) = -\sin\alpha, \quad A_{33} = \cos\alpha - 0 = \cos\alpha$

$$\therefore \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

अब $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

प्रश्न 12. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$।

हल दिया है, $A \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\because |A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$

A के सहखण्ड निम्न हैं $A_{11} = 5, A_{12} = -2, A_{21} = -7, A_{22} = 3$

$$\therefore \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

अब, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

यहाँ, $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $|B| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 54 - 56 = -2$

B के सहखण्ड निम्न हैं $B_{11} = 9, B_{12} = -7, B_{21} = -8, B_{22} = 6$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}, \text{ अब } B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{adj } B) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

अतः $$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 45+16 & -63-24 \\ -35-12 & 49+18 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix} \quad \ldots(i)$$

तथा $$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+49 & 24+63 \\ 12+35 & 16+45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |AB| = \begin{vmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{vmatrix} = 67 \times 61 - 47 \times 87 = 4087 - 4089 = -2$$

AB के सहखण्ड निम्न हैं $\text{adj}(AB) = \begin{bmatrix} 61 & -47 \\ -87 & 67 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad (AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}(\text{adj } AB) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix} \quad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

प्रश्न 13. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$ है, तो दर्शाइए कि $A^2-5A+7I=O$ है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2=AA=\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-1 & 3+2\\-3-2 & -1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 5\\-5 & 3\end{bmatrix}$$

अब, $A^2-5A+7I$

$$=\begin{bmatrix}8 & 5\\-5 & 3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 5\\-5 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}15 & 5\\-5 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 0\\0 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-15+7 & 5-5+0\\-5+5+0 & 3-10+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=O$$

$$\therefore \quad A^2-5A+7I=O$$

$$\because \quad |A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{vmatrix}=6+1=7\neq 0 \quad \therefore A^{-1} \text{ विद्यमान है।}$$

अब, $\quad A\cdot A-5A=-7I$

दोनों तरफ A^{-1} से गुणा करने पर,

$$A\cdot A(A^{-1})-5A\,A^{-1}=-7\,IA^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad AI-5I=-7A^{-1} \qquad (\because AA^{-1}=I \text{ तथा } IA^{-1}=A^{-1} \text{ से})$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}=-\frac{1}{7}(A-5I) \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{7}(5I-A)$$

$$=\frac{1}{7}\left(\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{bmatrix} \quad \therefore \quad A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}$$

प्रश्न 14. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$ के लिए a और b ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए ताकि $A^2+aA+bI=O$ हो।

हल दिया है, $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2=AA=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9+2 & 6+2\\3+1 & 2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 8\\4 & 3\end{bmatrix}$$

पुनः दिया है, $A^2+aA+bI=O$

A, A^2 तथा I का मान रखने पर,

$$\begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = O \Rightarrow \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a+0 \\ 4+a+0 & 3+a+b \end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a \\ 4+a & 3+a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

यदि दो आव्यूह समान हैं, तो उनके संगत अवयव भी समान होंगे

$$\Rightarrow \quad 11+3a+b=0 \qquad \ldots(i)$$

$$8+2a=0 \qquad \ldots(ii)$$

$$4+a=0 \qquad \ldots(iii)$$

तथा
$$3+a+b=0 \qquad \ldots(iv)$$

समी (iii) तथा (iv) को हल करने पर,

$$4+a=0 \Rightarrow a=-4$$

तथा
$$3+a+b=0 \Rightarrow 3-4+b=0 \Rightarrow b=1$$

अतः $a=-4$ तथा $b=1$

प्रश्न 15. आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^3-6A^2+5A+11I=O$ है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1+2 & 1+2-1 & 1-3+3 \\ 1+2-6 & 1+4+3 & 1-6-9 \\ 2-1+6 & 2-2-3 & 2+3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix}$$

तथा
$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2+2 & 4+4-1 & 4-6+3 \\ -3+8-28 & -3+16+14 & -3-24-42 \\ 7-3+28 & 7-6-14 & 7+9+42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^3-6A^2+5A+11I$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ -23 & 27 & -69 \\ 32 & -13 & 58 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8&7&1\\-23&27&-69\\32&-13&58\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}24&12&6\\-18&48&-84\\42&-18&84\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&5&5\\5&10&-15\\10&-5&15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11&0&0\\0&11&0\\0&0&11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-24+5+11&7-12+5+0&1-6+5+0\\-23+18+5+0&27-48+10+11&-69+84-15+0\\32-42+10+0&-13+18-5+0&58-84+15+11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=O$$

अब, $A^3-6A^2+5A+11I=O \Rightarrow (A\,A\,A)A^{-1}-6(A\,A)A^{-1}+5A\,A^{-1}+11IA^{-1}=O$

(A^{-1} से पूर्व गुणा करने पर क्योंकि $|A|\neq 0$)

$$\left[\because |A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&-1&3\end{vmatrix}=1(6-3)-1(3+6)+1(-1-4)=3-9-5=-11\neq 0\right]$$

$\Rightarrow \quad A\,A(A\,A^{-1})-6A\,(A\,A^{-1})+5(A\,A^{-1})+11(IA^{-1})=O$

$\Rightarrow \quad A\,AI-6AI+5I+11A^{-1}=O$

$(\because A\,A^{-1}=I$ तथा $IA^{-1}=A^{-1}$ से)

$\Rightarrow \quad A^2-6A+5I=-11A^{-1}(\because A\,AI=A^2$ तथा $AI=A$ से)

$\Rightarrow \quad A^{-1}=-\frac{1}{11}(A^2-6A+5I) \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{11}(-A^2+6A-5I)$

$$=\frac{1}{11}\left\{-\begin{bmatrix}4&2&1\\-3&8&-14\\7&-3&14\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{11}\left\{\begin{bmatrix}-4&-2&-1\\3&-8&14\\-7&3&-14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&6&6\\6&12&-18\\12&-6&18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-4+6-5&-2+6-0&-1+6-0\\3+6-0&-8+12-5&14-18-0\\-7+12-0&3-6+0&-14+18-5\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-3&4&5\\9&-1&-4\\5&-3&-1\end{bmatrix}$$

प्रश्न 16. यदि $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $A^3-6A^2+9A-4I=O$ है तथा इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 = A\,A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+1+1 & -2-2-1 & 2+1+2 \\ -2-2-1 & 1+4+1 & -1-2-2 \\ 2+1+2 & -1-2-2 & 1+1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

तथा $\quad A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 12+5+5 & -6-10-5 & 6+5+10 \\ -10-6-5 & 5+12+5 & -5-6-10 \\ 10+5+6 & -5-10-6 & 5+5+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^3 - 6A^2 + 9A - 4I$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 36 & -30 & 30 \\ -30 & 36 & -30 \\ 30 & -30 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & -9 & 9 \\ -9 & 18 & -9 \\ 9 & -9 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-36+18-4 & -21+30-9-0 & 21-30+9-0 \\ -21+30-9-0 & 22-36+18-4 & -21+30-9-0 \\ 21-30+9-0 & -21+30-9-0 & 22-36+18-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$\therefore \quad A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O \Rightarrow (A\,A\,A)A^{-1} - 6(A\,A)A^{-1} + 9A\,A^{-1} - 4IA^{-1} = O$

(A^{-1} से पूर्व गुणा करने पर क्योंकि $|A| \neq 0$)

$$\left[\because |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-1) + 1(-2+1) + 1(1-2) = 6 - 1 - 1 = 4 \neq 0\right]$$

$\Rightarrow \quad A\,A(A\,A^{-1}) - 6A\,(A\,A^{-1}) + 9(A\,A^{-1}) - 4(IA^{-1}) = O$

$\Rightarrow \quad A\,AI - 6AI + 9I - 4A^{-1} = O \qquad (\because A\,A^{-1} = I$ तथा $IA^{-1} = A^{-1}$ से)

$\Rightarrow \quad A^2 - 6A + 9I = 4A^{-1} \qquad (\because A^2\,I = A^2$ तथा $AI = A$ से)

$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 6A + 9I)$

$$= \frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -6 & 6 \\ -6 & 12 & -6 \\ 6 & -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-12+9 & -5+6+0 & 5-6+0 \\ -5+6+0 & 6-12+9 & -5+6+0 \\ 5-6+0 & -5+6+0 & 6-12+9 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 17. यदि A, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है, तो $|\text{adj } A|$ बराबर है।

(a) $|A|$ (b) $|A|^2$ (c) $|A|^3$ (d) $3|A|$

हल (b) हम जानते हैं कि $(\text{adj } A)\, A = |A|\, I = |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad |(\text{adj } A)\, A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |(\text{adj } A)\, A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |A|^3 |I| \Rightarrow |\text{adj } A|\,|A| = |A|^3 \qquad (\because |I| = 1)$$

$$\therefore \quad |(\text{adj } A)| = |A|^2$$

प्रश्न 18. यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तो $\det(A^{-1})$ बराबर है

(a) $\det(A)$ (b) $\dfrac{1}{\det(A)}$ (c) 1 (d) 0

हल (b) हम जानते हैं कि $AA^{-1} = I$

$\therefore \quad |AA^{-1}| = |I| \Rightarrow |A|\,|A^{-1}| = 1$ $\qquad (\because |AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$ तथा $|I| = 1$ से)

$$\Rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{\det(A)}$$

वैकल्पिक विधि

(b) चूँकि A व्युत्क्रमानुपाती आव्यूह है $\therefore A^{-1}$ विद्यमान है तथा $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{adj}(A)$

माना $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, तब $|A| = ad - bc$

तथा $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

अब, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{adj}(A) = \dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{|A|} & -\dfrac{b}{|A|} \\ -\dfrac{c}{|A|} & \dfrac{a}{|A|} \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad |A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|} \times \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|^2}(ad - bc)$$

$$= \frac{1}{|A|^2} \cdot |A| \qquad (\because |A| = ad - bc)$$

$$= \frac{1}{|A|}$$

$$\therefore \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

प्रश्नावली 4.6

निर्देश (प्र. सं. 1-6) निम्नलिखित प्रश्नों में समीकरण निकायों का संगत अथवा असंगत के रूप में वर्गीकरण कीजिए।

प्रश्न 1. $x + 2y = 2,\ 2x + 3y = 3$

समीकरण निकाय $AX = B$ संगत होगा यदि $|A| \neq 0$ । तथा यदि $|A| = 0$ हो, तब (adj A) $B = 0$ होने पर समीरकण निकाय संगत होगा और (adj A)$B \neq 0$ होने पर समीकरण निकाय असंगत होगा।

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिखा जा सकता है $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

यहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 2(2) = 3 - 4 = -1 \neq 0$

$\therefore$ A व्युत्क्रमणीय है।

$\therefore$ A^{-1} विद्यमान है।

अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है।

प्रश्न 2. $2x - y = 5,\quad x + y = 4$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिखा जा सकता है $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

यहाँ, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - (-1)(1) = 2 + 1 = 3 \neq 0$

$\therefore$ A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। $\Rightarrow A^{-1}$ विद्यमान है अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है।

प्रश्न 3. $x + 3y = 5, 2x + 6y = 8$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिखा जा सकता है $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

यहाँ, $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1(6) - 3(2) = 6 - 6 = 0$$

$\therefore$ A अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

अब, $$(\text{adj } A) B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \left(\because \text{adj } (A) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 - 24 \\ -10 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0$$

अतः दिया गया समीकरण निकाय असंगत है।

प्रश्न 4. $x + y + z = 1, \quad 2x + 3y + 2z = 2, \quad ax + ay + 2az = 4$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ a & a & 2a \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

यहाँ, $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ a & a & 2a \end{vmatrix} = 1(6a - 2a) - 1(4a - 2a) + 1(2a - 3a)$$

$$= 4a - 2a - a = 4a - 3a = a \neq 0$$

$\therefore$ A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

$\therefore$ A^{-1} विद्यमान है। अतः समीकरण निकाय संगत है।

प्रश्न 5. $3x - y - 2z = 2, 2y - z = -1, 3x - 5y = 3$

हल दिया गया समीकरण निकाय निम्न है $3x - y - 2z = 2$,

$$0x + 2y - z = -1 \quad \text{तथा} \quad 3x - 5y + 0z = 3,$$

जिसे निम्न रूप से लिख सकते हैं $AX = B$, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

यहाँ, $$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 3(0 - 5) + 1(0 + 3) - 2(0 - 6) = -15 + 3 + 12 = 0$$

$\therefore$ A अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

अब, A के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{11} = -5, A_{12} = -3, A_{13} = -6, \quad A_{21} = 10, A_{22} = 6, A_{23} = 12$$
$$A_{31} = 5, A_{32} = 3, A_{33} = 6$$

$\therefore$ $$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -6 \\ 10 & 6 & 12 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$(\text{adj } A)B = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10-10+15 \\ -6-6+9 \\ -12-12+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \neq 0$$

अतः दिया गया समीकरण निकाय असंगत है।

प्रश्न 6. $5x - y + 4z = 5, \quad 2x + 3y + 5z = 2, \quad 5x - 2y + 6z = -1$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिखा जा सकता है $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

यहाँ, $$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 5(18+10) - (-1)(12-25) + 4(-4-15)$$

$$= 140 - 13 - 76 = 51 \neq 0$$

$\therefore$ A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

$\Rightarrow$ A^{-1} विद्यमान है। अतः समीकरण निकाय संगत है।

निर्देश (प्र. सं. 7-14) निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

प्रश्न 7. $5x + 2y = 4, \quad 7x + 3y = 5$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप कों लिख सकते हैं $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ यहाँ, } |A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1 \neq 0$$

$\therefore$ A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। $\Rightarrow A^{-1}$ विद्यमान है।

अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है जिसका अद्वितीय हल निम्न है

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \qquad \ldots(\text{i})$$

A के सहखण्ड निम्न हैं $\quad A_{11} = 3, A_{12} = -7, A_{21} = -2, A_{22} = 5$

$\therefore$ $$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

अब, $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 4 + (-2) \times 5 \\ -7 \times 4 + 5 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

अतः $x = 2$ तथा $y = -3$

प्रश्न 8. $2x - y = -2, \quad 3x + 4y = 3$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिख सकते हैं $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

यहाँ, $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-3) = 11 \neq 0$$

$\therefore$ A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। $\Rightarrow$ A^{-1} विद्यमान है।
अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है। जिसका अद्वितीय हल निम्न है

$$X = A^{-1}B$$

A के सहखण्ड निम्न हैं $A_{11} = 4, A_{12} = -3, A_{21} = 1, A_{22} = 2$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

अब, $$X = A^{-1}B = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -8+3 \\ 6+6 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{11} \\ \frac{12}{11} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{11} \\ \frac{12}{11} \end{bmatrix}$$

अतः $$x = \frac{-5}{11} \text{ तथा } y = \frac{12}{11}$$

प्रश्न 9. $4x - 3y = 3, 3x - 5y = 7$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिख सकते हैं $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

यहाँ, $$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 4(-5) - 3(-3) = -20 + 9 = -11 \neq 0$$

$\therefore$ A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।
$\Rightarrow$ A^{-1} विद्यमान है।
अतः दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल निम्न है $X = A^{-1}B$

A के सहखण्ड $A_{11} = -5, A_{12} = -3, A_{21} = 3, A_{22} = 4$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

अब, $$X = A^{-1}B = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -15+21 \\ -9+28 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-6}{11} \\ \frac{-19}{11} \end{bmatrix}$$

अतः $$x = -\frac{6}{11} \text{ तथा } y = -\frac{19}{11}$$

प्रश्न 10. $5x + 2y = 3, \quad 3x + 2y = 5$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिख सकते हैं $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

यहाँ, $$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4 \neq 0,$$

$\therefore A$ व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

$\Rightarrow$ A^{-1} विद्यमान है।

अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है तथा इसका अद्वितीय हल निम्न है $X = A^{-1}B$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{11} = 2, A_{12} = -3, \quad A_{21} = -2, A_{22} = 5$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

अब, $$X = A^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 - 10 \\ -9 + 25 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ अतः $x = -1$ तथा $y = 4$

प्रश्न 11. $2x + y + z = 1, \quad x - 2y - z = \frac{3}{2}, \quad 3y - 5z = 9$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिख सकते हैं $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

यहाँ, $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(20 + 6) - 1(-10 - 0) + 1(6 - 0) = 52 + 10 + 6 = 68 \neq 0$$

$\therefore A$ व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

$\Rightarrow$ A^{-1} विद्यमान है।

अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है जिसका अद्वितीय हल निम्न है $X = A^{-1}B$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{11} = 20 + 6 = 26, \quad A_{12} = -(-10 + 0) = 10, \quad A_{13} = 6 + 0 = 6$$
$$A_{21} = -(-5 - 3) = 8, \quad A_{22} = -10 - 0 = -10,$$
$$A_{23} = -(6 - 0) = -6$$
$$A_{31} = (-2 + 4) = 2, \quad A_{32} = -(-4 - 2) = 6, \quad A_{33} = -8 - 2 = -10$$

$$\text{adj}(A)=\begin{bmatrix}26&10&6\\8&-10&-6\\2&6&-10\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}26&8&2\\10&-10&6\\6&-6&-10\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{adj } A)=\frac{1}{68}\begin{bmatrix}26&8&2\\10&-10&6\\6&-6&10\end{bmatrix}$$

अब, $$X=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{68}\begin{bmatrix}26&8&2\\10&-10&6\\6&-6&-10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{68}\begin{bmatrix}26+24+18\\10-30+54\\6-18-90\end{bmatrix}=\frac{1}{68}\begin{bmatrix}68\\34\\-102\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{-3}{2}\end{bmatrix}$$

अत: $x=1, y=\frac{1}{2}$ तथा $z=\frac{-3}{2}$

प्रश्न 12. $x-y+z=4, \quad 2x+y-3z=0, \quad x+y+z=2$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिख सकते हैं $AX=B$, जहाँ

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&-3\\1&1&1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \text{ तथा } B=\begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}$$

यहाँ $|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&-3\\1&1&1\end{vmatrix}=1(1+3)-(-1)(2+3)+1(2-1)=4+5+1=10\neq 0$

$\therefore A$ व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। $\Rightarrow$ A^{-1} विद्यमान है।

अत: दिया गया समीकरण निकाय संगत है। जिसका अद्वितीय हल निम्न है

$$X=A^{-1}B$$

A के सहखण्ड निम्न हैं $A_{11}=1+3=4, \quad A_{12}=-(2+3)=-5, \quad A_{13}=2-1=1,$

$A_{21}=-(-1-1)=2, \quad A_{22}=1-1=0, \quad A_{23}=-(1+1)=-2,$

$A_{31}=3-1=2, \quad A_{32}=-(-3-2)=5, \quad A_{33}=1+2=3$

$$\text{adj}(A)=\begin{bmatrix}4&-5&1\\2&0&-2\\2&5&3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4&2&2\\-5&0&5\\1&-2&3\end{bmatrix}\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{adj } A)=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4&2&2\\-5&0&5\\1&-2&3\end{bmatrix}$$

अब, $$X=A^{-1}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4&2&2\\-5&0&5\\1&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 16+0+4 \\ -20+0+10 \\ 4+0+6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

अत: $x = 2, y = -1$ तथा $z = 1$

प्रश्न 13. $2x + 3y + 3z = 5, x - 2y + z = -4, 3x - y - 2z = 3$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिख सकते हैं $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

यहाँ,
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(4+1) - 3(-2-3) + 3(-1+6)$$
$$= 10 + 15 + 15 = 40 \neq 0$$

$\therefore A$ व्युत्क्रमणीय अव्यूह है।

$\therefore A^{-1}$ विद्यमान है।

अत: दिया गया समीकरण निकाय संगत है जिसका अद्वितीय हल निम्न है $x = A^{-1}B$

A के सहखण्ड निम्न हैं $A_{11} = 4 + 1 = 5, \quad A_{12} = -(-2-3) = 5, \quad A_{13} = (-1+6) = 5,$

$A_{21} = -(-6+3) = 3, \quad A_{22} = (-4-9) = -13,$

$A_{23} = -(-2-9) = 11,$

$A_{31} = 3 + 6 = 9, \quad A_{32} = -(2-3) = 1, \quad A_{33} = -4 - 3 = -7$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & -13 & 11 \\ 9 & 1 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

अब, $X = A^{-1}B$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 25-12+27 \\ 25+52+3 \\ 25-44-21 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

अत: $x = 1, y = 2$ तथा $z = -1$

प्रश्न 14. $x - y + 2z = 7, \quad 3x + 4y - 5z = -5, \quad 2x - y + 3z = 12$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिख सकते हैं $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

यहाँ,
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(12-5) - (-1)(9+10) + 2(-3-8)$$

$$= 7 + 19 - 22 = 4 \neq 0$$

$\therefore A$ व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

$\Rightarrow$ A^{-1} विद्यमान है।

अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है जिसका अद्वितीय हल निम्न है

$$X = A^{-1}B$$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{11} = 12 - 5 = 7,\ A_{12} = -(9 + 10) = -19,\ A_{13} = -3 - 8 = -11,$$
$$A_{21} = -(-3 + 2) = 1,\ A_{22} = 3 - 4 = -1,\ A_{23} = -(-1 + 2) = -1,$$
$$A_{31} = 5 - 8 = -3,\ A_{32} = -(-5 - 6) = 11,\ A_{33} = 4 + 3 = 7$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 7 & -19 & -11 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 11 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$\therefore$
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}A) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

अब,
$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 49 - 5 - 36 \\ -133 + 5 + 132 \\ -77 + 5 + 84 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 2,\ y = 1$ तथा $z = 3$

प्रश्न 15. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।**

$$2x - 3y + 5z = 11,\quad 3x + 2y - 4z = -5,\quad x + y - 2z = -3$$

हल दिए गए समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिख सकते हैं $AX = B$ जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

यहाँ,
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-4 + 4) - (-3)(-6 + 4) + 5(3 - 2)$$
$$= 0 - 6 + 5 = -1 \neq 0$$

$\therefore A$ व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

$\Rightarrow$ A^{-1} विद्यमान है।

अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है जिसका अद्वितीय हल निम्न है

$$X = A^{-1}B$$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{11} = -4+4=0,\quad A_{12} = -(-6+4)=2,\quad A_{13}=3-2=1,$$
$$A_{21} = -(6-5)=-1,\quad A_{22}=-4-5=-9,\quad A_{23}=-(2+3)=-5,$$
$$A_{31}=(12-10)=2,\quad A_{32}=-(-8-15)=23,\quad A_{33}=4+9=13$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -5 \\ 2 & 23 & 13 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$\therefore$
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}\,A) = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}$$

अब,
$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-5+6 \\ -22-45+69 \\ -11-25+39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ अतः $x = 1, y = 2$ तथा $z = 3$

प्रश्न 16. 4 किग्रा प्याज, 3 किग्रा गेहूँ और 2 किग्रा चावल का मूल्य ₹ 60 है। 2 किग्रा प्याज, 4 किग्रा गेहूँ और 6 किग्रा चावल का मूल्य ₹ 90 है। 6 किग्रा प्याज, 2 किग्रा और 3 किग्रा चावल का मूल्य ₹ 70 है। आव्यूह विधि द्वारा प्रत्येक का मूल्य प्रति किग्रा ज्ञात कीजिए। माना प्याज, गेहूँ तथा चावल के मूल्य क्रमशः ₹ x, ₹ y, ₹ z हैं। अब निम्न तीन समीकरण बनाइए।

(i) x, y, z के गुणांकों का प्रयोग करके एक आव्यूह A बनाइए।

(ii) x, y, z का प्रयोग करके एक 3×1 क्रम का आव्यूह बनाइए।

(iii) समीकरणों में उपस्थित अचर का प्रयोग करके एक आव्यूह B बनाइए।

(iv) अब, सूत्र $AX = B$ का प्रयोग कीजिए।

हल माना प्याज गेहूँ तथा चावल का मूल्य क्रमशः ₹ x, ₹ y तथा ₹ z है, तब

$$4x+3y+2z=60,\quad 2x+4y+6z=90,\quad 6x+2y+3z=70$$

इस समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिख सकते हैं $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$$

यहाँ,
$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4(12-12)-3(6-36)+2(4-24)$$
$$= 0+90-40 = 50 \neq 0$$

$\therefore A$ व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। $\Rightarrow A^{-1}$ विद्यमान है।
अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है जिसका अद्वितीय हल निम्न है

$$X = A^{-1}B$$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{11} = 12 - 12 = 0,\ A_{12} = -(6 - 36) = 30,\ A_{13} = 4 - 24 = -20,$$
$$A_{21} = -(9 - 4) = -5,\ A_{22} = 12 - 12 = 0,\ A_{23} = -(8 - 18) = 10,$$
$$A_{31} = (18 - 8) = 10,\ A_{32} = -(24 - 4) = -20,\ A_{33} = 16 - 6 = 10$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 30 & -20 \\ -5 & 0 & 10 \\ 10 & -20 & 10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

अब, $\quad X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 30 & 0 & -20 \\ -20 & 10 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 0 - 450 + 700 \\ 1800 + 0 - 1400 \\ -1200 + 900 + 700 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 250 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 5, y = 8$ तथा $z = 8$

अतः 1 किग्रा प्याज का मूल ₹5, 1 किग्रा गेहूँ का मूल्य ₹8 तथा 1 किग्रा चावल का मूल्य ₹8 है।

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि सारणिक $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$, θ से स्वतंत्र है।

हल माना $A = \begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$ प्रथम पंक्ति के संगत विस्तार करने पर

$$A = x\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} - \sin\theta\begin{vmatrix} -\sin\theta & 1 \\ \cos\theta & x \end{vmatrix} + \cos\theta\begin{vmatrix} -\sin\theta & -x \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$
$$= x(-x^2 - 1) - \sin\theta(-x\sin\theta - \cos\theta) + \cos\theta(-\sin\theta + x\cos\theta)$$
$$= -x^3 - x + x\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta + x\cos^2\theta$$
$$= -x^3 - x + x(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -x^3 - x + x \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$
$$= -x^3$$

अतः A, θ से स्वतंत्र है।

प्रश्न 2. सारणिक का विस्तार किए बिना सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

हल बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$R_1 \to aR_1, R_2 \to bR_2$ तथा $R_3 \to cR_3$ से,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & abc \\ b^2 & b^3 & abc \\ c^2 & c^3 & abc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} \times abc \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (C_3 \text{ से } abc \text{ उभयनिष्ठ लेने पर})$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \qquad (C_1 \leftrightarrow C_3 \text{ तथा } C_2 \leftrightarrow C_3 \text{ से})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 3. $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना दी गयी सारणिक $= A = \begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$A = \cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - 0) - \cos\alpha\sin\beta(-\cos\alpha\sin\beta - 0)$$
$$-\sin\alpha(-\sin^2\beta\sin\alpha - \cos^2\beta\sin\alpha)$$
$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$
$$= \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$
$$= \cos^2\alpha(1) + \sin^2\alpha(1)$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

प्रश्न 4. यदि a, b और c वास्तविक संख्याएँ तथा सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$$ हो, तो दर्शाइए कि या तो $a+b+c=0$ या $a=b=c$ है।

हल दिया है, $$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 2(a+b+c) & a+b & b+c \\ 2(a+b+c) & b+c & c+a \end{vmatrix}$$

($C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से)

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c+a & a+b \\ 1 & a+b & b+c \\ 1 & b+c & c+a \end{vmatrix}$$ [C_1 से $2(a+b+c)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c+a & a+b \\ 0 & b-c & c-a \\ 0 & b-a & c-b \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$ से)

C_1 के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$\Delta = 2(a+b+c)[(b-c)(c-b)-(b-a)(c-a)]$$
$$= 2(a+b+c)[bc-c^2-b^2+bc-bc+ac+ab-a^2]$$
$$= 2(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$$

दिया है, $\Delta = 0$

$\therefore$ $(a+b+c)\times 2(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)=0$

$\Rightarrow$ या तो $(a+b+c)=0$ या $2(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)=0$

यदि $2(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)=0$

$\Rightarrow$ $-(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

[(–) चिन्ह उभयनिष्ठ लेने पर]

$\Rightarrow$ $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$\Rightarrow$ $(a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ca)=0$

$\Rightarrow$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ [$\because (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy$]

$\Rightarrow$ $(a-b)^2=(b-c)^2=(c-a)^2=0$

[$\because (a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ धनात्मक हैं]

$\Rightarrow$ $(a-b)=(b-c)=(c-a)=0$

$\Rightarrow$ $a=b=c$

अतः यदि $\Delta=0$ तो $a+b+c=0$ या $a=b=c$

प्रश्न 5. यदि $a \neq 0$ हो, तो समीकरण $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$ को हल कीजिए।

हल दिया है, $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3x+a & 3x+a & 3x+a \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$

($R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से)

$$\Rightarrow \quad (3x+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$$

[R_1 से $(3x+a)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$$\Rightarrow \quad (3x+a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & a & 0 \\ x & 0 & a \end{vmatrix} = 0,$$

($C_2 \to C_2 - C_1$ तथा $C_3 \to C_3 - C_1$ से)

प्रथम पंक्ति के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$(3x+a)[1(a \times a - 0)] = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2(3x+a) = 0$$

परन्तु $a \neq 0$ (दिया है) अतः $\quad 3x + a = 0 \Rightarrow x = -a/3$

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

हल बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$

(C_1 से a, C_2 से b तथा C_3 से c उभयनिष्ठ लेने पर)

$$= abc\begin{vmatrix} 0 & c & a+c \\ 2b & b & a \\ 2b & b+c & c \end{vmatrix}$$

($C_1 \to C_1 + C_2 - C_3$ से)

$$= abc\begin{vmatrix} 0 & c & a+c \\ 0 & -c & a-c \\ 2b & b+c & c \end{vmatrix}$$

($R_2 \to R_2 - R_3$ से)

C_1 के अवयवों के संगत विस्तार करने पर, बायाँ पक्ष $= (abc)\ [(2b)\{c(a-c) + c(a+c)\}]$

$= 2(ab^2c)(2ac) = 4a^2b^2c^2 =$ दायाँ पक्ष

प्रश्न 7. यदि $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

सबसे पहले B^{-1} ज्ञात करते हैं और फिर $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ का प्रयोग करते हैं।

हल हम जानते हैं कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ यहाँ A^{-1} दिया गया है अतः हम B^{-1} ज्ञात करते हैं।

यहाँ, $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(3-0) - 2(-1-0) - 2(2-0) = 3 + 2 - 4 = 1 \neq 0$

$\therefore$ B व्युत्क्रमणीय आव्यूह है, अतः B^{-1} विद्यमान है।

B के सहखण्ड निम्न हैं,

$B_{11} = (3-0) = 3$, $B_{12} = -(-1-0) = 1$, $B_{13} = (2-0) = 2$,

$B_{21} = -(2-4) = 2$, $B_{22} = 1-0 = 1$, $B_{23} = -(-2-0) = 2$,

$B_{31} = (0+6) = 6$, $B_{32} = -(0-2) = 2$, $B_{33} = 3+2 = 5$,

$$\text{adj}(B) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj}(B) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

अब $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-30+30 & -3+12-12 & 3-10+12 \\ 3-15+10 & -1+6-4 & 1-5+4 \\ 6-30+25 & -2+12-10 & 2-10+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 8. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि

(a) $[\text{adj}(A)]^{-1} = \text{adj}(A^{-1})$ (b) $(A^{-1})^{-1} = A$

हल दिया है, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1(15-1) - (-2)(-10-1) + 1(-2-3) = 14 - 22 - 5 = -13 \neq 0$

A के सहखण्ड निम्न हैं,

$A_{11} = 15 - 1 = 14$, $A_{12} = -(-10-1) = 11$, $A_{13} = -2-3 = -5$,

$A_{21} = -(-10-1) = 11$, $A_{22} = 5-1 = 4$, $A_{23} = -(1+2) = -3$,

$$A_{31} = (-2-3) = -5, \quad A_{32} = -(1+2) = -3, \quad A_{33} = 3-4 = -1$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{13} & -\frac{11}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{11}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

(a) यहाँ, $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = B$ (माना)

$$\therefore \quad |B| = |\text{adj } A| = \begin{vmatrix} 14 & 11 & -5 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 14(-4-9) - 11(-11-15) - 5(-33+20)$$

$$= -182 + 286 + 65 = 169 \neq 0$$

B के सहखण्ड निम्न हैं

$$B_{11} = (-4-9) = -13, \quad B_{12} = -(-11-15) = 26,$$
$$B_{13} = (-33+20) = -13, \quad B_{21} = -(-11-15) = 26,$$
$$B_{22} = -14-25 = -39, \quad B_{23} = -(-42+55) = -13,$$
$$B_{31} = (-33+20) = -13, \quad B_{32} = -(-42+55) = -13,$$
$$B_{33} = 56-121 = -65$$

$$\text{adj}(B) = \text{adj}(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} -13 & 26 & -13 \\ 26 & -39 & -13 \\ -13 & -13 & -65 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -13 & 26 & -13 \\ 26 & -39 & -13 \\ -13 & -13 & -65 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B^{-1} = [\text{adj } A]^{-1} = \frac{1}{|\text{adj } A|}\{\text{adj}(\text{adj } A)\}$$

$$\Rightarrow \quad [\text{adj } A]^{-1} = \frac{1}{169}\begin{bmatrix} -13 & 26 & -13 \\ 26 & -39 & -13 \\ -13 & -13 & -65 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad \ldots(i)$$

A^{-1} के सहखण्ड निम्न है,

$$A_{11} = \frac{-13}{169}, A_{12} = \frac{26}{169}, A_{13} = \frac{-13}{169},$$
$$A_{21} = \frac{26}{169}, A_{22} = \frac{-39}{169}, A_{23} = \frac{-13}{169}$$
$$A_{31} = \frac{-13}{169}, A_{32} = -\frac{13}{169}, A_{33} = -\frac{65}{169}$$

अब, $\quad \text{adj}\,(A^{-1}) = \begin{bmatrix} -\frac{13}{169} & \frac{26}{169} & -\frac{13}{169} \\ \frac{26}{169} & -\frac{39}{169} & -\frac{13}{169} \\ -\frac{13}{169} & -\frac{13}{169} & -\frac{65}{169} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{13}{169} & \frac{26}{169} & -\frac{13}{169} \\ \frac{26}{169} & -\frac{39}{169} & -\frac{13}{169} \\ -\frac{13}{169} & -\frac{13}{169} & -\frac{65}{169} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \text{adj}\,(A^{-1}) = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad \ldots\text{(ii)}$$

समी (i) तथा (ii) से, $\text{adj}\,(A^{-1}) = (\text{adj}\,A)^{-1}$

(b) $\quad |A^{-1}| = -\frac{14}{13}\left(-\frac{4}{169} - \frac{9}{169}\right) + \frac{11}{13}\left(-\frac{11}{169} - \frac{15}{169}\right) + \frac{5}{13}\left(-\frac{33}{169} + \frac{20}{169}\right)$

$$= -\frac{14}{13}\left(-\frac{13}{169}\right) + \frac{11}{13}\left(-\frac{26}{169}\right) + \frac{5}{13}\left(-\frac{13}{169}\right)$$

$$= \frac{14}{169} - \frac{22}{169} - \frac{5}{169} = -\frac{13}{169} = -\frac{1}{13}$$

तथा $\quad \text{adj}\,(A^{-1}) = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|}(\text{adj}\,A^{-1}) = \frac{1}{-\frac{1}{13}} \times \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A$$

प्रश्न 9. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल $\quad$ माना $A = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 \text{ से})$$

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \qquad [C_1 \text{ से } 2(x+y) \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}]$$

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix} \qquad (R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1 \text{ से})$$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$A = 2(x+y) \times 1\{-x^2 + y(x-y)\}$$
$$= 2(x+y)(-x^2+xy-y^2) = -2(x+y)(x^2-xy+y^2) = -2(x^3+y^3)$$

प्रश्न 10. $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना $A = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

($R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से)

C_1 के अवयवों के संगत विस्तार करने पर, $A = 1(yx - 0) = xy$

निर्देश (प्र.सं. 11-15) सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्नलिखित प्रश्नों को सिद्ध कीजिए।

प्रश्न 11. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)$

हल माना $A = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^1 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha+\beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \alpha+\gamma+\beta \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix}$ ($C_3 \to C_3 + C_1$ से)

$$= (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \\ \gamma & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix}$$ [C_1 से $(\alpha+\beta+\gamma)$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 & 0 \\ \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 & 0 \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से)

C_3 के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$A = (\alpha+\beta+\gamma)[(\beta-\alpha)(\gamma^2-\alpha^2)-(\gamma-\alpha)(\beta^2-\alpha^2)]$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)[(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha)-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)]$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta-\alpha)$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

प्रश्न 12. $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1+pxyz)(x-y)(y-z)(z-x)$, जहाँ p एक अचर है।

हल बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & px^3 \\ y & y^2 & py^3 \\ z & z^2 & pz^3 \end{vmatrix}$

प्रथम सारणिक में C_1 तथा C_3, C_2 तथा C_3 को आपस में परस्पर बदलने पर तथा दूसरे सारणिक में C_3 से p उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\text{बायाँ पक्ष} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + pxyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

[R_1 से x, R_2 से y तथा R_3 से z उभयनिष्ठ लेने पर,]

$$= (1+pxyz) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (1+pxyz) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

($R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से)

C_1 के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$\text{बायाँ पक्ष} = (1+pxyz)[(y-x)(z^2-x^2)-(z-x)(y^2-x^2)]$$
$$= (1+pxyz)[(y-x)(z-x)(z+x)-(z-x)(y-x)(y+x)]$$
$$= (1+pxyz)(y-x)(z-x)[(z+x)-(y+x)]$$
$$= (1+pxyz)(y-x)(z-x)[(z+x-y-x)]$$
$$= (1+pxyz)[(y-x)(z-x)(z-y) = (1+pxyz)(x-y)(y-z)(z-x)$$

प्रश्न 13. $\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$

हल माना $A = \begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & -a+b & -a+c \\ a+b+c & 3b & -b+c \\ a+b+c & -c+b & 3c \end{vmatrix} \qquad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 \text{ से}]$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & -a+b & -a+c \\ 1 & 3b & -b+c \\ 1 & -c+b & 3c \end{vmatrix} \qquad [C_1 \text{ से } (a+b+c) \text{ उभयनिष्ठ लेने पर}]$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & -a+b & -a+c \\ 0 & 2b+a & a-b \\ 0 & a-c & 2c+a \end{vmatrix} \qquad (R_2 \to R_2 - R_1 \text{ तथा } R_3 \to R_3 - R_1 \text{ से})$$

C_1 के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$$A = (a+b+c)[(2b+a)(2c+a) - (a-b)(a-c)]$$
$$= (a+b+c)[4bc + 2ab + 2ac + a^2 - a^2 + ac + ba - bc]$$
$$= (a+b+c)(3ab + 3bc + 3ac)$$
$$= 3(a+b+c)(ab+bc+ca) = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 14. $\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1$

हल बायाँ पक्ष $= \begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 0 & 1 & 2+p \\ 0 & 3 & 7+3p \end{vmatrix} \qquad (R_2 \to R_2 - 2R_1 \text{ तथा } R_3 \to R_3 - 3R_1 \text{ से})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 0 & 1 & 2+p \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (R_3 \to R_3 - 3R_2 \text{ से})$$

C_1 के अवयवों के संगत विस्तार करने पर, बायाँ पक्ष, $= 1(1 \times 1 - 0) = 1 =$ दायाँ पक्ष

प्रश्न 15. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

हल माना $A = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$,

$$= \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta \end{vmatrix}$$

$[\because \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A \sin B]$

$$= \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha\cos\delta \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos\beta\cos\delta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos\gamma\cos\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha\sin\delta \\ \sin\beta & \cos\beta & -\sin\beta\sin\delta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & -\sin\gamma\sin\delta \end{vmatrix}$$

प्रथम सारणिक में C_3 से $\cos\delta$ तथा द्वितीय सारणिक में C_3 से $-\sin\delta$ उभयनिष्ठ लेने पर,

$$A = \cos\delta \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix} - \sin\delta \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \cos\delta \cdot 0 - \sin\delta \cdot 0 = 0$$

चूँकि प्रथम सारणिक में C_2 तथा C_3 और द्वितीय सारणिक में C_1 तथा C_3 समान हैं, अतः सारणिकों का मान शून्य हैं।

प्रश्न 16. निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4, \frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1 \text{ तथा } \frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

हल माना $\frac{1}{x} = p, \frac{1}{y} = q$ तथा $\frac{1}{z} = r$ तब दिया गया समीकरण निकाय निम्न हैं

$$2p + 3q + 10r = 4, \quad 4p - 6q + 5r = 1, \quad 6p + 9q - 20r = 2$$

इस समीकरण निकाय को निम्न रूप में लिख सकते हैं $AX = B$, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & -6 & 5 \\ 6 & 9 & -20 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

यहाँ, $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & -6 & 5 \\ 6 & 9 & -20 \end{vmatrix} = 2(120 - 45) - 3(-80 - 30) + 10(36 + 36)$$

$$= 150 + 330 + 720 = 1200$$

$\therefore$ A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

$\Rightarrow$ A^{-1} विद्यमान है।

अतः दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल निम्न है $X = A^{-1}B$

A के सहखण्ड निम्न है,

$$A_{11} = 120 - 45 = 75, \; A_{12} = -(-80 - 30) = 110, A_{13} = (36 + 36) = 72,$$
$$A_{21} = -(-60 - 90) = 150, \; A_{22} = (-40 - 60) = -100, \; A_{23} = -(18 - 18) = 0,$$
$$A_{31} = 15 + 60 = 75, \; A_{32} = -(10 - 40) = 30, \; A_{33} = -12 - 12 = -24$$

$\therefore$ $$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 75 & 110 & 72 \\ 150 & -100 & 0 \\ 75 & 30 & -24 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & -100 & 30 \\ 72 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

अब, $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{1200} \begin{bmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & -100 & 30 \\ 72 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{1200}\begin{bmatrix} 75 & 150 & 75 \\ 110 & -100 & 30 \\ 72 & 0 & -24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1200}\begin{bmatrix} 300+150+150 \\ 440-100+60 \\ 288+0-48 \end{bmatrix} = \frac{1}{1200}\begin{bmatrix} 600 \\ 400 \\ 240 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ \\ 1 \\ 5 \end{matrix}$$

$$p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \frac{1}{z} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 2, y = 3 \text{ तथा } z = 5$$

प्रश्न 17. यदि a, b, c समांतर श्रेणी में हों, तो सारणिक $\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ का मान है

(a) 0 (b) 1 (c) x (d) $2x$

हल माना $A = \begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ 0 & 0 & 2(2b-a-c) \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$

$(R_2 \to 2R_2 - R_1 - R_3$ से)

$\therefore$ a, b, c समांतर श्रेणी में है।

$\therefore$ $2b = a + c$

तब, $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ 0 & 0 & 0 \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix} = 0$ (चूँकि R_2 के प्रत्येक अवयव शून्य हैं)

प्रश्न 18. यदि x, y, z शून्येत्तर वास्तविक संख्याएँ हों, तो आव्यूह $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है

(a) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (b) $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

हल (a) दिया है, $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = x(yz - 0) = xyz \neq 0 \qquad (\because x,\ y \text{ तथा } z \text{ अशून्य हैं})$$

A के सहखण्ड निम्न हैं

$$A_{11} = (yz - 0) = yz, \quad A_{12} = -(0 - 0) = 0, \quad A_{13} = 0 - 0 = 0,$$
$$A_{21} = -(0 - 0) = 0, \quad A_{22} = xz - 0 = xz, \quad A_{23} = -(0 - 0) = 0$$
$$A_{31} = 0 - 0 = 0, \quad A_{32} = -(0 - 0) = 0, \quad A_{33} = (xy - 0) = xy,$$

$$\therefore \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & xz & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & xz & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{bmatrix}$$

अब, $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & xz & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$$

प्रश्न 19. माना $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ $0 \le \theta \le 2\pi$, तो

(a) $\det A = 0$ (b) $\det A \in (2, \infty)$
(c) $\det A \in (2, 4)$ (d) $\det A \in [2, 4]$

हल दिया है, $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1(1 + \sin^2\theta) - \sin\theta(-\sin\theta + \sin\theta) + 1(\sin^2\theta + 1)$$
$$= 2 + 2\sin^2\theta$$

$0 \le \theta \le 2\pi$ के लिए, $\quad -1 \le \sin\theta \le 1 \Rightarrow 0 \le \sin^2\theta \le 1$

$\Rightarrow \quad 1 \le 1 + \sin^2\theta \le 2 \Rightarrow 2 \le 2(1 + \sin^2\theta) \le 4$

$\therefore \quad \det(A) \in [2, 4]$