Durga Tutorial

Online Classes

बिहार बोर्ड और CBSE बोर्ड की तैयारी Free Notes के लिए

www.durgatutorial.com

पर जाएँ।

ज्यादा जानकारी के लिए हमें Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511

अध्याय 5

सत्तता तथा अवकलनीयता

Continuity and Differentiability

प्रश्नावली 5.1

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = 5x - 3$, $x = 0$, $x = -3$ तथा $x = 5$ पर सतत् है।

फलन $F(x)$, $x = a$ पर सतत् होगा, यदि $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$

हल यहाँ, $f(x) = 5x - 3$

$x = 0$ पर, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (5x - 3) = 5 \times 0 - 3 = 0 - 3 = -3$

तथा $f(0) = 5 \times 0 - 3 = -3$

$\therefore$ $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

अतः $f(x)$, $x = 0$ पर सतत् है।

$x = -3$ पर, $\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} (5x - 3) = 5 \times (-3) - 3 = -15 - 3 = -18$

तथा $f(-3) = 5 \times -3 - 3 = -18$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$\therefore \quad \lim_{x \to -3} f(x) = f(-3)$

अतः $f(x)$, $x = -3$ पर सतत् है।

$x = 5$ पर, $\quad \lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} (5x - 3) = 5 \times 5 - 3 = 25 - 3 = 22$

तथा $\quad f(5) = 5 \times 5 - 3 = 25 - 3 = 22$

$\therefore \quad \lim_{x \to 5} f(x) = f(5)$

अतः $f(x)$, $x = 5$ पर सतत् है।

प्रश्न 2. $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के सतत्ता की जाँच कीजिए।

हल यहाँ, $\quad f(x) = 2x^2 - 1$

$\therefore \quad \lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (2x^2 - 1) = 2 \times (3)^2 - 1 = 18 - 1 = 17$

तथा $\quad f(3) = 2 \times (3)^2 - 1 = 18 - 1 = 17$

$\therefore \quad \lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

अतः $f(x)$, $x = 3$ पर सतत् है।

प्रश्न 3. निम्नलिखित फलनों की सतत्ता की जाँच कीजिए।

(a) $f(x) = x - 5$ $\qquad$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 5}, x \neq 5$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}, x \neq -5$ $\qquad$ (d) $f(x) = |x - 5|$

हल (a) $f(x) = x - 5$ बहुपदी फलन है, अतः $f(x)$, x के प्रत्येक मान के लिए सतत् फलन है।

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 5}$ दो बहुपदी फलनों का भागफल है, अतः फलन $f(x)$ $x \neq 5$ के प्रत्येक मान के लिए सतत् है।

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5} = \dfrac{(x + 5)(x - 5)}{x + 5} = x - 5$

$f(x) = x - 5$ एक बहुपदी फलन है, अतः $f(x)$, n के प्रत्येक मान के लिए सतत् है।

(d) $f(x) = |x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{जब } x \geq 5 \\ 5 - x, & \text{जब } x < 5 \end{cases}$

$x \to 5^+$ के लिए, $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (x - 5) = 5 - 5 = 0$

$x \to 5^-$ के लिए, $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (5 - x) = 5 - 5 = 0$

पुनः $\quad f(5) = 5 - 5 = 0$

LHL = RHL = $f(5)$, अतः $f(x)$, $x = 5$ पर सतत् फलन है।

Durga Tutorial Since 1996 Banjapur

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^n$, $x = n$ पर सतत् है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

हल यहाँ, $f(x) = x^n$

$\therefore \quad \lim_{x \to n} f(x) = \lim_{x \to n} x^n = n^n$

तथा $f(n) = n^n \qquad [\because f(x) = x^n]$

$\therefore \quad \lim_{x \to n} f(x) = f(n)$

अतः $f(x)$, $x = n$ पर सतत् फलन है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

प्रश्न 5. क्या $f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \le 1 \\ 5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f(x)$, $x = 0$, $x = 1$ तथा $x = 2$ पर सतत् है?

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} x, \text{यदि } x \le 1 \\ 5, \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

$x = 0$ पर, $\quad LHL = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x)$

$x = 0 - h$ रखने पर, $x \to 0^- \Rightarrow h \to 0$

$= \lim_{h \to 0} (0 - h) = 0 - 0 = 0$

तथा $\quad RHL = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x)$

$x = 0 + h$ रखने पर, $x \to 0^+ \Rightarrow h \to 0$

$= \lim_{h \to 0} (0 + h) = 0 + 0 = 0$

पुनः $\quad f(0) = 0 \qquad [\because f(x) = x]$

$\therefore \quad LHL = RHL = f(0)$

अतः $f(x)$, $x = 0$ पर सतत् है।

$x = 1$ पर, $\quad LHL = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x)$

$x = 1 - h$ रखने पर, $x \to 1^- \Rightarrow h \to 0$

$= \lim_{h \to 0} (1 - h) = 1 - 0 = 1$

तथा $\quad LHL = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 5 \quad \therefore LHL \ne RHL$

अतः $f(x)$, $x = 1$ पर सतत् नहीं है।

पुनः $x = 2$ पर, $\quad LHL = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 5, \quad RHL = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$

पुनः $f(2) = 5 \quad \therefore \quad LHL = RHL = f(2)$

अतः $f(x)$, $x = 2$ पर सतत् है।

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

प्रश्न 6. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ यदि } x \le 2 \\ 2x - 3, \text{ यदि } x > 2. \end{cases}$

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ यदि } x \le 2 \\ 2x - 3, \text{ यदि } x > 2 \end{cases}$

अब $\text{LHL} = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x + 3)$

$x = 2 - h$ रखने पर, $x \to 2^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [2(2 - h) + 3] = \lim_{h \to 0} (7 - 2h) = 7 - 2 \times 0 = 7$

इसी प्रकार, $\text{RHL} = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x - 3)$

$x = 2 + h$ रखने पर, $x \to 2^+ \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [2(2 + h) - 3] = \lim_{h \to 0} (1 + 2h) = 1 + 2 \times 0 = 1$

$\therefore$ दाईं सीमा $\neq$ बाईं सीमा

अतः $f(x)$ केवल $x = 2$ पर असतत् है।

प्रश्न 7. $f(x) = \begin{cases} |x| + 3, \text{ यदि } x \le -3 \\ -2x, \text{ यदि } -3 < x < 3 \\ 6x + 2, \text{ यदि } x \ge 3 \end{cases}$

हल दिया है, $f(x) = \begin{cases} |x| + 3, \text{ यदि } x \le -3 \\ -2x, \text{ यदि } -3 < x < 3 \\ 6x + 2, \text{ यदि } x \ge 3 \end{cases}$

$x < -3$ के लिए, $f(x) = |x| + 3;$

$-3 < x < 3, f(x) = -2x$ तथा $x > 3, f(x) = 6x + 2$

बहुपदी फलन है, अतः सतत् है। अब, केवल $x = -3$ तथा $x = 3$ पर सततृता का परीक्षण करेंगे।

$x = -3$ पर, $\text{LHL} = \lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} (|x| + 3)$

$x = (-3 - h)$ रखने पर, $x \to -3^- \Rightarrow h \to 0$

$\therefore \lim_{h \to 0} [|-3 - h| + 3] = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6 + 0 = 6$

$\text{RHL} = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (-2x)$

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

$x = -3 + h$ रखने पर, $x \to -3^+ \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} -2(-3 + h) = \lim_{h \to 0} (6 - 2h) = 6 - 2 \times 0 = 6$$

पुनः $f(-3) = |-3| + 3 = 3 + 3 = 6$ $[\because f(x) = |x| + 3]$

$$\therefore \text{LHL} = \text{RHL} = f(-3)$$

अतः $f(x)$, $x = -3$ पर, सतत् फलन है।

$x = 3$ पर, $\text{LHL} = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (-2x)$

$x = 3 - h$ रखने पर, $x \to 3^- \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} -2(3 - h) = \lim_{h \to 0} (-6 + 2h) = -6 + 2 \times 0 = -6$$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (6x + 2)$

$x = 3 + h$ रखने पर, $x \to 3^+ \Rightarrow h \to 0$

$$\therefore \lim_{h \to 0} [6(3 + h) + 2] = \lim_{h \to 0} (18 + 6h + 2)$$

$$= \lim_{h \to 0} (20 + 6h) = 20 + 6 \times 0 = 20$$

$$\therefore \text{LHL} \neq \text{RHL}$$

अतः $f(x)$, $x = 3$ पर सतत् फलन है।

प्रश्न 8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

अब, $\text{LHL} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

$x = 0 - h$ रखने पर, $x \to 0^- \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|0 - h|}{0 - h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h} = -1 \quad [\because |-h| = h]$$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$

$x = 0 + h$ रखने पर $x \to 0^+ \Rightarrow h \to 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \dfrac{|0 + h|}{0 + h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

$$\therefore \text{LHL} \neq \text{RHL}$$

अतः $f(x)$, $x = 0$ पर असतत् फलन है।

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

प्रश्न 9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{यदि } x < 0 \\ -1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{यदि } x < 0 \\ -1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$

अब, $$\text{LHL} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$$

$x = 0 - h$ रखने पर, $x \to 0^- \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{0-h}{|0-h|} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1 \qquad (\because |-h| = h)$$

$$\text{RHL} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$$

पुनः $f(0) = -1$

$$\therefore \quad \text{LHL} = \text{RHL} = f(0)$$

अतः $f(x)$, $x = 0$ पर सतत् फलन है। और यह फलन किसी भी विंदु पर असतत् नहीं है।

प्रश्न 10. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{यदि } x \geq 1 \\ x^2+1, & \text{यदि } x < 1 \end{cases}$

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{यदि } x \geq 1 \\ x^2+1, & \text{यदि } x < 1 \end{cases}$

चूँकि $x > 1$ के लिए $f(x) = x + 1$ तथा $x < 1$ के लिए $f(x) = x^2 + 1$ बहुपदी फलन है। अतः सतत् फलन है। अब, हम केवल $x = 1$ पर सततता का परीक्षण करेंगे।

अब, $$\text{LHL} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1)$$

$x = 1 - h$ रखने पर, $x \to 1^- \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} [(1-h)^2 + 1] = \lim_{h \to 0} (1 + h^2 - 2h + 1)$$

$$= \lim_{h \to 0} (2 + h^2 - 2h) = 2 + 0 - 0 = 2$$

तथा $$\text{RHL} = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x + 1)$$

$x = 1 + h$ रखने पर, $x \to 1^+ \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} (1 + h + 1) = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2 + 0 = 2$$

पुनः $$f(1) = 1 + 1 = 2 \qquad [\because f(x) = x + 1]$$

$$\therefore \quad \text{LHL} = \text{RHL} = f(1)$$

अतः $f(x)$, $x = 1$ पर सतत् फलन है।

यहाँ, $f(x)$ किसी भी विंदु पर असतत् नहीं है।

प्रश्न 11. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & \text{यदि } x \le 2 \\ x^2 + 1, & \text{यदि } x > 2. \end{cases}$

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & \text{यदि } x \le 2 \\ x^2 + 1, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$

चूँकि $x < 2$ के लिए $f(x) = x^2 - 3$ तथा $x > 2$ के लिए $f(x) = x^2 + 1$ बहुपदी फलन है, अतः सतत् है। अब केवल $x = 2$ पर $f(x)$ की सततृता का परीक्षण करेंगे।

$$\therefore \quad \text{LHL} = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^3 - 3)$$

$x = 2 - h$ रखने पर, $x \to 2^- \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} [(2 - h)^3 - 3] = \lim_{h \to 0} (8 - h^3 - 12h + 6h^2 - 3)$$

$$= \lim_{h \to 0} (5 - h^3 - 12h + 6h^2) = 5$$

तथा $$\text{RHL} = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 + 1)$$

$x = 2 + h$ रखने पर, $x \to 2^+ \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} [(2 + h)^2 + 1] = \lim_{h \to 0} (4 + h^2 + 4h + 1) = \lim_{h \to 0} (5 + h^2 + 4h) = 5$$

पुनः $$f(2) = (2)^3 - 3 = 8 - 3 = 5 \qquad [\because f(x) = x^3 - 3]$$

$$\therefore \quad \text{LHL} = \text{RHL} = f(2)$$

अतः $f(x)$, $x = 2$ पर सतत् फलन है।

यहाँ, $f(x)$ किसी भी बिंदु पर असतत् फलन नहीं है।

प्रश्न 12. $f(x) = \begin{cases} x^{10} - 1, & \text{यदि } x \le 1 \\ x^2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} x^{10} - 1, & \text{यदि } x \le 1 \\ x^2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

चूँकि $x < 1$ के लिए $f(x) = x^{10} - 1$ तथा $x > 1$ के लिए $f(x) = x^2$ बहुपदी फलन है, अतः सतत् फलन है। अब, हम केवल $x = 1$ पर $f(x)$ की सततृता का परीक्षण करेंगे।

$$\text{LHL} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^{10} - 1)$$

$x = 1 - h$ रखने पर, $x \to 1^- \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} [(1 - h)^{10} - 1] = (1 - 0)^{10} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{RHL} = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2)$$

$x = 1 + h$ रखने पर, $x \to 1^+ \Rightarrow h \to 0$

Durga Tutorial
Baniapur

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}(1+h)^2 = \lim_{h\to 0}(1+h^2+2h) = 1$$

$$\therefore \quad \text{LHL} \neq \text{RHL}$$

अतः $f(x)$, $x = 1$ पर असतत् फलन है।

प्रश्न 13. क्या $f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{यदि } x \le 1 \\ x-5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन, एक सतत् फलन है?

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{यदि } x \le 1 \\ x-5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

$$\text{LHL} = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+5)$$

$x = 1 - h$ रखने पर, $x \to 1^- \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}(1-h+5) = \lim_{h\to 0}(6-h) = 6 - 0 = 6$$

$$\text{RHL} = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-5)$$

$x = 1 + h$ रखने पर, $x \to 1^+ \Rightarrow h \to 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}(1+h-5) = \lim_{h\to 0}(h-4) = 0 - 4 = -4$

$$\therefore \quad \text{LHL} \neq \text{RHL}$$

अतः $f(x)$, $x = 1$ पर असतत् फलन है।

निर्देश (प्र.सं. 14-16) फलन f, के सतत् पर विचार कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है।

प्रश्न 14. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{यदि } 0 \le x \le 1 \\ 4, & \text{यदि } 1 < x < 3 \\ 5, & \text{यदि } 3 \le x \le 10. \end{cases}$

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{यदि } 0 \le x \le 1 \\ 4, & \text{यदि } 1 < x < 3 \\ 5, & \text{यदि } 3 \le x \le 10 \end{cases}$

चूँकि $0 \le x < 1$ के लिए, $f(x) = 3$ तथा $1 < x < 3$ के लिए $f(x) = 4$ तथा $3 < x < 10$ के लिए $f(x) = 5$ अचर फलन है, अतः सतत् फलन है। अब हम केवल $x = 1$ तथा $x = 3$ पर सततृता का परीक्षण करेंगे।

$x = 1$ पर, $\text{LHL} = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(3) = 3$ तथा $\text{RHL} = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(4) = 4$

$$\therefore \quad \text{LHL} \neq \text{RHL}$$

अतः $f(x)$, $x = 1$ पर असतत् है।

$x = 3$ पर, $\text{LHL} = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(4) = 4$ तथा $\text{RHL} = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(5) = 5$

$$\therefore \quad \text{LHL} \neq \text{RHL}$$

अतः $f(x)$, $x = 1$ तथा $x = 3$ को छोड़कर सभी बिंदुओं पर सतत् फलन है।

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

प्रश्न 15. $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ यदि } & x < 0 \\ 0, \text{ यदि } & 0 \le x \le 1 \\ 4x, \text{ यदि } & x > 1 \end{cases}$

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{यदि } & x < 0 \\ 0, \text{ यदि } & 0 \le x \le 1 \\ 4x, \text{यदि } & x > 1 \end{cases}$

चूँकि $x < 0$ के लिए $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$ के लिए $f(x) = 0$ तथा $x > 1$ के लिए $f(x) = 4x$ बहुपदी फलन है, अतः सतत् फलन है। अब, हम केवल $x = 0$ तथा $x = 1$ पर $f(x)$ की सततता का परीक्षण करेंगे।

$x = 0$ पर, $\quad \text{LHL} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x)$

$x = 0 - h$ रखने पर, $x \to 0^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} [2(0 - h)] = \lim_{h \to 0} (-2h) = -2 \times 0 = 0$

तथा $x = 0$ पर, $\quad \text{RHL} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (0) = 0$

पुनः, $\quad f(0) = 0$

$\therefore \quad \text{LHL} = \text{RHL} = f(0)$

अतः $f(x)$, $x = 0$ पर सतत् फलन है।

$x = 1$ पर, $\quad \text{LHL} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (0) = 0$

तथा $\quad \text{RHL} = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4x)$

$x = 1 + h$ रखने पर, $x \to 1^+ \Rightarrow h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} [4(1 + h)] = \lim_{h \to 0} (4 + 4h) = 4 + 4 \times 0 = 4$$

$\therefore \quad \text{LHL} \ne \text{RHL}$

अतः $f(x)$, $x = 1$ को छोड़कर सभी बिंदुओं पर सतत् फलन है।

प्रश्न 16. $f(x) = \begin{cases} -2, \text{ यदि } & x \le -1 \\ 2x, \text{ यदि } & -1 < x \le 1 \\ 2, \text{ यदि } & x > 1 \end{cases}$

हल यहाँ $\quad f(x) = \begin{cases} -2, \text{यदि } & x \le -1 \\ 2x, \text{यदि } & -1 < x \le 1 \\ 2, \text{ यदि } & x > 1 \end{cases}$

चूँकि $x \le -1$ के लिए $f(x) = -2$, $-1 < x \le 1$ के लिए $f(x) = 2x$ तथा $x > 1$ के लिए $f(x) = 2$ बहुपदी फलन है, अतः सतत् फलन है। अब हम केवल $x = -1$ तथा $x = 1$ पर सततता का परीक्षण करेंगे।

$x = 1$ पर, $\quad \text{LHL} = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-2) = -2$

Durga Tutorial
1996
Baniapur

तथा $\text{RHL} = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (2x)$

$x = -1 + h$ रखने पर, $x \to -1^+ \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} 2(-1 + h) = \lim_{h\to 0} (-2 + 2h) = -2 + 0 = -2$

पुन: $f(-1) = -2$

$\therefore \text{LHL} = \text{RHL} = f(-1)$

अत: $f(x)$, $x = -1$ पर सतत् फलन है।

$x = 1$ पर, $\text{LHL} = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (2x)$

$x = 1 - h$ रखने पर, $h \to 1^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} [2(1 - h)] = \lim_{h\to 0} (2 - 2h) = 2 - 2 \times 0 = 2$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2) = 2$

पुन:, $f(1) = 2 \times 1 = 2$ $[\because f(x) = 2x]$

$\therefore \text{LHL} = \text{RHL} = f(1)$

अत: $f(x)$, $x = 1$ पर सतत् फलन है।

अत: $f(x)$, x के प्रत्येक मान के लिए सतत् फलन है।

प्रश्न 17. a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, \text{ यदि } x \le 3 \\ bx + 3, \text{ यदि } x > 3 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x = 3$ पर सतत् है।

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} ax + 1, \text{ यदि } x \le 3 \\ bx + 3, \text{ यदि } x > 3 \end{cases}$

अब, $\text{LHL} = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} (ax + 1)$

$x = 3 - h$ रखने पर, $x \to 3^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} [a(3 - h) + 1] = \lim_{h\to 0} (3a - ah + 1) = 3a + 1$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} (bx + 3)$

$x = 3 + h$ रखने पर, $x \to 3^+ \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} [b(3 + h) + 3] = \lim_{h\to 0} (3b + bh + 3) = 3b + 3$

पुन: $f(3) = 3a + 1$ $[\because f(x) = ax + 1]$

चूँकि $f(x)$, $x = 3$ पर सतत् फलन है।

$\therefore \text{LHL} = \text{RHL} = f(3)$

$\Rightarrow 3a + 1 = 3b + 3 \Rightarrow 3a = 3b + 2 \Rightarrow a = b + \frac{2}{3}$

Durga Tutorial Banlapur

प्रश्न 18. λ के किस मान के लिए

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{यदि } x \le 0 \\ 4x + 1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x = 0$ पर सतत् है। $x = 1$ पर इसकी सततता पर विचार कीजिए।

हल यहाँ,
$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{यदि } x \le 0 \\ 4x + 1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर, $\text{LHL} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \lambda(x^2 - 2x)$

$x = 0 - h$ रखने पर, $x \to 0^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \lambda[(0-h)^2 - 2(0-h)] = \lim_{h \to 0} [\lambda(h^2 + 2h)] = 0$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (4x + 1)$

$x = 0 + h$ रखने पर, $x \to 0^+ \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [4(0 + h) + 1] = \lim_{h \to 0} [4h + 1] = 0 + 1 = 1$

$\therefore$ $\text{LHL} \ne \text{RHL}$

अतः $f(x)$, $x = 0$ पर λ के किसी भी मान के लिए सतत् नहीं है।

$x = 1$ पर, $\text{LHL} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (4x + 1)$

$x = 1 - h$ रखने पर, $x \to 1^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [4(1 - h) + 1] = \lim_{h \to 0} [5 - 4h] = 5 - 0 = 5$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4x + 1)$

$x = 1 + h$ रखने पर, $x \to 1^+ \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [4(1 + h) + 1] = \lim_{h \to 0} (5 + 4h) = 5 + 0 = 5$

पुनः $f(1) = 4 \times 1 + 1 = 5$ $[\because f(x) = 4x + 1]$

अतः $f(x)$, $x = 1$ पर λ के प्रत्येक मान के लिए सतत् है।

प्रश्न 19. दर्शाइए कि $g(x) = x - [x]$ द्वारा परिभाषित फलन समस्त पूर्णांक बिंदुओं पर असतत् है, यहाँ $[x]$ वह महत्तम पूर्णांक निरूपित करता है, जो x के बराबर या x से कम है।

हल यहाँ, $g(x) = x - [x]$

मान लीजिए a कोई धन पूर्णांक है, तब

$[a - h] = a - 1$, $[a + h] = a$ तथा $[a] = a$

$x = a$ पर, $\text{LHL} = \lim_{x \to a^-} g(x) = \lim_{x \to a^-} (x - [x])$

$x = a - h$ रखने पर, $x \to a^- \Rightarrow h \to 0$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}(a-h-[a-h]) = \lim_{h\to 0}[a-h-(a-1)]$$

$$= \lim_{h\to 0}[-h+1] = 1 \qquad [\because (a-h) = a-1]$$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+}(x-[x])$

$x = a+h$ रखने पर, $x \to a^+ \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}(a+h-[a+h]) = \lim_{h\to 0}(a+h-a) = \lim_{h\to 0} h = 0 \qquad [\because (a+h) = a]$$

$\therefore \qquad \text{LHL} \neq \text{RHL}$

अतः $g(x)$ प्रत्येक पूर्णांक के लिए असतत् फलन है।

प्रश्न 20. **क्या $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर सतत् है?**

हल यहाँ, $f(x) = x^2 - \sin x + 5$

अब, $\text{LHL} = \lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-}(x^2 - \sin x + 5)$

$x = \pi - h$ रखने पर, $x \to \pi^- \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}[(\pi-h)^2 - \sin(\pi-h) + 5] = \lim_{h\to 0}(\pi^2 + h^2 - 2\pi h - \sin h + 5)$$

$$= \pi^2 + 0 + 0 - \sin(0) + 5 = \pi^2 + 5$$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+}(x^2 - \sin x + 5)$

$x = \pi + h$ रखने पर, $x \to \pi^+ \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}[(\pi+h)^2 - \sin(\pi+h) + 5] = \lim_{h\to 0}[\pi^2 + h^2 + 2\pi h + \sin h + 5] = \pi^2 + 5$$

पुनः, $f(\pi) = \pi^2 - \sin\pi + 5 = \pi^2 + 5$

$\therefore \qquad \text{LHL} = \text{RHL} = f(\pi)$

अतः फलन $x = \pi$ पर सतत् फलन है।

प्रश्न 21. **निम्नलिखित फलनों के सततृता पर विचार कीजिए।**

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ **(b) $f(x) = \sin x - \cos x$**

(c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

दिए गए फलन को सरलतम रूप में परिवर्तित करने के बाद सततृता का परीक्षण कीजिए।

हल (a) यहाँ, $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$x = a$ पर, जहाँ $a \in R$

Durga Tutorial Since 1996 Banlapur

$$\text{LHL} = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \sqrt{2}\sin\left(a - h + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \lim_{h\to 0}\left[\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\cos h - \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin h\right]$$

[$\because \sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$]

$$= \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\cos 0 - \sqrt{2}\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin 0 = \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

तथा $$\text{RHL} = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \sqrt{2}\sin\left(a + h + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \lim_{h\to 0}\left[\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\cos h + \sin h\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

[$\because \sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$]

$$= \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\cos 0 + \sin 0\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

पुनः $$f(a) = \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore$ LHL = RHL = $f(a)$ अतः $f(x)$ प्रत्येक बिंदु पर सतत् फलन है।

(b) यहाँ, $f(x) = \sin x - \cos x$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$x = a$ पर, जहाँ $a \in R$

$$\text{LHL} = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{h\to 0} \sqrt{2}\sin\left(a - h - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \sqrt{2}\left[\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\cos h - \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\sin h\right]$$

[सूत्र $\sin(A - B)$ के प्रयोग से]

$$= \sqrt{2}\left[\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\right]\cos 0 - \sqrt{2}\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\sin 0 = \sqrt{2}\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

तथा $$\text{RHL} = \lim_{x\to a^+} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{h\to 0} \sqrt{2}\sin\left(a + h - \frac{\pi}{4}\right)$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$= \lim_{h \to 0} \sqrt{2}\left[\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\cos h + \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\sin h\right]$$

[सूत्र $\sin(A+B)$ के प्रयोग से]

$$= \sqrt{2}\left[\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\right]\cos 0 + \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\sin 0 = \sqrt{2}\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

पुनः $\quad f(a) = \sqrt{2}\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore$ LHL = RHL = $f(a)$

अतः $f(x)$ प्रत्येक विंदु पर सतत् फलन है।

(c) यहाँ, $\quad f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \times 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

$x = a$ पर, जहाँ $a \in R$

$$\text{LHL} = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} \frac{1}{2}\sin 2x = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}\sin 2(a - h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}[\sin 2a \cos 2h - \cos 2a \sin 2h]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin 2a \cos 0 - \cos 2a \sin 0]$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2a$$

[सूत्र $\sin(A-B)$ के प्रयोग से]

तथा $$\text{RHL} = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} \frac{1}{2}\sin 2x = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}\sin 2(a + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}[\sin 2a \cos 2h + \cos 2a \sin 2h]$$

[सूत्र $\sin(A+B)$ के प्रयोग से]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2}[\sin(2a + 2h)] = \frac{1}{2}\sin 2a$$

पुनः, $\quad f(a) = \frac{1}{2}\sin 2a \quad \therefore \quad$ LHL = RHL = $f(a)$

अतः $f(x)$, प्रत्येक विंदु पर सतत् फलन है।

प्रश्न 22. cosine, cosecant, secant और cotangent फलनों के सतत् पर विचार कीजिए।

हल (i) यहाँ, $f(x) = \cos x$

$x = a$ पर, जहाँ $a \in R$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \cos x = \cos a \qquad [\because f(x) = \cos x]$$

$$f(a) = \cos a$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

अतः $f(x)$, $x = a$ पर सतत् फलन है लेकिन a स्वेच्छ विंदु है, अतः $f(x)$, प्रत्येक विंदु पर सतत् फलन है।

(ii) चूँकि $f(x) = \text{cosec}\ x,\ x = n\pi, n \in Z$ पर परिभाषित नहीं है, अतः $f(x),\ x = n\pi, n \in Z$ पर सतत् नहीं है।

(iii) यहाँ $f(x) = \sec x,\ x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$ पर परिभाषित नहीं है। अतः इन बिंदुओं पर सतत् नहीं है।

(iv) चूँकि $f(x) = \cot x,\ x = n\pi, n \in Z$ पर परिभाषित नहीं है, अतः इन बिंदुओं पर सतत् नहीं है।

प्रश्न 23. f के सभी असततता के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{यदि } x < 0 \\ x+1, & \text{यदि } x \geq 0. \end{cases}$$

मान लीजिए $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ है। अब, यदि $h(x)$ तथा $g(x) \neq 0$, सतत् फलन हों, तो $f(x)$ सतत् फलन होगा।

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{यदि } x < 0 \\ x+1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$

अब, $\text{LHL} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x}$

$x = 0 - h$ रखने पर, $x \to 0^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\sin(0-h)}{(0-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin h}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1)$

$x = 0 + h$ रखने पर, $x \to 0^+ \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} (0 + h + 1) = 0 + 1 = 1,\quad f(0) = 0 + 1 = 1 \qquad [\because f(x) = x + 1]$

$\therefore \quad \text{LHL} = \text{RHL} = f(0)$

अतः $f(x),\ x = 0$ पर सतत् है, जब $x < 0$ हो, तो $\sin x$ तथा x दोनों सतत् है। अतः $\frac{\sin x}{x}$ सतत् है।

जब $x > 0$ हो, तो $f(x) = x + 1$ बहुपदी है। अतः यह सतत् है। अतः $f(x)$ सतत् फलन है। यहाँ, $f(x)$ किसी भी बिंदु पर असतत् फलन नहीं है।

प्रश्न 24. निर्धारित कीजिए कि फलन f

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित एक सतत् फलन है।

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

अब, $\text{LHL} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 \sin\frac{1}{x}$

$x = 0 - h$ रखने पर, $x \to 0^- \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} (0-h)^2 \sin\frac{1}{(0-h)} = \lim_{h \to 0}\left(-h^2 \sin\frac{1}{h}\right) \quad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$$

$$= -0 \times \sin(\infty) = 0 \quad (\because -1 \le \sin x \le 1, \forall x \in R)$$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 \sin\frac{1}{x}$

$x = 0 + h$ रखने पर, $x \to 0^+ \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} (0+h)^2 \sin\frac{1}{0+h} = \lim_{h \to 0} h^2 \sin\frac{1}{h}$$

$$= 0 \times \sin(\infty) \quad (\because -1 \le \sin x \le 1, \forall x \in R)$$

$\therefore \quad \text{LHL} = \text{RHL} = f(0)$

अत: $f(x)$, $x = 0$ पर सतत् फलन है।

प्रश्न 25. f के सतत्ता की जाँच कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & \text{यदि } x \neq 0 \\ -1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & \text{यदि } x \neq 0 \\ -1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

अब, $\text{LHL} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\sin x - \cos x)$

$x = 0 - h$ रखने पर, $x \to 0^- \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [\sin(0-h) - \cos(0-h)] = \lim_{h \to 0} (-\sin h - \cos h) = 0 - 1 = -1$$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\sin x - \cos x)$

$x = 0 + h$ रखने पर, $x \to 0^+ \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [\sin(0+h) - \cos(0+h)] = \lim_{h \to 0} (\sin h - \cos h) = 0 - 1 = -1$$

$\therefore \quad \text{LHL} = \text{RHL} = f(0)$

अत: $f(x)$, $x = 0$ पर सतत् फलन है।

हम जानते हैं कि $x < 0$ के लिए $f(x) = \sin x - \cos x$ सतत् फलन है तथा $x > 0$ के लिए $f(x) = \sin x - \cos x$ सतत् फलन है। अत: $f(x)$, x के प्रत्येक मान के लिए सतत् है।

Durga Tutorial Since 1996 Banjapur

निर्देश (प्र.सं. 26-29) निम्नलिखित प्रश्नों में k के मानों को ज्ञात कीजिए, ताकि प्रदत्त फलन निर्दिष्ट बिंदु पर सतत् हों।

प्रश्न 26. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\cos x}{\pi - 2x}, & \text{यदि } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 3, & \text{यदि } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\cos x}{\pi - 2x}, & \text{यदि } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 3, & \text{यदि } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

अब, $$\text{LHL} = \lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} \frac{k\cos x}{\pi - 2x}$$

$x = \dfrac{\pi}{2} - h$ रखने पर, $x \to \dfrac{\pi^-}{2} \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - h\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{k\sin h}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k}{2} \times \frac{\sin h}{h} = \frac{k}{2} \times 1 = \frac{k}{2} \qquad \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

तथा $$\text{RHL} = \lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \frac{k\cos x}{\pi - 2x}$$

$x = \dfrac{\pi}{2} + h$ रखने पर, $x \to \dfrac{\pi^+}{2} \Rightarrow h \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{-k\sin h}{-2h} = \lim_{h \to 0} \frac{k}{2} \times \frac{\sin h}{h}$$

$$= \frac{k}{2} \times 1 = \frac{k}{2} \qquad \left(\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

पुनः, $$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

चूँकि $f(x), x = \dfrac{\pi}{2}$ पर सतत् फलन है।

$$\therefore \quad \text{LHL} = \text{RHL} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \quad k = 6$$

Durga Tutorial Baniapur

प्रश्न 27. $f(x) = \begin{cases} k x^2, \text{यदि } x \leq 2 \\ 3, \quad \text{यदि } x > 2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 2$ पर

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} kx^2, \text{यदि } x \leq 2 \\ 3, \text{ यदि } x > 2 \end{cases}$

अब, $\text{LHL} = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} kx^2$

$x = 2 - h$ रखने पर, $x \to 2^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} k(2-h)^2 = \lim_{h \to 0} k(4 + h^2 - 4h) = 4k$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3) = 3$

पुनः $f(2) = k \times (2)^2 = 4k$ $[\because f(x) = kx^2]$

चूँकि $f(x), x = 2$ पर सतत् फलन है।

$\therefore \text{LHL} = \text{RHL} = f(2) \Rightarrow 4k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$

प्रश्न 28. $f(x) = \begin{cases} kx + 1, \text{यदि } x \leq \pi \\ 3x - 5, \text{यदि } x > \pi \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 5$ पर

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} kx + 1, \text{यदि } x < \pi \\ \cos x, \text{ यदि } x > \pi \end{cases}$

$\text{LHL} = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} (kx + 1)$

$x = \pi - h$ रखने पर, $x \to \pi \Rightarrow h \to 0$

$\lim_{h \to 0} [k(\pi - h) + 1] = \lim_{h \to 0} (k\pi - kh + 1) = k\pi + 1$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} \cos x$

$x = \pi + h$ रखने पर $\Rightarrow x \to \pi^+ \Rightarrow h \to 0$

$\therefore \lim_{h \to 0} \cos(\pi + h) = \lim_{h \to 0} (-\cos h) = -1$

पुनः $f(\pi) = k\pi + 1$ $[(\because f(x) = k\pi + 1]$

चूँकि $f(x), x = \pi$ सतत् फलन है,

$\therefore \text{LHL} = \text{RHL} = f(\pi) = k\pi + 1 = -1$

$k = \frac{-2}{\pi}$

प्रश्न 29. $f(x) = \begin{cases} kx + 1, \text{यदि } x \leq 5 \\ 3x - 5, \text{यदि } x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 5$ पर

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} kx + 1, \text{ यदि } x \leq 5 \\ 3x - 5, \text{यदि } x > 5 \end{cases}$

Durga Tutorial
Since
Baniapur

अब, $\text{LHL} = \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (kx + 1)$

$x = 5 - h$ रखने पर, $x \to 5^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [k(5 - h) + 1] = \lim_{h \to 0} [5k - kh + 1] = 5k + 1$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (3x - 5)$

$x = 5 + h$ रखने पर, $x \to 5^+ \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [3(5 + h) - 5] = \lim_{h \to 0} (10 + 3h) = 10$

पुनः, $f(5) = 5k + 1$ $[\because f(x) = kx + 1]$

$\because f(x)$, $x = 5$ पर सतत् फलन है।

$\therefore \text{LHL} = \text{RHL} = f(5) \Rightarrow 5k + 1 = 10 \Rightarrow k = \frac{9}{5}$

प्रश्न 29. a तथा b के मानों को ज्ञात कीजिए, ताकि

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{यदि } x \le 2 \\ ax + b, & \text{यदि } 2 < x < 10 \\ 21, & \text{यदि } x \ge 10 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन एक सतत् फलन हो।

हल यहाँ, $f(x) = \begin{cases} 5, & \text{यदि } x \le 2 \\ ax + b, & \text{यदि } 2 < x < 10 \\ 21, & \text{यदि } x \ge 10 \end{cases}$

$x = 2$ पर, $\text{LHL} = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (5) = 5$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (ax + b)$

$x = 2 + h$ रखने पर, $x \to 2^+ \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [a(2 + h) + b] = \lim_{h \to 0} (2a + ah + b) = 2a + b$

पुनः, $f(2) = 5$

अतः $f(x)$, $x = 2$ पर सतत् फलन है।

$\therefore \text{LHL} = \text{RHL} = f(2) \Rightarrow 2a + b = 5$ ...(i)

$x = 10$ पर, $\text{LHL} = \lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^-} (ax + b)$

$x = 10 - h$ रखने पर, $x \to 10^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} [a(10 - h) + b] = \lim_{h \to 0} (10a - ah + b) = 10a + b$

तथा $\text{RHL} = \lim_{x \to 10^+} f(x) = \lim_{x \to 10^+} (21) = 21$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

पुनः $f(10) = 21$

चूँकि $f(x)$, $x = 10$ पर सतत् है।

$\therefore \quad LHL = RHL = f(10) \Rightarrow 10a + b = 21 \quad \ldots(ii)$

समी (i) में से समी (ii) को घटाने पर,

$$8a = 16 \Rightarrow a = 2$$

समी (i) में $a=2$ रखने पर,

$$2 \times 2 + b = 5 \Rightarrow b = 1$$

प्रश्न 30. दर्शाइए कि $f(x) = \cos x^2$ द्वारा परिभाषित फलन एक सतत् फलन है।

(प्र.सं. 31-33) यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ सतत् फलन हों, तो संयोजक फलन (fog) अर्थात् $f\{g(x)\}$ भी सतत् फलन होगा।

हल मान लीजिए $h(x) = x^2$ तथा $g(x) = \cos x$ चूँकि $h(x)$, बहुपद फलन है, अतः सतत् फलन होगा। हम जानते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या $x \in R$ के लिए $g(x) = \cos x$ सतत् फलन होता है।

$\therefore \quad (goh)(x) = g\{h(x)\} = g(x^2) = \cos x^2$

चूँकि $g(x)$ तथा $h(x)$ दोनों सतत् फलन हैं। अतः संयोजक फलन $(goh)(x)$ है।

$\Rightarrow \quad g\{h(x)\} = g(x) = \cos x^2$

भी सतत् फलन होगा। अतः प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x) = \cos x^2$ सतत् फलन है।

प्रश्न 31. दर्शाइए कि $f(x) = |\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक सतत् फलन है।

हल मान लीजिए $g(x) = \cos x$ तथा $h(x) = |x|$

हम जानते हैं कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए $g(x) = \cos x$ सतत् फलन है।

पुनः प्रत्येक $x \in R$ के लिए मापांक फलन $h(x) = |x|$ सतत् फलन होता है। अतः संयोजक फलन, प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $(hog)(x) = h\{g(x)\} = h(\cos x) = |\cos x|$ सतत् फलन होगा।

अतः $f(x) = |\cos x|$, प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् फलन है।

प्रश्न 32. जाँच कीजिए कि क्या $\sin |x|$ एक सतत् फलन है?

हल मान लीजिए $g(x) = |x|$ तथा $h(x) = \sin x$

हम जानते हैं कि मापांक फलन $g(x) = |x|$, प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् फलन है। तथा $h(x) = \sin x$, प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् फलन है।

अतः संयोजक फलन $(hog)(x) = h\{g(x)\} = h(|x|) = \sin|x|$

प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् होगा।

अतः $f(x) = \sin|x|$, प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् फलन है।

प्रश्न 33. $f(x) = |x| - |x+1|$ द्वारा परिभाषित है। फलन f के सभी असततता के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $g(x) = |x|$ तथा $h(x) = |x+1|$

हम जानते हैं कि मापांक फलन $g(x)=|x|$, प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् फलन है तथा $h(x)=|x+1|$, प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् फलन है।

अत: $$f(x)=g(x)-h(x)=|x|-|x+1|, \forall x \in R$$

सतत् फलन है। अत: $f(x)$, किसी भी बिंदु पर असतत् फलन नहीं है।

प्रश्नावली 5.2

निर्देश (प्र.सं. 1-8) निम्नलिखित प्रश्नों में x के सापेक्ष निम्नलिखित फलनों का अवकलन कीजिए।

चूँकि दिए गए फलन, मानक फलन नहीं हैं। अत: शृंखला नियम की सहायता से अवकलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\sin(x^2+5)$

हल मान लीजिए $y=\sin(x^2+5)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[\sin(x^2+5)]=\cos(x^2+5)\frac{d}{dx}(x^2+5)$$ (शृंखला नियम से)

$$=\cos(x^2+5)(2x+0)=2x\cos(x^2+5)$$

प्रश्न 2. $\cos(\sin x)$

हल मान लीजिए $y=\cos(\sin x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\cos(\sin x))=-\sin(\sin x)\frac{d}{dx}(\sin x)$$ (शृंखला नियम से)

$$=-\sin(\sin x)\cos x=-\cos x\sin(\sin x)$$

प्रश्न 3. $\sin(ax+b)$

हल मान लीजिए $y=\sin(ax+b)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sin(ax+b)=\cos(ax+b)\frac{d}{dx}(ax+b)$$ (शृंखला नियम से)

$$=\cos(ax+b)\{a\times1+0\}=a\cos(ax+b)$$

प्रश्न 4. $\sec(\tan\sqrt{x})$

हल मान लीजिए $y=\sec(\tan\sqrt{x})$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[\sec(\tan\sqrt{x})]$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$= \sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x})\frac{d}{dx}(\tan\sqrt{x})$$ (शृंखला नियम से)

$$= \sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x})(\sec^2\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x})(\sec^2\sqrt{x})$$

प्रश्न 5. $\dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

चूँकि दिया गया फलन u/v के रूप में है। इसलिए सूत्र $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{d}{dx}u - u\dfrac{d}{dx}v}{v^2}$ का प्रयोग करेंगे।

हल मान लीजिए $y = \dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}\right]$$

$$= \frac{\cos(cx+d)\frac{d}{dx}\{\sin(ax+b)\} - \sin(ax+b)\frac{d}{dx}\{\cos(cx+d)\}}{\{\cos(cx+d)\}^2}$$

(भागफल नियम से)

$$= \frac{\cos(cx+d)\cos(ax+b)\cdot(a+0) + \sin(ax+b)\sin(cx+d)(c+0)}{\cos^2(cx+d)}$$

शृंखला नियम से
$$\left[\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin(ax+b) &= \cos(ax+b)\frac{d}{dx}(ax+b) \\ &= \cos(ax+b)\times(a\times1+0) \\ \frac{d}{dx}\cos(cx+d) &= -\sin(cx+d)\frac{d}{dx}(cx+d) \\ &= -\sin(cx+d)\times(c\times1+0) \end{aligned}\right]$$

$$= \frac{a\cos(cx+d)\cos(ax+b) + c\sin(ax+b)\sin(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$= \frac{a\cos(cx+d)\cos(ax+b)}{\cos^2(cx+d)} + \frac{c\sin(ax+b)\sin(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$= \frac{a\cos(ax+b)}{\cos(cx+d)} + \frac{c\sin(ax+b)\sin(cx+d)}{\cos(cx+d)\cos(cx+d)}$$

$$= a\cos(ax+b)\sec(cx+d) + c\sin(ax+b)\tan(cx+d)\sec(cx+d)$$

Durga Tutorial Since 1996 Daniapur

$$= \sec(\tan\sqrt{x}) \tan(\tan\sqrt{x}) \frac{d}{dx}(\tan\sqrt{x})$$ (शृंखला नियम से)

$$= \sec(\tan\sqrt{x}) \tan(\tan\sqrt{x}) \sec^2\sqrt{x} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \sec(\tan\sqrt{x}) \tan(\tan\sqrt{x})(\sec^2\sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sec(\tan\sqrt{x}) \tan(\tan\sqrt{x})(\sec^2\sqrt{x})$$

प्रश्न 5. $\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

चूँकि दिया गया फलन u/v के रूप में है। इसलिए सूत्र $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$ का प्रयोग करेंगे।

हल मान लीजिए $y = \frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}\right]$$

$$= \frac{\cos(cx+d)\frac{d}{dx}\{\sin(ax+b)\} - \sin(ax+b)\frac{d}{dx}\{\cos(cx+d)\}}{\{\cos(cx+d)\}^2}$$

(भागफल नियम से)

$$= \frac{\cos(cx+d)\cos(ax+b)\cdot(a+0) + \sin(ax+b)\sin(cx+d)(c+0)}{\cos^2(cx+d)}$$

शृंखला नियम से
$$\left[\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin(ax+b) &= \cos(ax+b)\frac{d}{dx}(ax+b) \\ &= \cos(ax+b)\times(a\times1+0) \\ \frac{d}{dx}\cos(cx+d) &= -\sin(cx+d)\frac{d}{dx}(cx+d) \\ &= -\sin(cx+d)\times(c\times1+0) \end{aligned}\right]$$

$$= \frac{a\cos(cx+d)\cos(ax+b) + c\sin(ax+b)\sin(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$= \frac{a\cos(cx+d)\cos(ax+b)}{\cos^2(cx+d)} + \frac{c\sin(ax+b)\sin(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$= \frac{a\cos(ax+b)}{\cos(cx+d)} + \frac{c\sin(ax+b)\sin(cx+d)}{\cos(cx+d)\cos(cx+d)}$$

$$= a\cos(ax+b)\sec(cx+d) + c\sin(ax+b)\tan(cx+d)\sec(cx+d)$$

Durga Tutorial Since Banlapur

प्रश्न 6. $\cos x^3 \sin^2 (x^5)$

चूँकि दिया गया फलन दो फलनों का गुणनफल है।

अतः सूत्र $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$ का प्रयोग करेंगे।

हल मान लीजिए $y = \cos x^3 \sin^2 (x^5)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\cos x^3 \sin^2 (x^5)\} = \cos x^3 \frac{d}{dx}\sin^2(x^5) + \sin^2(x^5)\frac{d}{dx}(\cos x^3)$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}\right]$$

$$= (\cos x^3)(2\sin x^5)\frac{d}{dx}(\sin x^5) + \sin^2(x^5)(-\sin x^3)\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}f\{g(x)\} = f'(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

$$= (\cos x^3)(2\sin x^5)(\cos x^5)\frac{d}{dx}(x^5) + \sin^2(x^5)(-\sin x^3)(3x^2)$$

(शृंखला नियम से)

$$= (\cos x^3)(2\sin x^5)(\cos x^5)(5x^4) - \sin^2(x^5)(\sin x^3)(3x^2)$$

$$= 10x^4(\sin x^5)(\cos x^5)(\cos x^3) - 3x^2 \sin x^3 \sin^2 x^5$$

प्रश्न 7. $2\sqrt{\cot (x^2)}$

हल मान लीजिए $y = 2\sqrt{\cot (x^2)}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}2(\cot x^2)^{1/2} = 2.\frac{1}{2}\{\cot(x^2)\}^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\cot (x^2)$

$$\left[\because \frac{d}{dx}f\{g(x)\} = f'(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cot (x^2)}}(-\operatorname{cosec}^2 x^2)\frac{d}{dx}(x^2)$$

(शृंखला नियम से)

$$= -\frac{\operatorname{cosec}^2 (x^2) 2x}{\sqrt{\cot (x^2)}} = \frac{-2x \operatorname{cosec}^2(x^2)}{\sqrt{\cot (x^2)}}$$

प्रश्न 8. $\cos (\sqrt{x})$

हल मान लीजिए $y = \cos (\sqrt{x})$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos (\sqrt{x}) = -\sin\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \qquad \left[\because \frac{d}{dx}f\{g(x)\} = f'(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

$$= -\sin\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x - 1|, x \in R$ $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है।

यदि LHD ≠ RHD हो, तो फलन अवकलनीय नहीं होगा अर्थात् $Lf'(x) \neq Rf'(x)$

हल दिया है, $f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{यदि } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), & \text{यदि } x - 1 < 0 \end{cases}$

हम $x = 1$ पर अवकलनीयता का परीक्षण करेंगे।

यहाँ, $f(1) = 1 - 1 = 0$

$$L f'(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 - (1-h) - 0}{-h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{+h}{-h} = -1$$

[∵ जब $x < 1 \Rightarrow f(x) = 1 - x$]

तथा $$R f'(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h) - 1 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

[∵ जब $x > 1 \Rightarrow f(x) = x - 1$]

∴ $Lf'(1) \neq Rf'(1)$

अतः $f(x)$, $x = 1$ पर अवकलनीय है।

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि महत्तम पूर्णांक फलन $f(x) = [x]$, $0 < x < 3$, $x = 1$ तथा $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है।

हल दिया है, $f(x) = [x]$

(i) $f(x)$ का $x = 1$ पर RHD,

$x = 1 + h$ रखने पर $x \to 1^+ \Rightarrow h \to 0$

$$Rf'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{[1+h] - [1]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - 1}{h} = 0 \qquad \left[\because Rf'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

तथा $f(x)$ का $x = 1$ पर LHD, $x = 1 - h$ रखने पर $x \to 1^- \Rightarrow h \to 0$

$$Lf'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{[1-h] - [1]}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 1}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} = \infty$$

$$\left[\because Lf'(x) = \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right]$$

∴ LHD ≠ RHD, अतः $f(x)$, $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है।

(ii) $x = 2$ पर,

$$\text{RHD} = Rf'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \qquad \left[\because Rf'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2}{h} = 0$$

तथा $$\text{LHD} = Lf'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} \qquad \left[\because Lf'(x) = \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2-h]-[2]}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-2}{-h} = \infty$$

$\therefore$ RHD $\neq$ LHD

अतः $f(x)$, $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है।

प्रश्नावली 5.3

निर्देश (प्र.सं. 1-15) निम्नलिखित प्रश्नों में $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $2x + 3y = \sin x$

हल दिया है, $2x + 3y = \sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(2x+3y) = \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos x \Rightarrow 3\frac{dy}{dx} = \cos x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2}{3}$$

प्रश्न 2. $2x + 3y = \sin y$

हल दिया है, $2x + 3y = \sin y$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(2x+3y) = \frac{d}{dx}(\sin y) \Rightarrow 2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 3\frac{dy}{dx} - \cos y\frac{dy}{dx} = -2 \Rightarrow (3 - \cos y)\frac{dy}{dx} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\cos y - 3}$$

प्रश्न 3. $ax + by^2 = \cos y$

हल दिया है, $ax + by^2 = \cos y$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(ax+by^2) = \frac{d}{dx}(\cos y)$$

$$a + 2by\frac{dy}{dx} = -\sin y\frac{dy}{dx} \Rightarrow 2by\frac{dy}{dx} + \sin y\frac{dy}{dx} = -a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2by + \sin y) = -a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-a}{2by + \sin y}$$

Durga Tutorial
Since 1996
Banjapur

प्रश्न 4. $xy + y^2 = \tan x + y$

हल दिया है, $xy + y^2 = \tan x + y$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d}{dx}(xy+y^2)=\frac{d}{dx}(\tan x+y)$

$$\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} + y\cdot 1 + 2y\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx} \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \sec^2 x - y$$

$$\Rightarrow \quad (x+2y-1)\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x - y}{x+2y-1}$$

प्रश्न 5. $x^2 + xy + y^2 = 100$

हल दिया है, $x^2 + xy + y^2 = 100$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) = 0$

$$\Rightarrow \quad 2x + \left(x\frac{dy}{dx} + y\cdot 1\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(x+2y) = -2x - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+y)}{x+2y}$$

प्रश्न 6. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

हल दिया है, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d}{dx}(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = 81$

$$3x^2 + \frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(xy^2) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y(2x) + x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2\cdot 1 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + 2xy + 3y^2)\frac{dy}{dx} = -3x^2 - 2xy - y^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(3x^2 + 2xy + y^2)}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

प्रश्न 7. $\sin^2 y + \cos xy = k$

हल दिया है, $\sin^2 y + \cos xy = k$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 y + \cos xy) = \frac{d}{dx}(k) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sin^2 y) + \frac{d}{dx}(\cos xy) = 0$$

Durga Tutorial
Since 1996
Banjapur

$$\Rightarrow \quad 2\sin y\cos y\frac{dy}{dx} + (-\sin xy)\frac{d}{dx}(xy) = 0 \qquad \left[\because \frac{d}{dx}f\{g(x)\} = f'(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2y\frac{dy}{dx} - \sin xy\left(x\frac{dy}{dx} + y\cdot 1\right) = 0 \qquad (\because \sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2y\frac{dy}{dx} - x\sin xy\frac{dy}{dx} = y\sin xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y\sin(xy)}{\sin 2y - x\sin(xy)}$$

प्रश्न 8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

हल दिया है, $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 x + \cos^2 y) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2\sin x\cos x + 2\cos y\left(-\sin y\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \left[\because \frac{d}{dx}f\{g(x)\} = f'(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

$$\Rightarrow \quad -2\sin y\cos y\frac{dy}{dx} = -2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin 2x}{-\sin 2y} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y} \qquad (\because \sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x)$$

प्रश्न 9. $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

हल दिया है, $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$\theta = \tan^{-1}x$ अर्थात् $x = \tan\theta$ रखने पर,

तब, $$y = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x \qquad \left(\because \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \qquad \left(\because \frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}\right)$$

प्रश्न 10. $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

हल $\tan^{-1}x = \theta$ अर्थात् $x = \tan\theta$ रखने पर,

$$\therefore \quad y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right) \qquad \left(\because \tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$$

Durga Tutorial Since 1996 Banipur

$\Rightarrow \quad y = \tan^{-1}(\tan 3\theta) = 3\theta = 3\tan^{-1} x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{3}{1+x^2} \quad \left[\because \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}\right]$

निर्देश (प्र.सं. 11-15) x को एक त्रिकोणमितीय फलन मानकर पहले सरल कीजिए और बाद में अवकलन कीजिए।

प्रश्न 11. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

हल $\tan^{-1} x = \theta$ अर्थात् $x = \tan\theta$ रखने पर,

$\therefore \quad y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \quad \left(\because \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta\right)$

$\Rightarrow \quad y = \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1} x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{2}{1+x^2} \quad \left(\because \frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}\right)$

प्रश्न 12. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

हल $x = \tan\theta \Rightarrow \tan^{-1} x = \theta$ रखने पर,

$\therefore \quad y = \sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\cos 2\theta)$

$\Rightarrow \quad y = \sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right]$

$\Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} - 2\theta \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$

$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{2}{1+x^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1+x^2} \quad \left[\because \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}\right]$

Durga Tutorial Since 1996 Banjapur

प्रश्न 13. $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$

हल $x = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}x$ रखने पर,

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$\Rightarrow \quad y = \cos^{-1}(\sin 2\theta) \qquad \left(\because \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$\Rightarrow \quad y = \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right] \qquad \left[\because \sin 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right]$

$\Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} - 2\theta \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x \qquad (\because \theta = \tan^{-1}x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{2}{1+x^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1+x^2} \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}\right]$

प्रश्न 14. $y = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

हल $\sin^{-1}x = \theta$, तब $x = \sin\theta$ रखने पर,

$\therefore \quad y = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

$\Rightarrow \quad y = \sin^{-1}(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}) \qquad (\because 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta)$

$\Rightarrow \quad y = \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$\Rightarrow \quad y = 2\theta \quad \Rightarrow \quad y = 2\sin^{-1}x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\because \frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

प्रश्न 15. $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

हल $\cos^{-1}x = \theta$ तब $x = \cos\theta$ रखने पर,

$\therefore \quad y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta - 1}\right)$

Durga Tutorial Since 1996 Banjapur

$$\Rightarrow \quad y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right) \qquad (\because \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1)$$

$$\Rightarrow \quad y = \sec^{-1}(\sec 2\theta)$$

$$\Rightarrow \quad y = 2\theta \quad \Rightarrow \quad y = 2\cos^{-1} x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

प्रश्नावली 5.4

निर्देश (प्र.सं. 1–10) निम्नलिखित का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

प्रश्न 1. $\frac{e^x}{\sin x}$

इस प्रकार के प्रश्नों में निम्न भागफल नियम का प्रयोग करते हैं।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$$

हल मान लीजिए $y = \frac{e^x}{\sin x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{\sin x}\right) \qquad \left[\because \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}\right]$$

$$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}e^x - e^x \frac{d}{dx}\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x\, e^x - e^x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}, x \neq n\pi, n \in Z$$

निर्देश (प्र.सं. 2-5) श्रृंखला नियम का प्रयोग कीजिए।

प्रश्न 2. $e^{\sin^{-1} x}$

हल मान लीजिए $y = e^{\sin^{-1} x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sin^{-1} x}) = e^{\sin^{-1} x} \frac{d}{dx}\sin^{-1} x \qquad \left[\because \frac{d}{dx}e^{ax} = e^{ax}\frac{d}{dx}(ax)\right]$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$= e^{\sin^{-1}x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$$

$$\left[\because \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1) \text{ के लिए परिभाषित है}\right]$$

प्रश्न 3. e^{x^3}

हल मान लीजिए $y = e^{x^3}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{x^3}) = e^{x^3}\frac{d}{dx}(x^3) = e^{x^3}(3x^2) = 3x^2 e^{x^3} \quad \left[\because \frac{d}{dx}e^{ax} = e^{ax}\frac{d}{dx}(ax)\right]$$

प्रश्न 4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$

हल मान लीजिए $y = \sin(\tan^{-1}e^{-x})$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\sin(\tan^{-1}(e^{-x}))]$$

$$= \cos\{\tan^{-1}(e^{-x})\}\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(e^{-x})\} \quad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$= \cos\{\tan^{-1}(e^{-x})\}\frac{1}{1+(e^{-x})^2}\frac{d}{dx}(e^{-x})$$

$$= \cos(\tan^{-1}(e^{-x}))\frac{1}{1+e^{-2x}}\cdot(-e^{-x}) = -\frac{e^{-x}\cos(\tan^{-1}e^{-x})}{1+e^{-2x}}$$

प्रश्न 5. $\log(\cos e^x)$

हल मान लीजिए $y = \log(\cos e^x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\log\{\cos(e^x)\}] = \frac{1}{\cos(e^x)}\frac{d}{dx}\{\cos(e^x)\} \quad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$= \frac{1}{\cos(e^x)}\{-\sin(e^x)\}\frac{d}{dx}(e^x) \quad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$= -\tan(e^x).e^x = -e^x\tan(e^x)$$

प्रश्न 6. $e^x + e^{x^2} + \ldots + e^{x^5}$

हल मान लीजिए $y = e^x + e^{x^2} + \ldots + e^{x^5}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\{e^x + e^{x^2} + e^{x^3} + e^{x^4} + e^{x^5}\}$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$= \frac{d}{dx}(e^{x}) + \frac{d}{dx}(e^{x^2}) + \frac{d}{dx}(e^{x^3}) + \frac{d}{dx}(e^{x^4}) + \frac{d}{dx}(e^{x^5})$$

$$= e^{x} + e^{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) + e^{x^3}\frac{d}{dx}(x^3) + e^{x^4}\frac{d}{dx}(x^4) + e^{x^5}\frac{d}{dx}(x^5)$$

(शृंखला नियम से)

$$= e^{x} + e^{x^2}(2x) + e^{x^3}(3x^2) + e^{x^4}(4x^3) + e^{x^2}(5x^4)$$

$$= e^{x} + 2xe^{x^2} + 3x^2e^{x^3} + 4x^3e^{x^4} + 5x^4e^{x^5}$$

प्रश्न 7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$

$\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ को $(e^{\sqrt{x}})^{1/2}$ लिखकर $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ का प्रयोग कीजिए।

हल मान लीजिए $y = (e^{\sqrt{x}})^{1/2}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}.e^{\sqrt{x}}.\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$$

प्रश्न 8. $\log(\log x), x > 1$

हल मान लीजिए $y = \log(\log x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log(\log x)) = \frac{1}{\log x}\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}, x > 1$$

प्रश्न 9. $\frac{\cos x}{\log x}, x > 0$

चूँकि दिया गया फलन $\frac{u}{v}$ के रूप में है। अतः भागफल नियम का प्रयोग कीजिए।

हल मान लीजिए $y = \frac{\cos x}{\log x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\log x}\right), x > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\log x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(\log x)}{(\log x)^2} \qquad \left[\because \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}\right]$$

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\log x)(-\sin x) - (\cos x)\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x\sin x\log x + \cos x}{x(\log x)^2}, x > 0$$

प्रश्न 10. $\cos(\log x + e^x)$

हल मान लीजिए $y = \cos(\log x + e^x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\cos(\log x + e^x)\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\sin(\log x + e^x)\frac{d}{dx}(\log x + e^x) \quad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\sin(\log x + e^x)\left(\frac{1}{x} + e^x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(xe^x + 1)\sin(\log x + e^x)}{x}$$

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

प्रश्नावली 5.5

निर्देश (प्र.सं. 1–11) निम्नलिखित प्रश्नों में प्रदत्त फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

प्रश्न 1. $\cos x \cos 2x \cos 3x$

यहाँ गुणन नियम से अवकलन करना काफी कठिन है अतः $y = \cos x \cos 2x \cos 3x$ का लघुगणक लेकर सूत्र $\log(m \cdot n) = \log m + \log n$ का प्रयोग कीजिए।

हल मान लीजिए $y = \cos x \cos 2x \cos 3x$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log(\cos x \cos 2x \cos 3x) \quad (\because \log m \times n \times l = \log m + \log n + \log l)$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \log(\cos x) + \log(\cos 2x) + \log(\cos 3x)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\log(\cos x) + \frac{d}{dx}\log(\cos 2x) + \frac{d}{dx}\log(\cos 3x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) + \frac{1}{\cos 2x}\left(-\sin 2x\frac{d}{dx}(2x)\right) + \frac{1}{\cos 3x}\left(-\sin 3x \cdot \frac{d}{dx}(3x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\{-\tan x - 2\tan 2x - 3\tan 3x\}$$

$$= -y\{\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x\}$$

$$= -\cos x\cos 2x\cos 3x\{\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x\}$$

प्रश्न 2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेकर सूत्र $\log m^n = n\log m$, $\log(m\cdot n) = \log m + \log n$ तथा $\log\left(\dfrac{m}{n}\right) = \log m - \log n$ का प्रयोग कीजिए।

हल मान लीजिए $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}\right\}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}[\log(x-1)(x-2) - \log(x-3)(x-4)(x-5)]$$

$$= \frac{1}{2}\{\log(x-1) + \log(x-2) - \log(x-3) - \log(x-4) - \log(x-5)\}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\log(x-1) + \frac{d}{dx}\log(x-2) - \frac{d}{dx}\log(x-3) - \frac{d}{dx}\log(x-4) - \frac{d}{dx}\log(x-5)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-1}(1-0) + \frac{1}{x-2}(1-0) - \frac{1}{x-3}(1-0) - \frac{1}{x-4}(1-0) - \frac{1}{x-5}(1-0)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left\{\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left\{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5}\right\}$$

प्रश्न 3. $(\log x)^{\cos x}$

हल मान लीजिए $y = (\log x)^{\cos x}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log\{(\log x)^{\cos x}\}$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \cos x \log(\log x) \qquad (\because \log m^n = n\log m)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\cos x \log(\log x)\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x\,\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x} + \log(\log x)(-\sin x) \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(u\cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x\log(\log x)\right\} = (\log x)^{\cos x}\left\{\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x\log(\log x)\right\}$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 4. $x^x - 2^{\sin x}$

(i) मान लीजिए $u = x^x$ तथा $v = 2^{\sin x}$

(ii) $y = x^x - 2^{\sin x}$ को u, v के पदों में लिखकर x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

(iii) $\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का प्रयोग कीजिए।

हल मान लीजिए $y = x^x - 2^{\sin x}$

तथा मान लीजिए $u = x^x$ तथा $v = 2^{\sin x}$

$\therefore \quad y = u - v$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

अब, $u = x^x$ ...(i)

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$\Rightarrow \quad \log u = \log x^x$

$\Rightarrow \quad \log u = x \log x$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \frac{d}{dx}\log x + \log x \frac{d}{dx} x$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \times \frac{1}{x} + \log x$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 1 + \log x, \ \frac{du}{dx} = x^x(1+\log x)$

तथा $v = 2^{\sin x}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$\Rightarrow \quad \log v = \log(2^{\sin x})$

$\Rightarrow \quad \log v = (\sin x)\log 2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \cos x(\log 2)$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = v(\cos x \log 2) = 2^{\sin x}(\cos x \log 2)$

$\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का मान समी (i) में रखने पर,

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x) - 2^{\sin x}(\cos x \log 2)$$

Durga Tutorial
Since
Baniapur

प्रश्न 5. $(x+3)^2 (x+4)^3 (x+5)^4$

हल मान लीजिए $y = (x+3)^2 (x+4)^3 (x+5)^4$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log \{(x+3)^2 (x+4)^3 (x+5)^4\}$$

$$\Rightarrow \quad \log y = 2\log(x+3) + 3\log(x+4) + 4\log(x+5)$$

$[\because \log(lmn) = \log l + \log m + \log n]$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(\log y) = 2\frac{d}{dx}\log(x+3) + 3\frac{d}{dx}\log(x+4) + 4\frac{d}{dx}\log(x+5)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{x+3}\right)(1+0) + 3\left(\frac{1}{x+4}\right)(1+0) + 4\left(\frac{1}{x+5}\right)(1+0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\left\{\left(\frac{2}{x+3}\right) + \left(\frac{3}{x+4}\right) + \left(\frac{4}{x+5}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (x+3)^2 (x+4)^3 (x+5)^4 \left\{\left(\frac{2}{x+3}\right) + \left(\frac{3}{x+4}\right) + \left(\frac{4}{x+5}\right)\right\}$$

$$= (x+3)^2 (x+4)^3 (x+5)^4 \left[\frac{2(x+4)(x+5) + 3(x+3)(x+5) + 4(x+3)(x+4)}{(x+3)(x+4)(x+5)}\right]$$

$$= (x+3)(x+4)^2 (x+5)^3 [2(x^2+9x+20) + 3(x^2+8x+15) + 4(x^2+7x+12)]$$

$$= (x+3)(x+4)^2 (x+5)^3 (9x^2+70x+133)$$

प्रश्न 6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

हल मान लीजिए $y = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

पुनः मान लीजिए $u = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x$ तथा $v = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ $\therefore \quad y = u + v$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \ldots(i)$$

अब, $u = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\Rightarrow \quad \log u = \log\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$$

Durga Tutoria
Baniapur

$$\Rightarrow \quad \log u = x\log\left(x+\frac{1}{x}\right) \qquad (\because \log m^n = n\log m)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}\log\left(x+\frac{1}{x}\right)+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}(x) \qquad \text{(शृंखला नियम से).}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{x\times 1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\left[1-\frac{1}{x^2}\right]+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{x}{\frac{(x^2+1)}{x}}\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \left[\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)}+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] \Rightarrow \frac{du}{dx} = u\left[\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)}+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)}+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

अब, $\quad v = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\Rightarrow \quad \log v = \log x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \log v = \left(1+\frac{1}{x}\right)\log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}+\log x\left(0-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \left(\frac{x+1}{x^2}\right)-\frac{1}{x^2}\log x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \left(\frac{x+1-\log x}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = v\left(\frac{x+1-\log x}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\frac{x+1-\log x}{x^2}\right]$$

$\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का मान समी (i) में रखने पर,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{(x^2-1)}{(x^2+1)}+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]+x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\frac{x+1-\log x}{x^2}\right]$$

Guru Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 7. $(\log x)^x + x^{\log x}$

हल मान लीजिए $y = (\log x)^x + x^{\log x}$

तथा मान लीजिए $u = (\log x)^x$ तथा $v = x^{\log x}$

$\therefore \quad y = u + v$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \ldots(i)$$

अब, $u = (\log x)^x$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$\Rightarrow \quad \log u = \log (\log x)^x$

$\Rightarrow \quad \log u = x \log (\log x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}\log(\log x) + \log(\log x)\frac{d}{dx}(x)$ (शृंखला नियम से)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{x}{\log x} \times \frac{1}{x} + \log(\log x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = u\left[\frac{1}{\log x} + \log(\log x)\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = (\log x)^x\left[\frac{1}{\log x} + \log(\log x)\right]$

पुन: $v = x^{\log x}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$\Rightarrow \quad \log v = \log x^{\log x} \Rightarrow \log v = (\log x)(\log x)$

$\Rightarrow \quad \log v = (\log x)^2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = 2\log x\frac{d}{dx}(\log x) = 2\log x \times \frac{1}{x} \quad \left[\because \frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x)\frac{d}{dx}f(x)\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = v\left(\frac{2\log x}{x}\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = x^{\log x}\left(\frac{2\log x}{x}\right)$

$\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का मान समी (i) में रखने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (\log x)^x\left[\frac{1}{\log x} + \log(\log x)\right] + x^{\log x}\left[\frac{2\log x}{x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\log x)^{x-1}[1 + \log x \log(\log x)] + 2x^{\log x - 1} \cdot \log x$$

Durga Tutorial
Baniapur

प्रश्न 8. $(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$

हल मान लीजिए $y = (\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$

पुनः मान लीजिए $u = (\sin x)^x$ तथा $v = \sin^{-1}\sqrt{x}$

$\therefore \quad y = u + v$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \ldots(i)$$

अब, $u = (\sin x)^x$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log u = \log (\sin x)^x \Rightarrow \log u = x\log (\sin x)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}\log(\sin x) + \log(\sin x)\frac{d}{dx}(x) \quad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$= \frac{x}{\sin x}\cos x + \log(\sin x)$$

$$\frac{du}{dx} = u(x\cot x + \log \sin x)$$

$$= (\sin x)^x (x\cot x + \log \sin x)$$

पुनः $v = \sin^{-1}\sqrt{x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2}x^{-1/2} \quad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का मान समी (i) में रखने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^x (x\cot x + \log\sin x) + \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

प्रश्न 9. $x^{\sin x} + \sin x^{\cos x}$

मान लीजिए $u = x^{\sin x}$ तथा $v = (\sin x)^{\cos x}$ तथा $y = x^{\sin x} + \sin x^{\cos x}$ को u तथा v के पदों में लिखिए।

हल मान लीजिए $y = x^{\sin x} + (\sin x^{\cos x})$

तथा मान लीजिए $u = x^{\sin x}, v = \sin x^{\cos x}$

$\therefore$ $y = u + v$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \ldots(i)$$

अब, $u = x^{\sin x}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log u = (\sin x) \log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(\log u) = \sin x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(\sin x) \quad (\because \text{ गुणन नियम से })$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \left(\sin x \times \frac{1}{x} + \log x \cos x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right)$$

अब, $v = \sin x^{\cos x}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log v = \cos x \log(\sin x)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(\log v) = \cos x \frac{d}{dx}\log(\sin x) + \log \sin x \frac{d}{dx}\cos x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \left[\cos x \times \frac{1}{\sin x} \times \cos x + \log \sin x(-\sin x)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = v\,[\cot x \cos x - \sin x \log(\sin x)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \sin x^{\cos x}\,[\cot x \cos x - \sin x \log(\sin x)]$$

$\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का मान समी (i) में रखने पर,

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right] + \sin x^{\cos x}[\cot x \cos x - \sin x \log(\sin x)]$$

प्रश्न 10. $x^{x \cos x} + \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

हल मान लीजिए $y = x^{x \cos x} + \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

तथा मान लीलिए $u = x^{x\cos x}$ तथा $v = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\therefore$ $y = u + v$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

अब, $u = x^{x\cos x}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log u = x\cos x \log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(\log u) = x\cos x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{d}{dx}(x\cos x)$$

$$= x\cos x \times \frac{1}{x} + \log x\left[x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\cos x \times \frac{1}{x} + \log x\,[(-x\sin x) + \cos x]$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u\,(\cos x - x\sin x\log x + \cos x\log x)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = x^{x\cos x}\,(\cos x - x\sin x\log x + \cos x\log x)$$

पुनः $v = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log v = \log(x^2+1) - \log(x^2-1)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\log v = \frac{d}{dx}\log(x^2+1) - \frac{d}{dx}\log(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{(x^2+1)}\frac{d}{dx}(x^2+1) - \frac{1}{(x^2-1)}\frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{(x^2+1)} - \frac{2x}{(x^2-1)} = 2x\left[\frac{(x^2-1)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = v\left(\frac{-4x}{x^4-1}\right) = \frac{x^2+1}{x^2-1}\left(\frac{-4x}{x^4-1}\right)$$

$\dfrac{du}{dx}$ तथा $\dfrac{dv}{dx}$ का मान समी (i) में रखने पर,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = x^{x\cos x}\,(\cos x - x\sin x\log x + \cos x\log x) + \frac{x^2+1}{x^2-1}\left[\frac{-4x}{x^4-1}\right]$$

$$= x^{x\cos x}\,[\cos x\cdot(1+\log x) - x\sin x\log x] - \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

Durga Tutorial Baniapur

प्रश्न 11. $(x\cos x)^x + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

हल मान लीजिए $y = (x\cos x)^x + (x\sin x)^{1/x}$

तथा मान लीजिए $u = (x\cos x)^x$ तथा $v = (x\sin x)^{1/x}$

$\therefore \quad y = u + v$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \ldots(i)$$

अब, $u = (x\cos x)^x$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log u = x\log(x\cos x)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(\log u) = x\frac{d}{dx}\log(x\cos x) + \log(x\cos x)\frac{d}{dx}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \times \frac{1}{x\cos x}\frac{d}{dx}(x\cos x) + \log(x\cos x) \times 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos x}\left(x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}x\right) + \log(x\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos x}[x(-\sin x) + \cos x] + \log(x\cos x)$$

$$= \frac{1}{\cos x}[-x\sin x + \cos x] + \log(x\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = -x\tan x + 1 + \log(x\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u[-x\tan x + 1 + \log(x\cos x)]$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = (x\cos x)^x[-x\tan x + 1 + \log(x\cos x)]$$

अब, $v = (x\sin x)^{1/x}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log v = \frac{1}{x}\log(x\sin x)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{v}\frac{d}{dx}\log v = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\log x\sin x) + \log(x\sin x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x\sin x}\frac{d}{dx}(x\sin x)\right] + \log(x\sin x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Durga Tutorial Since Baniapur

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x\sin x}\left\{x\frac{d}{dx}\sin x+\sin x\frac{d}{dx}x\right\}\right]-\left(\frac{1}{x^2}\right)\log(x\sin x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{x\sin x}[x\cos x + \sin x] + \log\,(x\sin x)\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x\cos x}{x^2\sin x} + \frac{\sin x}{x^2\sin x} + \left(\frac{-1}{x^2}\right)\log x\sin x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = v\left[\frac{\cot x}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\log x\sin x\right] \Rightarrow \frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x\cot x + 1 - \log x\sin x}{x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = (x\sin x)^{1/x}\left(\frac{x\cot x + 1 - \log x\sin x}{x^2}\right)$$

$\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का मान समी (i) में रखने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (x\cos x)^x\,[-\,x\tan x + 1 + \log\,(x\cos x)] + (x\sin x)^{1/x}\left[\frac{x\cot x + 1 - \log x\sin x}{x^2}\right]$$

निर्देश (प्र.सं. 12-15) निम्नलिखित प्रश्नों में प्रदत्त फलनों के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 12. $x^y + y^x = 1$

हल दिया है, $x^y + y^x = 1$

मान लीजिए $u = x^y$ तथा $v = y^x$

$\therefore$ $u + v = 1$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0 \qquad \text{...(i)}$$

अब, $u = x^y$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर, $\log u = y\log x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = y \times \frac{1}{x} + \log x\frac{dy}{dx} \qquad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u\left(\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = x^y\left(\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \frac{du}{dx} = yx^{y-1} + x^y\cdot\log x\frac{dy}{dx}$$

अब, $v = y^x$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\Rightarrow \quad \log v = x\log y$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x \times \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y \qquad \text{(श्रृंखला नियम से)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = v\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = xy^{x-1}\frac{dy}{dx} + y^x \log y$$

$\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का मान समी (i) में रखने पर,

$$yx^{y-1} + x^y \cdot \log x\frac{dy}{dx} + xy^{x-1}\frac{dy}{dx} + y^x \log y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(x^y \log x + xy^{x-1}) = -y^x \log y - yx^{y-1} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^x \log y + yx^{y-1}}{x^y \log x + xy^{x-1}}$$

प्रश्न 13. $y^x = x^y$

हल दिया है, $\quad y^x = x^y$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y^x = \log x^y \quad \Rightarrow \quad x\log y = y\log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(x\log y) = \frac{d}{dx}(y\log x)$$

$$\Rightarrow \quad x\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} + (\log y) = y\frac{1}{x} + (\log x)\frac{dy}{dx} \qquad \text{(श्रृंखला नियम से)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} - (\log x)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \log y$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x}{y} - \log x\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \log y$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x - y\log x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y - x\log y}{x} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\frac{y - x\log y}{x - y\log x}\right)$$

प्रश्न 14. $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

हल दिया है, $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log \{(\cos x)^y\} = \log \{(\cos y)^x\} \text{ या } y\log(\cos x) = x\log(\cos y)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y\frac{d}{dx}(\log\cos x) + \log\cos x\frac{d}{dx}y = x\frac{d}{dx}(\log\cos y) + \log\cos y\frac{d}{dx}x \qquad \text{(गुणन नियम से)}$$

$$y\left(\frac{1}{\cos x}\right)(-\sin x) + \log(\cos x)\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{\cos y}\right)(-\sin y)\frac{dy}{dx} + \log(\cos y)1$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$\Rightarrow \quad \log(\cos x)\dfrac{dy}{dx} + x\tan y\dfrac{dy}{dx} = \log(\cos y) + y\tan x$

$\Rightarrow \quad [\log(\cos x) + x\tan y]\dfrac{dy}{dx} = \log(\cos y) + y\tan x$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log(\cos y) + y(\tan x)}{\log(\cos x) + x\tan y}$

प्रश्न 15. $xy = e^{(x-y)}$

हल दिया है, $xy = e^{(x-y)}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(e^{x-y}) \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} + y\cdot 1 = e^{x-y}\frac{d}{dx}(x-y)$$

$\Rightarrow \quad x\dfrac{dy}{dx} + y = e^{x-y}\left(1 - \dfrac{dy}{dx}\right)$

$\Rightarrow \quad x\dfrac{dy}{dx} + e^{x-y}\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} - y \Rightarrow (x + e^{x-y})\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} - y$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{x-y} - y}{x + e^{x-y}} = \dfrac{xy - y}{x + xy} = \dfrac{y(x-1)}{x(1+y)} \quad (\because e^{x-y} = xy$ दिया है)

प्रश्न 16. $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ **द्वारा प्रदत्त फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए और इस प्रकार $f'(1)$ ज्ञात कीजिए।**

दोनों तरफ का लघुगणक लेकर सूत्र $\log(mn) = \log m + \log n$ का प्रयोग करके अवकलन कीजिए।

हल दिया है, $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log(f(x)) = \log\{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\}$$

$\Rightarrow \quad \log(f(x)) = \log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \log(1+x^8)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\log(f(x)) = \frac{d}{dx}\log(1+x) + \frac{d}{dx}\log(1+x^2) + d/dx\log(1+x^4) + d/dx\log(1+x^8)$$

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{1}{1+x}(1+0) + \frac{1}{1+x^2}(0+2x) + \frac{1}{1+x^4}(0+4x^3) + \frac{1}{1+x^8}(0+8x^7)$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = f(x)\left\{\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{4x^3}{1+x^4} + \dfrac{8x^7}{1+x^8}\right\}$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left\{\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right\}$$

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

$\therefore \quad f'(1) = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1)\left\{\frac{1}{1+1} + \frac{2}{1+1} + \frac{4}{1+1} + \frac{8}{1+1}\right\}$

$$= 2^4\left\{\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4\right\} = 16\left(\frac{15}{2}\right) = 120$$

प्रश्न 17. $(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$ **का अवकलन निम्नलिखित तीन प्रकार से कीजिए**

(i) गुणनफल नियम का प्रयोग करके

(ii) गुणनफल के विस्तारण द्वारा एक एकल बहुपद प्राप्त करके

(iii) लघुगणकीय अवकलन द्वारा

यह भी सत्यापित कीजिए कि इस प्रकार प्राप्त तीनों उत्तर समान हैं।

हल मान लीजिए $y = (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$ ...(i)

(i) गुणनफल नियम के प्रयोग से

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 5x + 8)\frac{d}{dx}(x^3 + 7x + 9) + (x^3 + 7x + 9)\frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 8)$$

$$= (x^2 - 5x + 8)(3x^2 + 7) + (x^3 + 7x + 9)(2x - 5)$$

$$= 3x^4 - 15x^3 + 24x^2 + 7x^2 - 35x + 56 + 2x^4 + 14x^2 + 18x - 5x^3 - 35x - 45$$

$$= 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11 \quad \text{...(ii)}$$

(ii) y को x के पक्षों में लिखने पर,

$$y = (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9) = x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 26x^2 + 11x + 72$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 26x^2 + 11x + 72)$$

$$= 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11 \quad \text{...(iii)}$$

(iii) समी (i) के दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log\{(x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)\}$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \log(x^2 - 5x + 8) + \log(x^3 + 7x + 9)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 - 5x + 8}\frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 8) + \frac{1}{x^3 + 7x + 9}\frac{d}{dx}(x^3 + 7x + 9)$$

(श्रृंखला नियम से)

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 8} + \frac{3x^2 + 7}{x^3 + 7x + 9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 8} + \frac{3x^2 + 7}{x^3 + 7x + 9}\right)$$

Durga Tutorial Since Banjapur

$$= (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)\left(\frac{2x-5}{x^2-5x+8} + \frac{3x^2+7}{x^3+7x+9}\right)$$

$$= (2x-5)(x^3+7x+9) + (3x^2+7)(x^2-5x+8)$$

$$= 2x^4 + 14x^2 + 18x - 5x^3 - 35x - 45 + 3x^4$$
$$- 15x^3 + 24x^2 + 7x^2 - 35x + 56$$

$$= 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11 \quad \ldots(iv)$$

समी (ii) (iii) तथा (iv) से स्पष्ट है कि प्रत्येक दशा में परिणाम समान है।

प्रश्न 18. यदि u, v तथा w, x के फलन हैं, तो दो विधियों अर्थात् प्रथम गुणनफल नियम की पुनरावृति द्वारा, द्वितीय लघुगणकीय अवकलन द्वारा दर्शाइए कि

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v \cdot w) = \frac{du}{dx} v \cdot w + u \cdot \frac{dv}{dx} \cdot w + u \cdot v \frac{dw}{dx}$$

हल गुणनफल नियम के प्रयोग से,

$$\frac{d}{dx}(uvw) = \frac{d}{dx}\{(uv)w\} = (uv)\frac{dw}{dx} + w\frac{d}{dx}(uv)$$

(uv को एक फलन तथा w को दूसरा फलन माना गया है)

$$= uv\frac{dw}{dx} + w\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)$$

$$= uv\frac{dw}{dx} + wu\frac{dv}{dx} + wv\frac{du}{dx} \quad \ldots(i)$$

मान लीजिए $y = uvw$ दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$\Rightarrow$ $\log y = \log(uvw)$

$\Rightarrow$ $\log y = \log u + \log v + \log w$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx}\right\}$$

$$= (uvw)\left\{\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx}\right\}$$

$$= (vw)\frac{du}{dx} + (uw)\frac{dv}{dx} + (uv)\frac{dw}{dx}$$

$$= uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + wv\frac{du}{dx} \quad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से स्पष्ट है कि दोनों दशा में परिणाम समान हैं।

Durga Tutorial Since Baniapur

प्रश्नावली 5.6

निर्देश (प्र. सं. 1-10) निम्नलिखित प्रश्नों में x तथा y दिए समीकरणों द्वारा, एक-दूसरे से प्राचलित रूप में संबंधित हों, तो प्राचलों का विलोपन किए बिना $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $x = 2at^2,\ y = at^4$

सबसे पहले x तथा y दोनों को t के सापेक्ष अवकलन कीजिए। और तब $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ का प्रयोग कीजिए।

हल दिया है, $x = 2at^2$ तथा $y = at^4$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = (2a)(2t) \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = a(4t^3)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \qquad \left(\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$$

$$= \frac{4at^3}{4at} = \frac{t^3}{t} = t^2$$

प्रश्न 2. $x = a\cos\theta,\ y = b\cos\theta$

हल दिया है, $x = a\cos\theta$ तथा $y = b\cos\theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta) \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta} = b(-\sin\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{-b\sin\theta}{-a\sin\theta} = \frac{b}{a} \qquad \left(\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$$

प्रश्न 3. $x = \sin t,\ y = \cos 2t$

हल दिया है, $x = \sin t$ तथा $y = \cos 2t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \cos t \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = -(\sin 2t)2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \qquad \left(\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$$

$$= \frac{-2\sin 2t}{\cos t} = \frac{-2\,(2\sin t \cos t)}{\cos t} = -4\sin t \qquad (\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta)$$

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

प्रश्न 4. $x = 4t,\ y = \frac{4}{t}$

हल दिया है, $x = 4t$ तथा $y = \frac{4}{t}$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = 4 \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = 4(-1)t^{-2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4t^{-2}}{4} = -\frac{1}{t^2} \qquad \left(\because \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$$

प्रश्न 5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta,\ y = \sin\theta - \sin 2\theta$

हल दिया है, $x = \cos\theta - \cos 2\theta$ तथा $y = \sin\theta - \sin 2\theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta - \cos 2\theta)$$

$$= -\sin\theta - (-\sin 2\theta)2 = -\sin\theta + 2\sin 2\theta$$

$$\text{तथा} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\sin\theta - \sin 2\theta)$$

$$= \cos\theta - (\cos 2\theta)2 = \cos\theta - 2\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos\theta - 2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta - \sin\theta}$$

प्रश्न 6. $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 + \cos\theta)$

हल दिया है, $x = a(\theta - \sin\theta)$ तथा $y = a(1 + \cos\theta)$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} a(\theta - \sin\theta) = a(1 - \cos\theta)$$

$$\text{तथा} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} a(1 + \cos\theta) = a(0 - \sin\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{-a\sin\theta}{a(1 - \cos\theta)} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{array}\right)$$

Durga Tutorial 1996 Banjapur

प्रश्न 7. $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cot 2t}}, y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

चूँकि दोनों x तथा y, $\frac{u}{v}$ के रूप में हैं

(i) अत: $\frac{dx}{dt}$ तथा $\frac{dy}{dt}$ ज्ञात कीजिए तथा $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ का प्रयोग कीजिए।

(ii) अब, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$ का प्रयोग कीजिए।

हल दिया है, $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ तथा $y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}\right) = \frac{\sqrt{\cos 2t}\,(3\sin^2 t \cos t) - \sin^3 t\left(\frac{-2\sin 2t}{2\sqrt{\cos 2t}}\right)}{(\sqrt{\cos 2t})^2}$$

$$\left(\text{भागफल नियम से, } \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}\right)$$

$$= \frac{3(\cos 2t)\sin^2 t \cos t + \sin 2t \sin^3 t}{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}$$

$$= \frac{3(1 - 2\sin^2 t)\sin^2 t \cos t + (2\sin t \cos t)\sin^3 t}{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}$$

$$(\because \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \text{ तथा } \sin 2t = 2\sin t \cos t)$$

$$= \frac{3\sin^2 t \cos t - 4\sin^4 t \cos t}{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}$$

तथा
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}\right) = \frac{\sqrt{\cos 2t}\,(-3\cos^2 t \sin t) - \cos^3 t\left(\frac{-2\sin 2t}{2\sqrt{\cos 2t}}\right)}{(\sqrt{\cos 2t})^2}$$

(भागफल नियम से)

$$= \frac{-3(\cos 2t)\cos^2 t \sin t + \sin 2t \cos^3 t}{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}$$

$$= \frac{-3(2\cos^2 t - 1)\cos^2 t \sin t + \cos^3 t(2\sin t \cos t)}{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}} \quad \left(\because \begin{array}{l}\cos 2t = 2\cos^2 t - 1\\ \sin 2t = 2\sin t \cos t\end{array}\right)$$

$$= \frac{3\cos^2 t \sin t - 4\cos^4 t \sin t}{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}$$

Durga Tutorial
Baniapur

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{3\cos^2 t \sin t - 4\cos^4 t \sin t}{3\sin^2 t \cos t - 4\sin^4 t \cos t}$$

$$= \frac{\cos^2 t \sin t (3 - 4\cos^2 t)}{\sin^2 t \cos t\,(3 - 4\sin^2 t)} = \frac{\cos t\,(3 - 4\cos^2 t)}{\sin t\,(3 - 4\sin^2 t)}$$

$$= \frac{3\cos t - 4\cos^3 t}{3\sin t - 4\sin^3 t} = \frac{-\cos 3t}{\sin 3t} = -\cot 3t \qquad \left(\because \begin{array}{l} \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t \\ \sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t \end{array}\right)$$

प्रश्न 8. $x = a\left(\cos t + \log \tan\frac{t}{2}\right), y = a\sin t$

हल दिया है, $x = a\left(\cos t + \log \tan\frac{t}{2}\right)$ तथा $y = a\sin t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = a\left\{-\sin t + \frac{1}{\tan\frac{t}{2}}.\sec^2\frac{t}{2}.\frac{1}{2}\right\} \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}\right]$$

$$= a\left\{-\sin t + \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right\}$$

$$= a\left\{-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right\} = a\left\{\frac{1 - \sin^2 t}{\sin t}\right\} \qquad \left(\because \sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t} \qquad (\because 1 - \sin^2 t = \cos^2 t) \qquad \ldots(i)$$

पुनः $\quad y = a\sin t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a\cos t \qquad \ldots(ii)$

समी (i) तथा (ii) से,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{\frac{a\cos^2 t}{\sin t}} = \tan t$$

प्रश्न 9. $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta$

हल दिया है, $x = a\sec\theta$ तथा $y = b\tan\theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta} = b\sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta} = \frac{b}{a}\left(\frac{\sec\theta}{\tan\theta}\right) = \frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$$

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

प्रश्न 10. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

हल दिया है, $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$ तथा $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\theta} = a\frac{d}{d\theta}(\cos\theta + \theta\sin\theta) = a\left\{\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) + \frac{d}{d\theta}(\theta\sin\theta)\right\}$$

$$= a\{-\sin\theta + (\theta\cos\theta + \sin\theta \cdot 1)\} = a\theta\cos\theta \quad \left[\text{गुणन नियम से } \frac{d}{d\theta}(\theta\sin\theta)\right]$$

तथा
$$\frac{dy}{d\theta} = a\frac{d}{d\theta}(\sin\theta - \theta\cos\theta) = a\left\{\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) - \frac{d}{d\theta}(\theta\cos\theta)\right\}$$

$$= a[\cos\theta - \{\theta(-\sin\theta) + \cos\theta \cdot 1\}] = a\theta\sin\theta \quad \left[\text{गुणन नियम से } \frac{d}{d\theta}(\theta\cos\theta)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

प्रश्न 11. यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

हल दिया है, $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$ तथा $y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$

अर्थात् $x = a^{\frac{1}{2}\sin^{-1}t}$ तथा $y = a^{\frac{1}{2}\cos^{-1}t}$ $\quad [\because (a^b)^c = a^{bc}]$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = a^{\frac{1}{2}\sin^{-1}t}\log a\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}t\right) \quad \left(\because \frac{d}{dx}a^x = a^x\log a\right)$$

$$= a^{\frac{1}{2}\sin^{-1}t}\log a\left(\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{a^{\frac{1}{2}\sin^{-1}t}\log a}{2\sqrt{1-t^2}}$$

तथा
$$\frac{dy}{dt} = a^{\frac{1}{2}\cos^{-1}t}\log a\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}t\right) \quad (\text{शृंखला नियम से})$$

$$= a^{\frac{1}{2}\cos^{-1}t}\log a\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{-a^{\frac{1}{2}\cos^{-1}t}\log a}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-a^{\frac{1}{2}\cos^{-1}t}}{a^{\frac{1}{2}\sin^{-1}t}} = -\frac{\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}}{\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}} = -\frac{y}{x}$$

वैकल्पिक विधि $\quad x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log x = \log(a^{\sin^{-1}t})^{1/2} \Rightarrow \log x = \frac{1}{2}\log a\sin^{-1}t$$

प्रश्न 10. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

हल दिया है, $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$ तथा $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\theta} = a\frac{d}{d\theta}(\cos\theta + \theta\sin\theta) = a\left\{\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) + \frac{d}{d\theta}(\theta\sin\theta)\right\}$$

$$= a\{-\sin\theta + (\theta\cos\theta + \sin\theta\cdot 1)\} = a\theta\cos\theta \qquad \left[\text{गुणन नियम से } \frac{d}{d\theta}(\theta\sin\theta)\right]$$

$$\text{तथा} \quad \frac{dy}{d\theta} = a\frac{d}{d\theta}(\sin\theta - \theta\cos\theta) = a\left\{\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) - \frac{d}{d\theta}(\theta\cos\theta)\right\}$$

$$= a[\cos\theta - \{\theta(-\sin\theta) + \cos\theta\cdot 1\}] = a\theta\sin\theta \qquad \left[\text{गुणन नियम से } \frac{d}{d\theta}(\theta\cos\theta)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

प्रश्न 11. यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$, $y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

हल दिया है, $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$ तथा $y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$

अर्थात् $x = a^{\frac{1}{2}\sin^{-1}t}$ तथा $y = a^{\frac{1}{2}\cos^{-1}t}$ $\qquad [\because (a^b)^c = a^{bc}]$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = a^{\frac{1}{2}\sin^{-1}t}\log a\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}t\right) \qquad \left(\because \frac{d}{dx}a^x = a^x\log a\right)$$

$$= a^{\frac{1}{2}\sin^{-1}t}\log a\left(\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{a^{\frac{1}{2}\sin^{-1}t}\log a}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\text{तथा} \quad \frac{dy}{dt} = a^{\frac{1}{2}\cos^{-1}t}\log a\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}t\right) \qquad (\text{शृंखला नियम से})$$

$$= a^{\frac{1}{2}\cos^{-1}t}\log a\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{-a^{\frac{1}{2}\cos^{-1}t}\log a}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-a^{\frac{1}{2}\cos^{-1}t}}{a^{\frac{1}{2}\sin^{-1}t}} = -\frac{\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}}{\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}} = -\frac{y}{x}$$

वैकल्पिक विधि $\quad x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log x = \log(a^{\sin^{-1}t})^{1/2} \Rightarrow \log x = \frac{1}{2}\log a\sin^{-1}t$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$\Rightarrow \qquad \log x = \frac{1}{2}\sin^{-1}t\log a \quad \Rightarrow \quad \log x = \frac{1}{2}\log a\sin^{-1}t$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\log a\frac{d}{dt}(\sin^{-1}t) = \frac{1}{2}\log a\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{x\log a}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

पुनः $\qquad y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log\left(a^{\cos^{-1}t}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \qquad \log y = \frac{1}{2}\log a^{\cos^{-1}t} \quad \Rightarrow \quad \log y = \frac{1}{2}\cos^{-1}t\log a$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\log a\times\left(\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{y\log a}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

हम जानते हैं कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y\log a}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\times\frac{2\times\sqrt{1-t^2}}{x\log a}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

वैकल्पिक विधि $\qquad x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}} \qquad \ldots(i)$

तथा $\qquad y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}} \qquad \ldots(ii)$

समी (i) तथा (ii) की गुणा करने पर,

$$\Rightarrow \qquad xy = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}\times\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$$

$$\Rightarrow \qquad xy = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}\cdot a^{\cos^{-1}t}}$$

$$\Rightarrow \qquad xy = \sqrt{a^{\sin^{-1}t+\cos^{-1}t}} \qquad \left(\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad xy = \sqrt{a^{\frac{\pi}{2}}}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \qquad \left[\frac{d}{dx}(\text{अचर}) = 0\right]$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्नावली 5.7

निर्देश (प्र.सं. 1-10) निम्नलिखित प्रश्नों में दिए गए फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $x^2 + 3x + 2$

हल मान लीजिए $y = x^2 + 3x + 2,$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x + 3) = 2$

प्रश्न 2. x^{20}

हल मान लीजिए $y = x^{20}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 20x^{19}$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(20x^{19}) = 20(19x^{18}) = 380x^{18}$$

प्रश्न 3. $x\cos x$

हल मान लीजिए $y = x\cos x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x\cos x) = x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x(-\sin x) + \cos x \cdot 1 = -x\sin x + \cos x \qquad \left(\because \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-x\sin x + \cos x) = -\frac{d}{dx}(x\sin x) + \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= -\{x\cos x + \sin x \cdot 1\} - \sin x = -x\cos x - 2\sin x$$ (गुणन नियम से)

प्रश्न 4. $\log x$

हल मान लीजिए $y = \log x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 5. $x^3 \log x$

हल मान लीजिए $y = x^3 \log x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \log x) = x^3 \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$= x^3 \left(\frac{1}{x}\right) + (\log x)(3x^2) = x^2(1 + 3\log x) \qquad \text{(गुणन नियम से)}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\{x^2(1 + 3\log x)\} = x^2\left(0 + \frac{3}{x}\right) + (1 + 3\log x)(2x)$$

$$= 3x + 2x(1 + 3\log x) = x(5 + 6\log x)$$

प्रश्न 6. $e^x \sin 5x$

हल मान लीजिए $y = e^x \sin 5x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \sin 5x) = e^x \frac{d}{dx}(\sin 5x) + \sin 5x \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= e^x \cos 5x \cdot 5 + \sin 5x\, e^x \qquad \text{(गुणन नियम से)}$$

$$= e^x(5\cos 5x + \sin 5x)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\{e^x(5\cos 5x + \sin 5x)\}$$

$$= e^x \frac{d}{dx}(5\cos 5x + \sin 5x) + (5\cos 5x + \sin 5x)\frac{d}{dx}e^x$$

$$= e^x(-5\sin 5x \cdot 5 + \cos 5x \cdot 5) + (5\cos 5x + \sin 5x)\, e^x$$

$$= e^x(10\cos 5x - 24\sin 5x) = 2e^x(5\cos 5x - 12\sin 5x)$$

प्रश्न 7. $e^{6x} \cos 3x$

हल मान लीजिए $y = e^{6x} \cos 3x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{6x} \cos 3x) = e^{6x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) + \cos 3x \frac{d}{dx}(e)^{6x}$$

$$= e^{6x}(-\sin 3x \cdot 3) + (\cos 3x)\, e^{6x} \cdot 6$$

$$= e^{6x}(-3\sin 3x + 6\cos 3x)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\{e^{6x}(-3\sin 3x + 6\cos 3x)\}$

Durga Tutorial
1996
Banjapur

$$= e^{6x}\frac{d}{dx}(-3\sin 3x + 6\cos 3x) + (-3\sin 3x + 6\cos 3x)\frac{d}{dx}e^{6x}$$

$$= e^{6x}(-3\cos 3x \cdot 3 - 6\sin 3x \cdot 3) + (-3\sin 3x + 6\cos 3x)e^{6x} \cdot 6$$

$$= e^{6x}(-9\cos 3x - 18\sin 3x - 18\sin 3x + 36\cos 3x)$$

$$= e^{6x}(27\cos 3x - 36\sin 3x)$$

$$= 9e^{6x}(3\cos 3x - 4\sin 3x)$$

प्रश्न 8. $\tan^{-1} x$

हल मान लीजिए $y = \tan^{-1} x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{d}{dx}(1+x^2)^{-1} = -1(1+x^2)^{-2}\frac{d}{dx}(1+x^2)$$

$$= -1(1+x^2)^{-2}(0+2x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

प्रश्न 9. $\log(\log x)$

हल मान लीजिए $y = \log(\log x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log x}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\log x}\right) = \frac{d}{dx}(x\log x)^{-1}$

$$= -1(x\log x)^{-2}\frac{d}{dx}(x\log x)$$

$$= -\frac{1}{(x\log x)^2}\left[x\frac{d}{dx}\log x + \log x\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$= \frac{-1}{(x\log x)^2}\left(x.\frac{1}{x} + \log x \cdot 1\right) = \frac{-(1+\log x)}{(x\log x)^2}$$

प्रश्न 10. $\sin(\log x)$

हल मान लीजिए $y = \sin(\log x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\log x)\frac{d}{dx}(\log x) = \cos(\log x)\frac{1}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$=e^{6x}\frac{d}{dx}(-3\sin 3x+6\cos 3x)+(-3\sin 3x+6\cos 3x)\frac{d}{dx}e^{6x}$$

$$=e^{6x}(-3\cos 3x\cdot 3-6\sin 3x\cdot 3)+(-3\sin 3x+6\cos 3x)e^{6x}\cdot 6$$

$$=e^{6x}(-9\cos 3x-18\sin 3x-18\sin 3x+36\cos 3x)$$

$$=e^{6x}(27\cos 3x-36\sin 3x)$$

$$=9e^{6x}(3\cos 3x-4\sin 3x)$$

प्रश्न 8. $\tan^{-1}x$

हल मान लीजिए $y=\tan^{-1}x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{d}{dx}(1+x^2)^{-1}=-1(1+x^2)^{-2}\frac{d}{dx}(1+x^2)$$

$$=-1(1+x^2)^{-2}(0+2x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

प्रश्न 9. $\log(\log x)$

हल मान लीजिए $y=\log(\log x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log x}\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\log x}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\log x}\right)=\frac{d}{dx}(x\log x)^{-1}$

$$=-1(x\log x)^{-2}\frac{d}{dx}(x\log x)$$

$$=-\frac{1}{(x\log x)^2}\left[x\frac{d}{dx}\log x+\log x\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$=\frac{-1}{(x\log x)^2}\left(x.\frac{1}{x}+\log x\cdot 1\right)=\frac{-(1+\log x)}{(x\log x)^2}$$

प्रश्न 10. $\sin(\log x)$

हल मान लीजिए $y=\sin(\log x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\cos(\log x)\frac{d}{dx}(\log x)=\cos(\log x)\frac{1}{x}=\frac{\cos(\log x)}{x}$$

Durga Tutorial Baniapur

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(\log x)}{x}\right] = \frac{x\frac{d}{dx}\{\cos(\log x)\} - \cos(\log x)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\left\{-\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x}\right\} - \cos(\log x)\cdot 1}{x^2} \quad \text{(भागफल नियम से)}$$

$$= -\frac{\sin(\log x) + \cos(\log x)}{x^2}$$

प्रश्न 11. यदि $y = 5\cos x - 3\sin x$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

हल दिया है, $y = 5\cos x - 3\sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = -5\sin x - 3\cos x$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-5\sin x - 3\cos x) = -5\cos x + 3\sin x = -(5\cos x - 3\sin x) = -y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

प्रश्न 12. यदि $y = \cos^{-1}x$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ को केवल y के पदों में ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $y = \cos^{-1}x \Rightarrow x = \cos y$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} y \quad \ldots(i)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} y) = -(-\operatorname{cosec} y \cot y)\frac{dy}{dx}$$

$$= \operatorname{cosec} y \cot y(-\operatorname{cosec} y) = -\cot y.\operatorname{cosec}^2 y \quad \text{[समी (i) से]}$$

प्रश्न 13. यदि $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ है, तो दर्शाइए कि $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

हल दिया है, $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x) \quad \ldots(i)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = y_1 = -3\sin(\log x)\frac{d}{dx}(\log x) + 4\cos(\log x)\frac{d}{dx}\log x$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$= -3\sin(\log x)\frac{1}{x} + 4\cos(\log x)\frac{1}{x} \qquad \left(\because \frac{dy}{dx} = y_1\right)$$

x से गुणा करने पर, $xy_1 = -3\sin(\log x) + 4\cos(\log x)$ ...(ii)

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$xy_2 + y_1 \cdot 1 = -3\cos(\log x)\frac{d}{dx}(\log x) - 4\sin(\log x)\frac{d}{dx}\log x$$

$$= -3\cos(\log x)\frac{1}{x} - 4\sin(\log x)\frac{1}{x}$$

x से गुणा करने पर,

$$x^2 y_2 + xy_1 = -[3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)]$$ [समी (i) से]

$\Rightarrow$ $$x^2y_2 + xy_1 = -y$$

$\Rightarrow$ $$x^2y_2 + xy_1 + y = 0$$

प्रश्न 14. यदि $y = A\,e^{mx} + B\,e^{nx}$ है, तो दर्शाइए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$$

हल दिया है, $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = Ae^{mx}\frac{d}{dx}(mx) + Be^{nx}\frac{d}{dx}(nx) = Ae^{mx}m + Be^{nx}n$$ ...(ii)

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2Ae^{mx} + n^2Be^{nx}$$ ...(iii)

समी (i), (ii) तथा (iii) के प्रयोग से

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny$$

$$= m^2Ae^{mx} + n^2Be^{nx} - (m+n)\{Ame^{mx} + nBe^{nx}\}$$

$$+ mn\{Ae^{mx} + Be^{nx}\}$$

अर्थात् $$\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$$

प्रश्न 15. यदि $y = 500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x}$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 49\,y$

हल दिया है, $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 500e^{7x}\frac{d}{dx}(7x) + 600e^{-7x}\frac{d}{dx}(-7x)$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$$= 500e^{7x} \cdot 7 + 600e^{-7x} \cdot (-7)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (7 \times 500)e^{7x} \cdot 7 - (7 \times 600)e^{-7x}(-7)$$

$$= 49(500e^{7x} + 600e^{-7x}) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 49y$$

प्रश्न 16. यदि $e^y(x+1) = 1$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

हल दिया है, $e^y(x+1) = 1$ ...(i)

$\Rightarrow$ $e^y = \frac{1}{x+1}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$e^y \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{x+1}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)^2}$ $\left(\because e^y = \frac{1}{x+1}\right)$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}$ ...(ii)

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{या} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(-\frac{1}{x+1}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Durga Tutorial Baniapur

प्रश्न 17. यदि $y = (\tan^{-1}x)^2$ है, तो दर्शाइए कि $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 = 2$

हल दिया है, $y = (\tan^{-1}x)^2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2\tan^{-1}x \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = 2(\tan^{-1}x)\frac{1}{1+x^2}$$

$\Rightarrow$ $(1+x^2)y_1 = 2\tan^{-1}x$ $\left(\because \frac{dy}{dx} = y_1\right)$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$(1+x^2)\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{d}{dx}(1+x^2) = \frac{2}{1+x^2}$$

$\Rightarrow$ $(1+x^2)y_2 + y_1(0+2x) = \frac{2}{1+x^2}$

$\Rightarrow$ $(1+x^2)^2 y_2 + 2x(1+x^2)y_1 = 2$ $\left[\because \frac{d}{dx}(y_1) = y_2\right]$

प्रश्नावली 5.8

प्रश्न 1. फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8,\ x \in [-4, 2]$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

(प्र. सं. 1-2) में, मान लीजिए $f : [a, b] \to R$ संवृत्त अंतराल $[a, b]$ में सतत् तथा विवृत अंतराल (a, b) में अवकलनीय है और $f(a) = f(b)$ है जहाँ a तथा b कोई वास्तविक संख्याएँ हैं, तब विवृत अंतराल (a, b) में किसी ऐसे c का अस्तित्व है कि $f'(c) = 0$ है।

हल दिया है, $f(x) = x^2 + 2x - 8,\ x \in [-4, 2]$

चूँकि एक बहुपदी फलन, प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् तथा अवकलनीय होता है। अतः

(i) $f(x)$, अंतराल $[-4, 2]$ में सतत् है।

(ii) $f(x)$, अंतराल $(-4, 2)$ में अवकलनीय है।

पुनः $f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) - 8 = 0$ $[\because f(x) = x^2 + 2x - 8]$

तथा $f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 8 = 0$ $[\because f(x) = x^2 + 2x - 8]$

अतः अंतराल $[-4, 2]$ में फलन $f(x)$, रोले प्रमेय की समस्त शर्तों को पूरा करता है।

अतः $[-4, 2]$ में एक c का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f'(c) = 0$$

यहाँ, $f(x) = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(c) = 0$

$\Rightarrow$ $2c + 2 = 0 \Rightarrow c = -1$

अतः $f'(-1) = 0$ तथा $-1 \in [-4, 2]$

अतः रोले प्रमेय सिद्ध हुई।

प्रश्न 2. जाँच कीजिए कि क्या रोले की प्रमेय निम्नलिखित फलनों में से किन-किन पर लागू होती है? इन उदाहरणों से क्या आप रोले के प्रमेय के विलोम के बारे में कुछ कह सकते हैं?

(i) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [5, 9]$ (ii) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [-2, 2]$

(iii) $f(x) = x^2 - 1$ के लिए $x \in [1, 2]$

महत्तम पूर्णांक फलन, पूर्णांक बिंदुओं पर अवकलनीय नहीं होता है।

हल (i) दिया गया फलन $f(x) = [x],\ \forall x \in [5, 9]$

चूँकि $f(x)$, पूर्णांक बिंदुओं पर न तो सतत् है न ही अवकलनीय है। अतः $f(x)$, अंतराल $[5, 9]$ में बिंदुओं 5, 6, 7, 8, 9 पर सातंत्य नहीं है और इसीलिए अवकलनीय नहीं है। अतः $f(x)$, रोले प्रमेय की पुष्टि नहीं करता है।

पुनः प्रत्येक अपूर्णांकीय बिंदु $x \in (5, 9)$ के लिए $f'(x) = 0$ है। अतः रोले प्रमेय का उल्टा भी सत्य नहीं है।

(ii) दिया गया फलन $f(x) = [x],\ x \in [-2, 2]$

चूँकि $f(x)$, अंतराल $[-2, 2]$ के बिंदु $-2, -1, 0, 1, 2$ पर न तो सतत् है न ही अवकलनीय है। अतः अंतराल $[-2, 2]$ में $f(x)$ रोल प्रमेय की पुष्टि नहीं करता है।

Durga Tutorial Since Baniapur

(iii) दिया गया फलन $f(x) = x^2 - 1$

जो एक बहुपदी है अतः प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् तथा अवकलनीय है। विशेषतः $f(x)$, अंतराल $[1, 2]$ में सतत् तथा अंतराल $(1, 2)$ में अवकलनीय है लेकिन

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0 \text{ तथा } f(2) = 2^2 - 1 = 3$$

अर्थात् $f(1) \neq f(2)$

अतः अंतराल $[1, 2]$ में फलन $f(x)$, रोले प्रमेय की पुष्टि नहीं करता है। पुनः

$$f'(x) = 2x \neq 0, \forall x \in (1, 2)$$

प्रश्न 3. यदि $f : [-5, 5] \rightarrow R$ एक सतत् फलन है और यदि $f'(x)$ किसी भी बिंदु पर शून्य नहीं होता है, तो सिद्ध कीजिए कि $f(-5) \neq f(5)$

हल यदि $f(-5) = f(5)$ हो, तो फलन $f(x)$ अंतराल $[-5, 5]$ में रोले प्रमेय की समस्त शर्तों को पूरा करता है। अतः $(-5, 5)$ में कम-से-कम एक बिंदु c का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि $f'(c) = 0$ लेकिन $f'(x) \neq 0, \forall x \in [-5, 5]$

अतः $f(5) \neq f(-5)$

प्रश्न 4. माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए, यदि अंतराल $[a, b]$ में $f(x) = x^2 - 4x - 3$, जहाँ $a = 1$ और $b = 4$ है।

मान लीजिए कि $f : [a, b] \rightarrow R$ अंतराल $[a, b]$ में सतत् तथा अंतराल (a, b) में अवकलनीय है। तब, अंतराल (a, b) में किसी ऐसे c का अस्तित्व है कि $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ है।

हल यहाँ, $f(x) = x^2 - 4x - 3, \forall x \in [1, 4]$

एक बहुपदी फलन है। अतः प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x)$ सतत् तथा अवकलनीय है। अतः

(i) $f(x)$, अंतराल $[1, 4]$ सतत् फलन है। (ii) $f(x)$, अंतराल $(1, 4)$ में अवकलनीय है।

अतः $f(x)$ अंतराल $(1, 4)$ में लेगरेन्ज माध्यमान प्रमेय की समस्त शर्तों को पूरा करता है। अतः अंतराल $(1, 4)$ में कम-से-कम एक c का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \qquad \left[\because f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2c - 4 = \frac{(4^2 - 4 \times 4 - 3) - (1^2 - 4 \times 1 - 3)}{4 - 1} = 1$$

$$\left[\because f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x - 3) = 2x - 4\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2c - 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{5}{2} \in (1, 4)$$

अतः अंतराल $[1, 4]$ में $f(x)$, लेगरेन्ज मध्यमान प्रमेय की पुष्टि करता है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 5. माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए यदि अंतराल $[a, b]$ में $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, जहाँ $a = 1$ और $b = 3$ है। $f'(c) = 0$ के लिए $c \in (1, 3)$ को ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$

जोकि एक बहुपद फलन है। अतः प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x)$ सतत् तथा अवकलनीय होगा। अतः

(i) $f(x)$ अंतराल $[1, 3]$ में सतत् है।

(ii) $f(x)$ अंतराल $(1, 3)$ में अवकलनीय है।

अतः अंतराल $[1, 3]$ में $f(x)$ लेगरेन्ज माध्यमान प्रमेय की सभी शर्तों को पूरा करता है।

$\therefore$ अंतराल $(1, 3)$ में कम-से-कम एक c इस प्रकार विद्यमान होगा कि

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 3c^2 - 10c - 3 = \frac{(3^3 - 5 \times 3^2 - 3 \times 3) - (1 - 5 - 3)}{3 - 1}$$

$$\left[\because f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$$

$$\left[\because f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 5x^2 - 3x) = 3x^2 - 10x - 3\right]$$

$$\Rightarrow \quad 3c^2 - 10c - 3 = -10$$

$$\Rightarrow \quad 3c^2 - 10c + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{6} = \frac{10 \pm 4}{6} = 1, \frac{7}{3}$$

यहाँ, $\frac{7}{3} \in (1, 3)$

अतः अंतराल $[1, 3]$ में $f(x)$ लेगरेन्ज माध्यमान प्रमेय की पुष्टि करता है।

Durga Tutorial
Since 1996
Banjapur

प्रश्न 6. प्रश्न संख्या 2 में उपरोक्त दिए तीनों फलनों के लिए माध्यमान प्रमेय की अनुपयोगिता की जाँच कीजिए।

(i) $f(x) = [x]$ अंतराल $x \in [5, 9]$

(ii) $f(x) = [x]$ अंतराल $x \in [-2, 2]$

(iii) $f(x) = 1 - x^2$ अंतराल $x \in [1, 2]$

हल

(i) दिया गया फलन $f(x) = [x] \ \forall \ x \in [5, 9]$

चूँकि $f(x)$ अंतराल $[5, 9]$ के बिंदुओं 5, 6, 7, 8 तथा 9 पर न तो सतत् है न ही अवकलनीय है। अतः लेगरेन्ज माध्यमान प्रमेय की पुष्टि नहीं करता है।

(ii) दिया गया फलन $f(x) = [x]$, $\forall x \in [-2, 2]$

चूँकि $f(x)$, अंतराल $[-2, 2]$ के बिंदुओं $-2, -1, 0, 1, 2$ पर न तो सतत् है न ही अवकलनीय है। अतः लेगरेन्ज माध्यमान प्रमेय की पुष्टि नहीं करता है।

(iii) दिया गया फलन $f(x) = 1 - x^2, \forall x \in [1, 2]$

जोकि एक बहुपदी फलन है। अतः प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x)$ सतत् तथा अवकलनीय फलन है। अतः

(a) अंतराल [1, 2] में $f(x)$ सतत् फलन है।

(b) अंतराल (1, 2) में $f(x)$ अवकलनीय फलन है।

अतः $f(x)$ अंतराल [1,2] में लेगरेन्ज माध्यमान प्रमेय की समस्त शर्तों को पूरा करता है। इसलिए अंतराल [1,2] में कम-से-कम एक बिंदु c इस प्रकार होगा कि

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \qquad \left[\because f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$$

$$\Rightarrow \quad -2c = \frac{(1 - 2^2) - (1 - 1^2)}{2 - 1} \qquad [\because f(x) = 1 - x^2 \therefore f'(x) = -2x]$$

$$\Rightarrow \quad -2c = -3 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{2} \in (1, 2)$$

अतः दिए गए अंतराल में $f(x)$ लेगरेन्ज माध्यमान प्रमेय की पुष्टि करता है।

विविध प्रश्नावली

निर्देश (प्र.सं. 1-11) निम्नलिखित प्रश्नों में प्रदत्त फलनों का, x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

प्रश्न 1. $(3x^2 - 9x + 5)^9$

हल मान लीजिए $y = (3x^2 - 9x + 5)^9$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 9(3x^2 - 9x + 5)^8 \frac{d}{dx}(3x^2 - 9x + 5)$$

$$= 9(3x^2 - 9x + 5)^8 (6x - 9)$$

$$= 9 \times 3(2x - 3)(3x^2 - 9x + 5)^8$$

$$= 27(2x - 3)(3x^2 - 9x + 5)^8$$

प्रश्न 2. $\sin^3 x + \cos^6 x$

हल मान लीजिए $y = \sin^3 x + \cos^6 x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^3 x + \cos^6 x) = \frac{d}{dx}(\sin x)^3 + \frac{d}{dx}(\cos x)^6$$

$$= 3(\sin x)^{3-1} \frac{d}{dx}(\sin x) + 6(\cos x)^{6-1} \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 3\sin^2 x \cos x + 6\cos^5 x(-\sin x) = 3\sin^2 x \cos x - 6\sin x \cos^5 x$$

$$= 3\sin x \cos x(\sin x - 2\cos^4 x)$$

Durga Tutorial
Since 1996
Danapur

प्रश्न 3. $(5x)^{3\cos 2x}$

हल मान लीजिए $y = (5x)^{3\cos 2x}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log (5x)^{3\cos 2x} = 3\cos 2x (\log 5x)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3\cos 2x \frac{d}{dx}(\log 5x) + \log 5x \frac{d}{dx}(3\cos 2x)$$

$$= (3\cos 2x)\left(\frac{1}{5x}.5\right) + (\log 5x)\{3(-\sin 2x).2\}$$

$$\left[\text{गुणन नियम से } \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{3\cos 2x}{x} - 6(\sin 2x)(\log 5x)\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (5x)^{3\cos 2x}\left\{\frac{3\cos 2x}{x} - 6\sin 2x \log 5x\right\}$$

प्रश्न 4. $\sin^{-1}(x\sqrt{x}), 0 \le x \le 1$

हल मान लीजिए $y = \sin^{-1}(x\sqrt{x})$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x\sqrt{x}), 0 \le x \le 1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(x^{3/2})}{\sqrt{1-(x\sqrt{x})^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2}x^{1/2}}{\sqrt{1-x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}$$

प्रश्न 5. $\dfrac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}, -2 < x < 2$

हल मान लीजिए $y = \dfrac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}, -2 < x < 2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2x+7}\,\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}\frac{x}{2}\right) - \cos^{-1}\frac{x}{2}\,\frac{d}{dx}(\sqrt{2x+7})}{2x+7} \quad \left[\because \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d(u)}{dx} - u\frac{d(v)}{dx}}{v^2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2x+7}\,\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{4}\right)}}.\frac{1}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right).\frac{2}{2\sqrt{2x+7}}}{2x+7}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2x+7}}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{\cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2x+7}}}{2x+7} = \frac{-\left\{2x+7+\cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{4-x^2}\right\}}{\sqrt{4-x^2}\,(2x+7)^{3/2}}$$

$$= -\left[\frac{1}{\sqrt{4-x^2}\,\sqrt{2x+7}} + \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{(2x+7)^{3/2}}\right]$$

प्रश्न 6. $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

सर्वसमिका $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ का प्रयोग कीजिए।

सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ तथा $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ का प्रयोग कीजिए।

हल मान लीजिए $y = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)+\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)-\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \because 1+\sin x = \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} \\ \qquad = \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 \\ \text{तथा } 1-\sin x = \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ \qquad = \left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2 \end{array}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{2\cos(x/2)}{2\sin(x/2)}\right] = \cot^{-1}\left[\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

नोट *यदि* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, *तो* $\sqrt{1-\sin x} = \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 7. $(\log x)^{\log x}$

$y = (\log x)^{\log x}$ के दोनों तरफ का लघुगणक लेकर अवकलन कीजिए।

हल मान लीजिए $y = (\log x)^{\log x}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log [(\log x)^{\log x}]$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \log x \log (\log x) \qquad (\because \log m^n = n \log m)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \{(\log x)\frac{d}{dx} \log (\log x)\} + \log\log(x)\frac{d}{dx}\log(x)$$

$$= (\log x) \frac{1}{\log x} \frac{1}{x} + \log (\log x) \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\{1 + \log (\log x)\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\{1 + \log(\log x)\}$$

$$= \frac{(\log x)^{\log x}}{x}(1 + \log (\log x)) = (\log x)^{\log x}\left[\frac{1}{x} + \frac{\log(\log x)}{x}\right]$$

प्रश्न 8. $\cos (a\cos x + b\sin x)$, किन्हीं अचर a तथा b के लिए।

हल मान लीजिए $\quad y = \cos (a \cos x + b \sin x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}\{\cos(a\cos x + b\sin x) = -\sin (a\cos x + b\sin x)\frac{d}{dx}(a\cos x + b\sin x)$$

$$= -\sin(a\cos x + b\sin x)(-a\sin x + b\cos x)$$

$$= \{a\sin x - b\cos x\}\sin(a\cos x + b\sin x)$$

प्रश्न 9. $(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$

हल मान लीजिए $\quad y = (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$

x दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log \{(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}\}$$

$$\Rightarrow \quad \log y = (\sin x - \cos x)\log (\sin x - \cos x) \qquad (\because \log m^n = n\log m)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x - \cos x).\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} + \{\log (\sin x - \cos x)\}(\cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y(\cos x + \sin x)\{1 + \log(\sin x - \cos x)\}$$

$$= (\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}\{1 + \log (\sin x - \cos x)\}$$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 10. $x^x + x^a + a^x + a^a$, किसी नियत अचर $a > 0$ तथा $x > 0$ के लिए।

सूत्र $\frac{d}{dx}(u^v) = \frac{u^v d}{dx}(v\log u)$ तथा $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a$ का प्रयोग करके $\frac{dx^x}{dx}$ तथा $\frac{da^x}{dx}$ को ज्ञात कीजिए। $u = x^x$ मानकर अवकलन कीजिए।

हल $\frac{d}{dx}(x^x + x^a + a^x + a^a)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(x^x) + \frac{d}{dx}(x^a) + \frac{d}{dx}(a^x) + \frac{d}{dx}(a^a)$$

$$= x^x \frac{d}{dx}(x\log x) + a\,x^{a-1} + a^x \log a + 0 \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(u^v) = u^v \frac{d}{dx}(v\log u)\right]$$

$$= x^x\left(x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 1\right) + ax^{a-1} + a^x \log a$$

$$= x^x(1 + \log x) + a\,x^{a-1} + a^x \log a$$

वैकल्पिक विधि

मान लीजिए $\quad y = x^x + x^a + a^x + a^a$

तथा $\quad u = x^x \Rightarrow y = u + x^a + a^x + a^a$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{d}{dx}x^a + \frac{d}{dx}a^x + \frac{d}{dx}a^a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + ax^{a-1} + a^x \log a \qquad \ldots(i)$$

अब, $\quad u = x^x$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\Rightarrow \quad \log u = \log x^x = x\log x \qquad (\because \log m^n = n\log m)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \log x + x\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \log x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$$

समी. (i) में $\frac{du}{dx}$ का मान रखने पर,

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x) + ax^{a-1} + a^x \log a$$

प्रश्न 11. $x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}$, $x > 3$ के लिए

हल मान लीजिए $\quad y = x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}$

तथा $\quad u = x^{x^2-3}$ तथा $v = (x-3)^{x^2}$

$$\Rightarrow \quad y = u + v$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{...(i)}$$

अब, $u = x^{x^2-3}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log u = \log (x)^{x^2-3} = (x^2 - 3)\log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = (x^2 - 3) \cdot \frac{1}{x} + 2x\log x$$

$$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{x^2 - 3}{x} + 2x\log x\right)$$

$$\frac{du}{dx} = x^{x^2-3}\left(\frac{x^2 - 3}{x} + 2x\log x\right)$$

अब, $v = (x-3)^{x^2}$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log v = \log (x-3)^{x^2} = x^2 \log (x-3) \quad (\because \log m^n = n\log m)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}\log (x-3) + \log (x-3)\frac{d}{dx}x^2$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{x-3} + 2x\log (x-3)$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x^2}{x-3} + 2x \cdot \log (x-3)\right]$$

$$\frac{dv}{dx} = (x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3} + 2x \cdot \log (x-3)\right]$$

$\frac{du}{dx}$ तथा $\frac{dv}{dx}$ का मान समी (i) में रखने पर,

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^2-3}\left(\frac{x^2-3}{x} + 2x\log x\right) + (x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3} + 2x\log (x-3)\right]$$

प्रश्न 12. ज्ञात कीजिए $\frac{dy}{dx}$ यदि $y = 12(1 - \cos t), x = 10(t - \sin t), -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

हल दिया है, $y = 12(1 - \cos t), x = 10(t - \sin t)$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\therefore$ $\frac{dy}{dt} = 12(0 + \sin t)$ तथा $\frac{dx}{dt} = 10(1 - \cos t)$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{12 \sin t}{10(1 - \cos t)}$

$$= \frac{12 \times 2 \sin(t/2)\cos(t/2)}{10\{2\sin^2(t/2)\}} = \frac{6}{5}\cot\left(\frac{t}{2}\right)$$

$\left(\because \sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \text{ तथा } \cos t = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2}\right)$

प्रश्न 13. ज्ञात कीजिए $\frac{dy}{dx}$, यदि $y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1$

हल दिया है, $y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$\sin^{-1}x = \theta \Rightarrow x = \sin\theta$ रखने पर,

$\Rightarrow \quad y = \theta + \sin^{-1}\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\Rightarrow \quad y = \theta + \sin^{-1}(\cos\theta) \quad (\because 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta)$

$\Rightarrow \quad y = \theta + \sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\Rightarrow \quad y = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} \quad \left[\because \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta\right]$

$\Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 0$

प्रश्न 14. यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

हल दिया है, $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

$\Rightarrow \quad x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x} \quad \ldots(i)$

दोनों तरफ का वर्ग करने पर,

$$x^2(1+y) = y^2(1+x)$$

$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 + x^2y - y^2x = 0$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x+y) + xy(x-y) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-y)\{x+y+xy\} = 0$

$\Rightarrow \quad x - y = 0$ या $x + y + xy = 0$

$\Rightarrow \quad y = x$ या $y\cdot(1+x) = -x \Rightarrow y = x$ या $y = \frac{-x}{1+x}$

लेकिन $y = x$, समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

Durga Tutorial Since 1996 Ballapur

अत: $y = -\dfrac{x}{1+x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{1+x}\right) = -\frac{(1+x)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{(1+x)\cdot 1 - x(0+1)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

प्रश्न 15. यदि किसी $c > 0$ के लिए $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$, a और b से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है।

हल दिया है, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2(x-a) + 2(y-b)\frac{dy}{dx} = 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b} \quad \text{...(ii)}$$

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y-b)\cdot 1 - (x-a)\frac{dy}{dx}}{(y-b)^2} \qquad \left[\because \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}\right]$$

$$= -\frac{(y-b)\cdot 1 - (x-a)\left(-\frac{x-a}{y-b}\right)}{(y-b)^2} \qquad \text{[समी (ii) से]}$$

$$= -\frac{(y-b)^2 + (x-a)^2}{(y-b)^3} = -\frac{c^2}{(y-b)^3}$$

अब, $$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1+\left(\frac{x-a}{y-b}\right)^2\right]^{3/2}}{-\frac{c^2}{(y-b)^3}} = \frac{\{(y-b)^2 + (x-a)^2\}^{3/2}}{\{(y-b)^2\}^{3/2}\frac{(-c^2)}{(y-b)^3}}$$

$$= \frac{(c^2)^{3/2}}{-c^2} = \frac{c^3}{-c^2} = -c,$$

जो a तथा b से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है।

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 16. यदि $\cos y = x\cos(a+y)$ तथा $\cos a \neq \pm 1$,

तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

हल दिया है, $\cos y = x\cos(a+y)$

$\Rightarrow$ $$x = \frac{y}{\cos(a+y)}$$

y के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left\{\frac{\cos y}{\cos(a+y)}\right\} = \frac{\cos(a+y)(-\sin y) - \cos y[-\sin(a+y)\cdot 1]}{\cos^2(a+y)}$$

$$\left[\because \frac{d}{dy}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dy} - u\frac{dv}{dy}}{v^2}\right]$$

$$= \frac{\sin(a+y)\cos y - \cos(a+y)\sin y}{\cos^2(a+y)} = \frac{\sin(a+y-y)}{\cos^2(a+y)} = \frac{\sin a}{\cos^2(a+y)}$$

$[\because \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B]$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$$

प्रश्न 17. यदि $x = a(\cos t + t\sin t)$ तथा $y = a(\sin t - t\cos t)$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $x = a(\cos t + t\sin t)$

तथा $y = a(\sin t - t\cos t)$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = a\left[\frac{d}{dt}\cos t + \left(t\frac{d}{dt}(\sin t) + \sin t\frac{d}{dt}(t)\right)\right]$$

$\therefore$ $$\frac{dx}{dt} = a\{-\sin t + (t\cos t + \sin t\cdot 1)\} = at\cos t$$

तथा $$\frac{dy}{dt} = a\left[\frac{d}{dt}\sin t - \left(t\frac{d}{dt}\cos t + \cos t\cdot 1\right)\right]$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dt} = a\{\cos t - (t(-\sin t) + \cos t\cdot 1)\} = at\sin t$$

अत: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{at\sin t}{at\cos t} = \tan t$$

अर्थात् $$\frac{dy}{dx} = \tan t \qquad \ldots(i)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\tan t) = \frac{d}{dt}(\tan t)\frac{dt}{dx} = \frac{\sec^2 t}{at\cos t} \qquad \left(\because \frac{dx}{dt} = at\cos t\right)$$

$$= \frac{1}{at}\sec^3 t$$

0 तथा $\frac{\pi}{2}$ के विषम गुणांकों को छोड़कर, t के प्रत्येक मान के लिए परिणाम सत्य है।

प्रश्न 18. यदि $f(x) = |x|^3$, तो प्रमाणित कीजिए कि $f''(x)$ का अस्तित्व है और इसे ज्ञात भी कीजिए।

हल यहाँ, $f(x) = |x|^3$

जब $x \geq 0$, $f(x) = |x|^3 = x^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}(x^3) \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}(3x^2) \Rightarrow f''(x) = 6x$$

जब $x < 0$, $f(x) = |x|^3 = -x^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}(-x^3) \Rightarrow f'(x) = -3x^2$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}(-3x^2) - 6x \Rightarrow f''(x) = -6x$$

अतः $$f''(x) = \begin{cases} 6x, & x \geq 0 \\ -6x, & x < 0 \end{cases}$$

प्रश्न 19. गणितीय आगमन के सिद्धान्त के प्रयोग द्वारा, सिद्ध कीजिए कि सभी धन पूर्णांक n के लिए $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ है।

हल मान लीजिए $P(n) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

अब, $P(1) = \frac{d}{dx}(x^1) = 1 \cdot x^{1-1}$ अर्थात् $\frac{d}{dx}(x) = 1$, जोकि सत्य है।

$\therefore$ P(1) सत्य है। मान लीजिए P(m), $m \in N$ सत्य है।

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1} \qquad \ldots(i)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^{m+1}) = \frac{d}{dx}(x^m x) = x^m\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(x^m) \qquad \text{(गुणन नियम से)}$$

Durga Tutorial
Since 1996
Daniapur

$$= x^m \cdot 1 + x\,(mx^{m-1}) = (m+1)x^m$$ [समी (i) से]

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(x^{m+1}) = (m+1)x^{(m+1)-1}$$

$\Rightarrow P(m+1)$ सत्य है। अत: $P(1)$ सत्य है

तथा $P(m) = P(m+1),\ m \in N$

अत: गणितीय आगमन सिद्धान्त से $P(n)$ प्रत्येक $n \in N$ के लिए सत्य है।

प्रश्न 20. $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ **का प्रयोग करते हुए अवकलन द्वारा cosines के लिए योग सूत्र ज्ञात कीजिए।**

हल $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ का प्रयोग करके x के सापेक्ष अवकलन करने पर जबकि B अचर तथा A, x में फलन है।

$$\cos(A+B)\frac{dA}{dx} = \cos B \cdot \cos A\,\frac{dA}{dx} - \left(\sin A \frac{dA}{dx}\right)\sin B$$

$$\Rightarrow \quad \cos(A+B)\frac{dA}{dx} = (\cos A \cos B - \sin A \sin B)\frac{dA}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \qquad \left(\because \frac{dA}{dx} \neq 0\right)$$

प्रश्न 21. क्या एक ऐसे फलन का अस्तित्व है, जो प्रत्येक बिंदु पर सतत् हो किंतु केवल दो बिंदुओं पर अवकलनीय न हो? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल हाँ, $f(x) = |x-1| + |x-2|$, केवल 1 तथा 2 को छोड़कर प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् तथा अवकलनीय है।

यहाँ, $$f(x) = |x-1| + |x-2| = \begin{cases} -(x-1)-(x-2), & \text{यदि } x < 1 \\ x-1-(x-2), & \text{यदि } 1 \le x \le 2 \\ x-1+x-2, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

अर्थात् $$f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{यदि } x < 1 \\ 1, & \text{यदि } 1 \le x \le 2 \\ 2x-3, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

चूँकि बहुपदी फलन सतत् होता है। अत: $f(x)$, $x = 1, 2$ को छोड़कर सभी बिंदुओं का सतत् फलन है।

$x = 1$ पर, $f(1) = 1$,

$$\text{LHL} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-2x+3) = -2+3 = 1$$

तथा $$\text{RHL} = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1$$

पुन: $$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$, $x = 1$ पर सतत् है।

$x=2$ पर, $f(2)=1$

$$\text{LHL} = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-}(1) = 1$$

Durga Tutorial Since 1995 Banjapur

तथा $RHL = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x-3) = 2\times 2 - 3 = 1$

पुनः $f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore f(x)$, $x = 2$ पर सतत् है।

$\therefore$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x)$ सतत् है।

पुनः $f'(x) = \begin{cases} -2, \text{ यदि } & x < 1 \\ 0, \text{ यदि } & 1 < x < 2 \\ 2, \text{ यदि } & x > 2 \end{cases}$

अब, $Lf'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2(1-h)+3-1}{-h} = -2$

तथा $Rf'(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-1}{h} = 0$

$\therefore$ $Lf'(1) \neq Rf'(1) \Rightarrow f(x)$, $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है।

$\Rightarrow$ पुनः $Lf'(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1-1}{-h} = 0$

तथा $Rf'(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(2+h)-3-1}{h} = 2$

$\therefore$ $Lf'(2) \neq Rf'(2)$

$\Rightarrow f(x), x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है।

अतः $f(x)$, प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् है तथा $x = 1, 2$ को छोड़कर प्रत्येक $x \in R$ पर अवकलनीय भी है।

प्रश्न 22. यदि $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

हल दिया है, $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अवयवों के संगत विस्तार करने पर,

$\Rightarrow$ $y = (mc - nb)f(x) + (na - lc)\,g(x) + (lb - ma)h(x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = (mc - nb)\,f'(x) + (na - lc)\,g'(x) + (lb - ma)h'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

$y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

अतः
$$\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

प्रश्न 23. यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}, -1 \le x \le 1$, तो दर्शाइए कि $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$

हल दिया है, $y = e^{a\cos^{-1}x}$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{a\cos^{-1}x}\frac{d}{dx}a\cos^{-1}x = e^{a\cos^{-1}x}\cdot\frac{-a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-ay}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\because e^{a\cos^{-1}x} = y)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = -ay \qquad \text{...(ii)}$$

पुन : x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\sqrt{1-x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -a\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1-x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{-a(-ay)}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{[समी (ii) से]}$$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$

Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

Baniapur

Durga Tutorial

Online Classes

Thank You For Downloading Notes

ज्यादा जानकारी के लिए हमें
Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511