अध्याय-8

समाकलनों के अनुप्रयोग

(Application of Integrals)

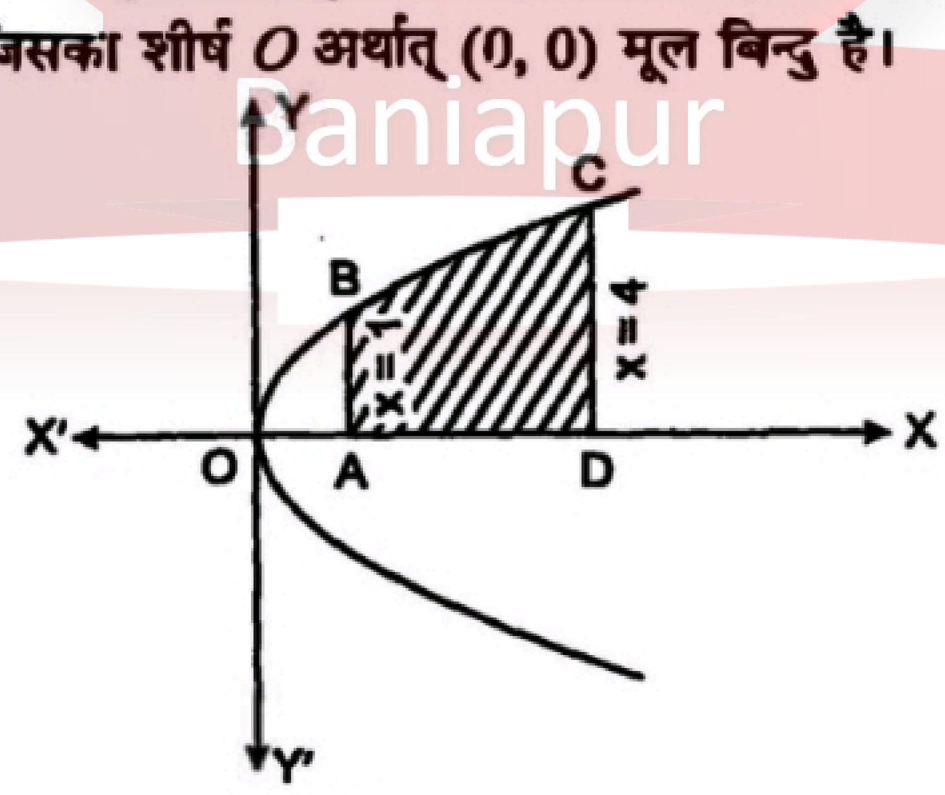
(Important Formulae and Definitions)

1. निश्चित समाकल योग की एक सीमा है।
2. वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = a$ और $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_{x=a}^{x=b} y\,dx$ है।
3. $x = a$ समाकलन की निम्न सीमा तथा $x = b$ समाकलन की उच्च सीमा कहलाती है।
4. वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष तथा रेखाओं $y = a$ और $y = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_{y=a}^{y=b} x\,dy$ है।
5. दो वक्रों $y = f_1(x)$ तथा $y = f_2(x)$ एवं रेखाएँ $x = a, x = b$ के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$ है।

प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1. वक्र $y^2 = x$, रेखाओं $x = 1, x = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : ज्ञात है : वक्र $y^2 = x$, जिसका शीर्ष O अर्थात् $(0, 0)$ मूल बिन्दु है।



$\therefore$ $y = \sqrt{x}$

क्षेत्र जो $x = 1, x = 4$, y-अक्ष के समान्तर रेखाएँ हैं, जो x-अक्ष तथा वक्रों से घिरा हुआ है।

$$\text{क्षेत्रफल } A = \text{क्षेत्रफल } ABCD = \int_1^4 y\,dx = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}[x^{3/2}]_1^4 = \frac{2}{3}[4^{3/2} - 1^{3/2}]$$

क्षेत्र जो $x = 1, x = 4$, y-अक्ष के समान्तर रेखाएँ हैं, जो x-अक्ष तथा वक्रों से घिरा हुआ है।

$$\text{क्षेत्रफल } A = \text{क्षेत्रफल } ABCD = \int_1^4 y dx = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx$$

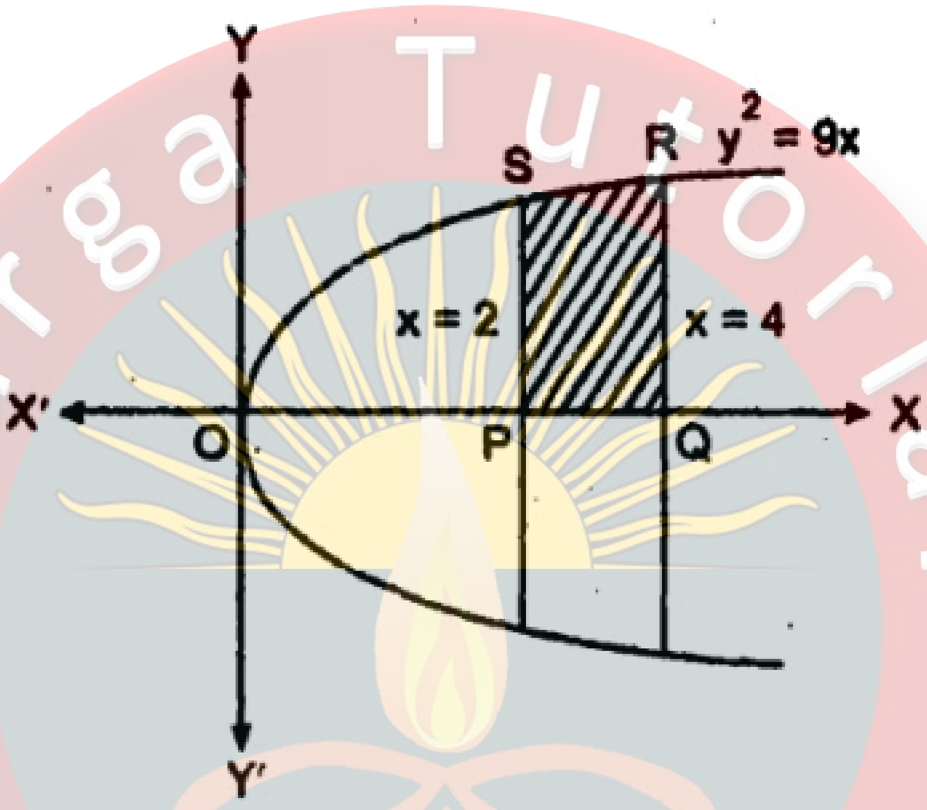
$$= \frac{2}{3}[x^{3/2}]_1^4 = \frac{2}{3}[4^{3/2} - 1^{3/2}]$$

$$= \frac{2}{3}[8-1] = \frac{14}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 2. प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y^2 = 9x$, $x = 2$, $x = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : ज्ञात है : $y^2 = 9x$ जो एक परवलय है और जिसका शीर्ष (0, 0) है।

रेखाएँ $x = 2$ तथा $x = 4$, y-अक्ष के समान्तर हैं। वक्र x-अक्ष के सममित है।



क्षेत्र जो वक्र $y^2 = 9x$, $x = 2$, $x = 4$ तथा x-अक्ष से घिरा है।

$$y^2 = 9x$$

$\therefore$ $$y = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

$\therefore$ $$\text{क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_2^4 3\sqrt{x}$$

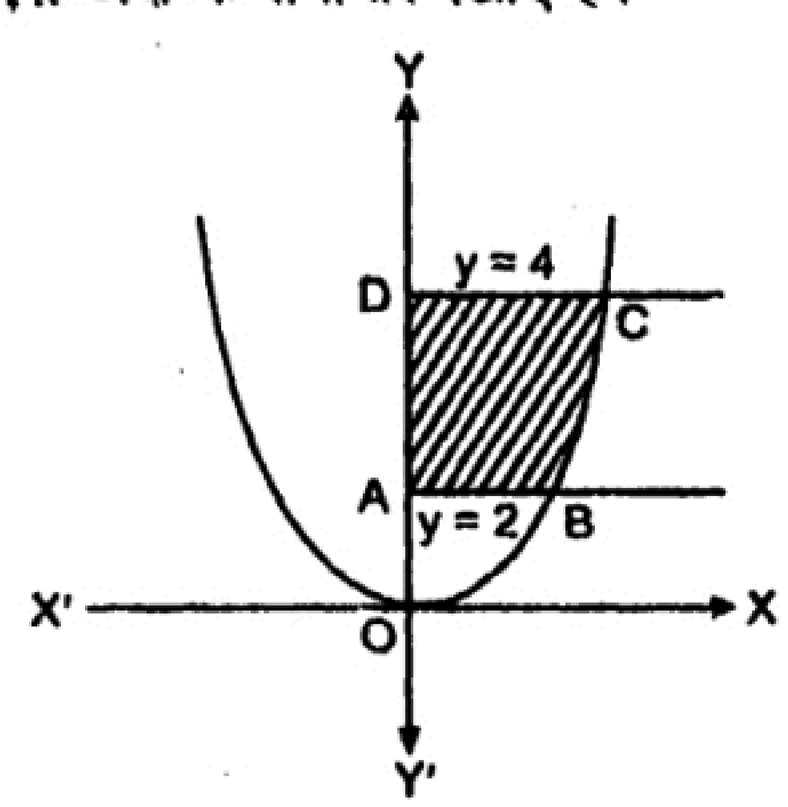
$$= 3 \times \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_2^4 = 3 \times \frac{2}{3}[x^{3/2}]_2^4$$

$$= 2[4^{3/2} - 2^{3/2}]$$

$$= 2[8 - 2\sqrt{2}] = (16 - 4\sqrt{2}) \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 3. प्रथम चतुर्थांश में $x^2 = 4y$, $y = 2$, $y = 4$ एवं y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वक्र $x^2 = 4y$ है। जो एक परवलय है तथा जिसका शीर्ष (0, 0) है। अक्ष y-अक्ष तथा यह y-अक्ष के सममित है और $y = 2$, $y = 4$, x-अक्ष के समान्तर रेखाएँ हैं।



$\because \quad x^2 = 4y$

या $\quad x = 2\sqrt{y}$

क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_2^4 x\,dy = \int_2^4 2\sqrt{y}\,dy = 2\int_2^4 \sqrt{y}\,dy$

$$= 2\left[\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = 2 \times \frac{2}{3}[4^{3/2} - 2^{3/2}]$$

$$= \frac{4}{3}(8 - 2\sqrt{2})$$

$$= \left(\frac{32 - 8\sqrt{2}}{3}\right) \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 4. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया दीर्घवृत्त का समीकरण, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

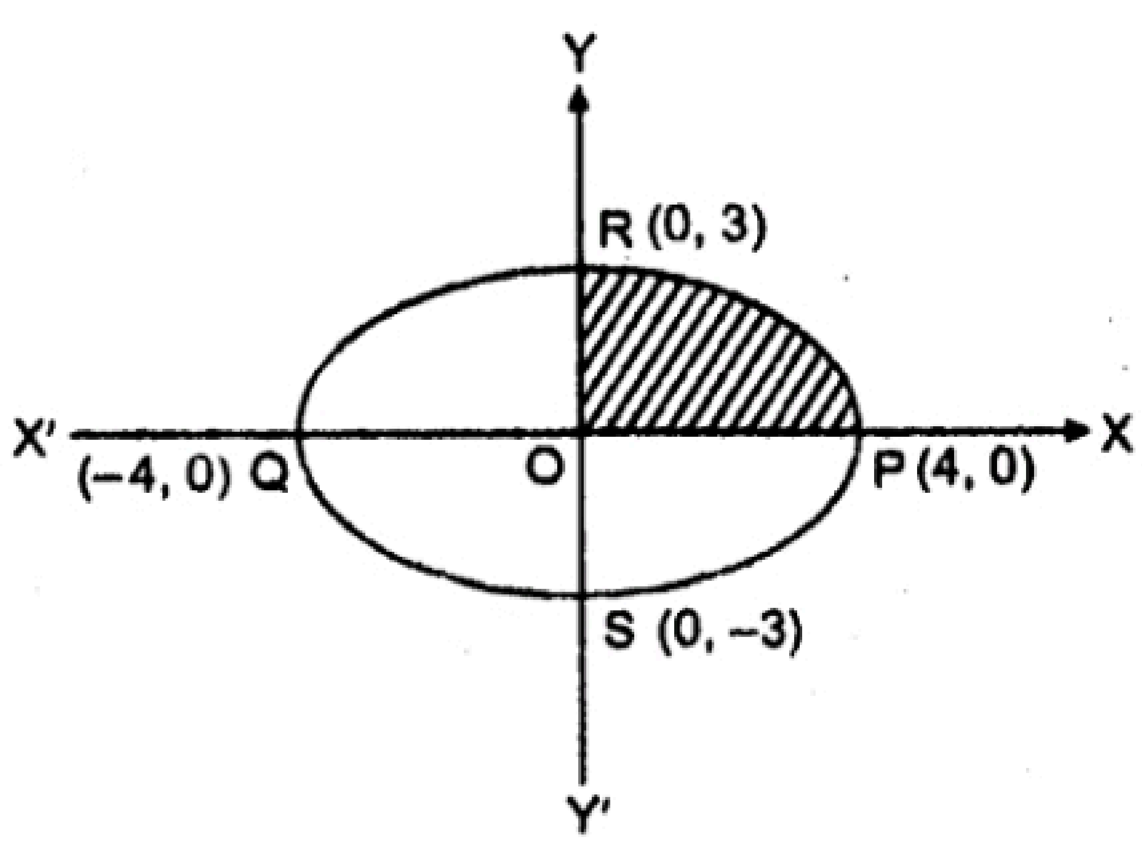
$\because$ वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है क्योंकि समीकरण में x तथा y की समघात है।

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$\therefore \quad \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} = \frac{16 - x^2}{16}$

या $\quad \frac{y}{3} = \sqrt{\frac{16 - x^2}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{16 - x^2}$

$\therefore \quad y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$



अभीष्ट क्षेत्रफल $= 4$ OPR का क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\,dx$$

$$= 3\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4$$

$$= 3\left[\left(0+8\sin^{-1}\frac{4}{4}\right)-0\right] = 24\sin^{-1}1$$

$$= 24\times\frac{\pi}{2} = 12\pi \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

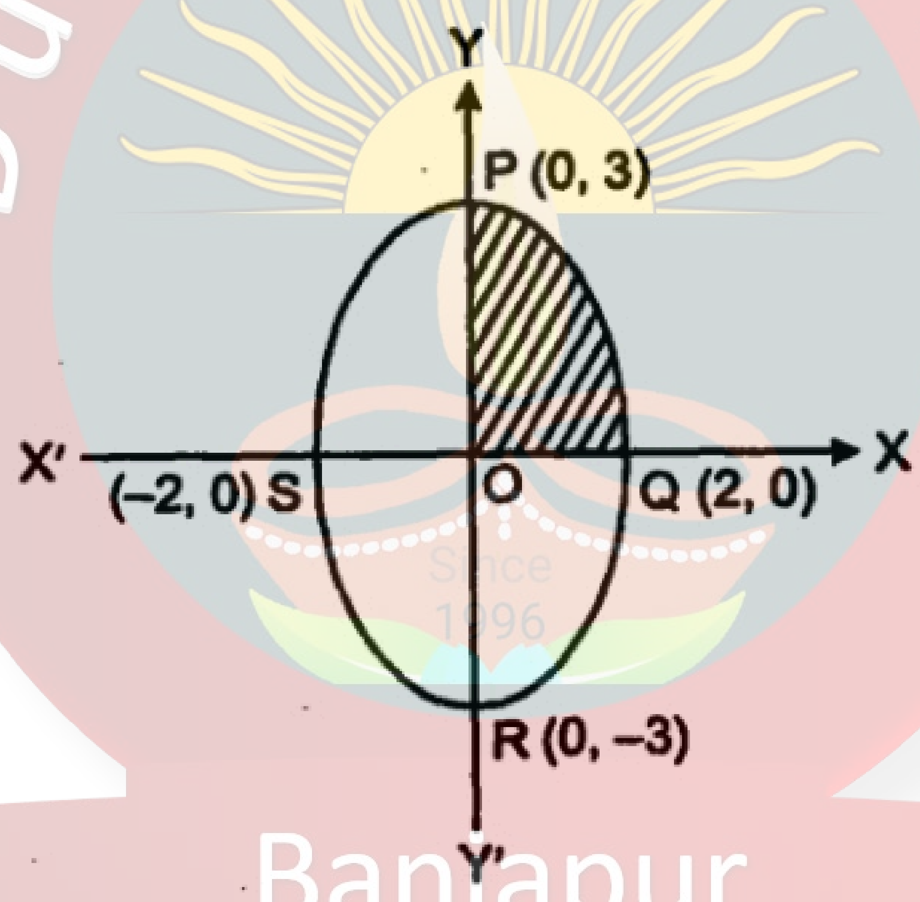
प्रश्न 5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

$\therefore$

$$\frac{y^2}{9} = 1-\frac{x^2}{4}$$

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$$



इसका केन्द्र (0, 0) है।
अर्द्ध दीर्घ अक्ष की लम्बाई 3 और अर्द्ध लघु अक्ष की लम्बाई 2 है।
अतः दीर्घवृत्त द्वारा घेरा गया अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 4 \times \text{क्षेत्रफल } POQ \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= 4\int_0^2 \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 6\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 6\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= 6[(0+2\sin^{-1}1)-0] = 12\sin^{-1}1$$

$$= 12\times\frac{\pi}{2} = 6\pi \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 6. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$, रेखा $x = \sqrt{3}y$ एवं x-अक्ष द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

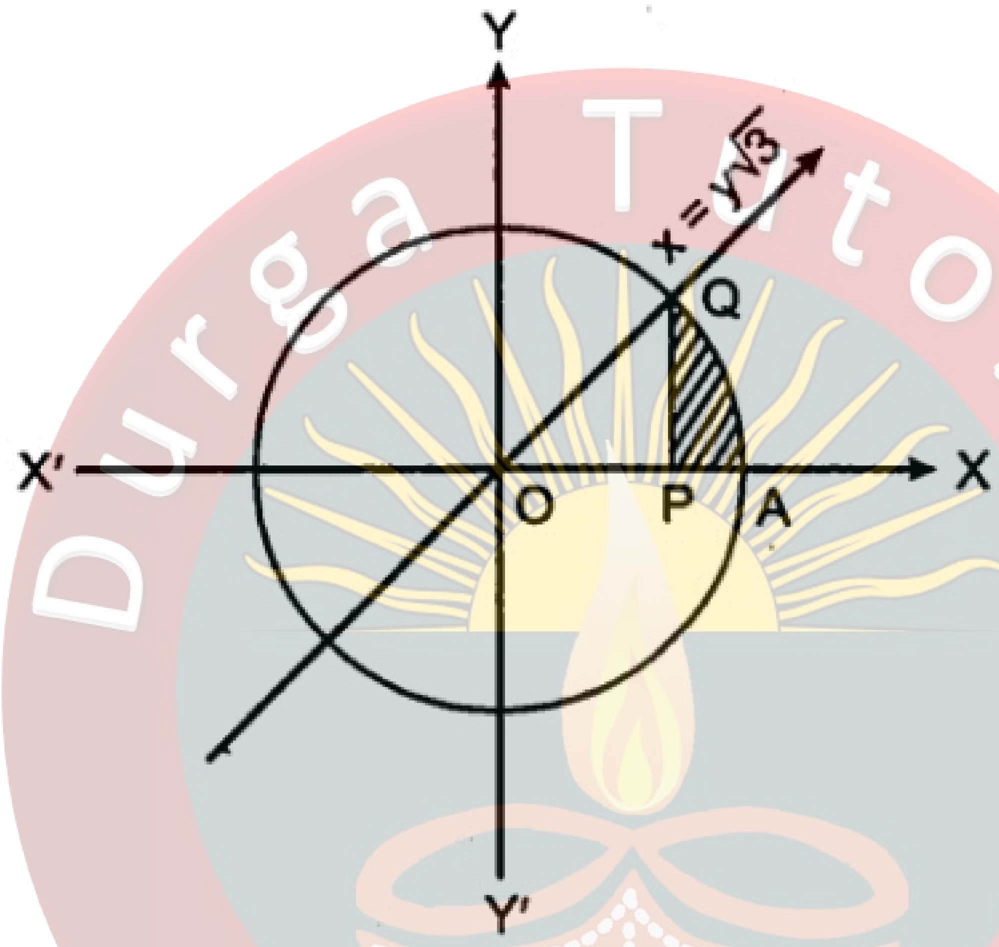
हल : दिया गया वृत्त का समीकरण :

$$x^2 + y^2 = 4$$

जिसका केन्द्र (0, 0) और त्रिज्या 2 के समान है।

तथा सरल रेखा का समीकरण, $x = \sqrt{3}y$

जो (0, 0) तथा $(\sqrt{3}, 1)$ से होकर जाती है।



क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल OQP + क्षेत्रफल PQA

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} x\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} + \left[\frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_{\sqrt{3}}^{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}(3-0) + \left[\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\sin^{-1}1 - \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$ वर्ग इकाई। **उत्तर**

प्रश्न 7. छेदक रेखा $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ द्वारा वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{...(i)}$$

और

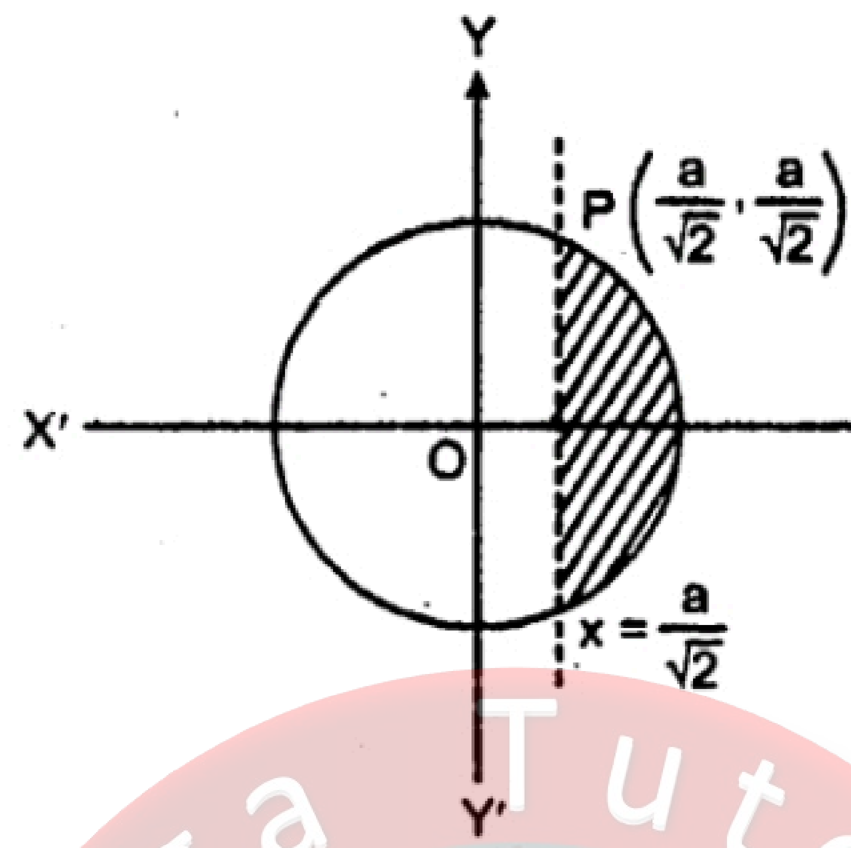
$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad \text{...(ii)}$$

स्पष्टत: समीकरण (i) एक वृत्त है जिसका केन्द्र (0, 0) तथा त्रिज्या a है। समीकरण (ii) y-अक्ष के समान्तर $\frac{a}{\sqrt{2}}$ मात्रक दूरी पर इसके दायीं ओर एक सरल रेखा स्थित है।

समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर,

$$\frac{a^2}{2}+y^2=a^2 \text{ या } y^2=\frac{a^2}{2} \text{ या } y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

अत: (i) और (ii) का प्रथम चतुर्थांश में प्रतिच्छेदन बिन्दु $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ है।



अभीष्ट क्षेत्रफल = छायांकित क्षेत्र

$$= 2\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a}$$

$$= \left[\left(0-\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}\right)+a^2\left(\sin^{-1}1-\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

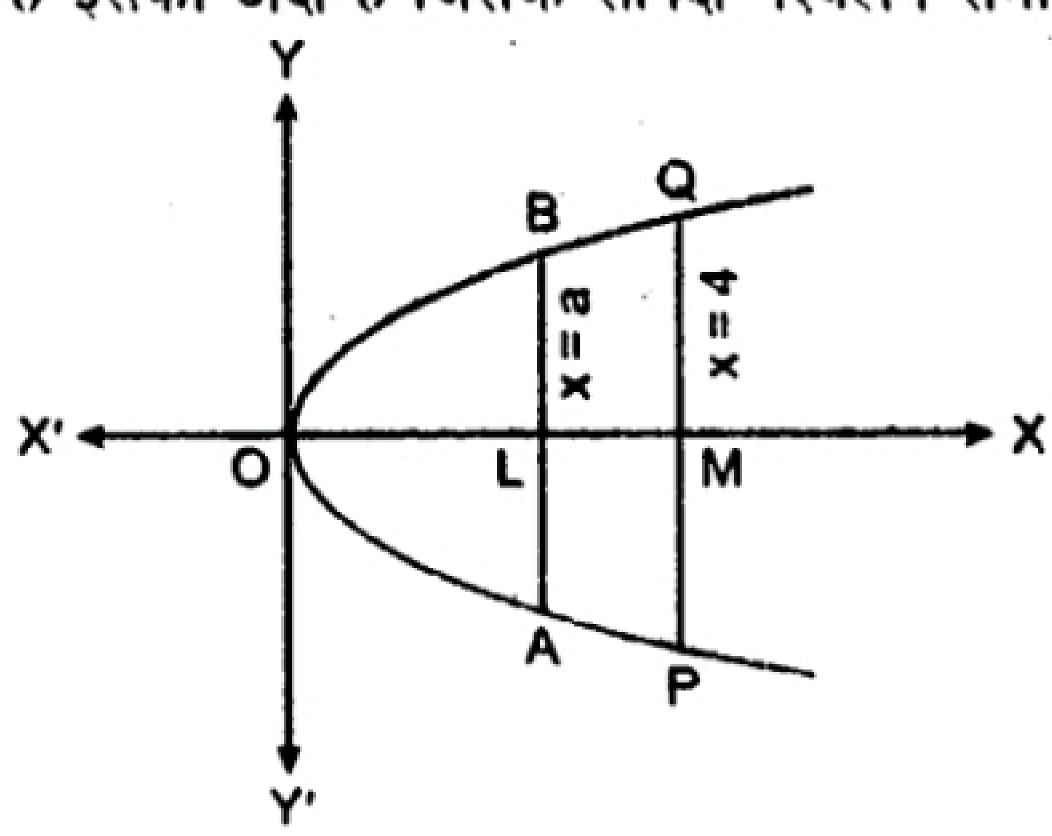
$$= \left[-\frac{a^2}{2}+a^2\times\frac{\pi}{2}-a^2\times\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 8. यदि वक्र $x = y^2$ एवं रेखा $x = 4$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल रेखा $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया परवलय का समीकरण : $x = y^2$

जिसका शीर्ष (0, 0) है $y = 0$ इसका अक्ष है जिसके सापेक्ष परवलय सममित है।



$x = 4$ सरल रेखा है जो y-अक्ष से 4 इकाई की दूरी पर है।
वक्र तथा $x = 4$ से घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल OPQ

$$= 2\int_0^4 y\,dx = 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dy = 2\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= 2 \times \frac{2}{3}[4^{3/2}]$$

$$= \frac{4}{3}.8 = \frac{32}{3}$$

$x = a$ सरल रेखा है जो y-अक्ष से a दूरी पर है।
वक्र तथा $x = a$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{x}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{4}{3}a^{3/2} \quad \ldots\text{(ii)}$$

समी. (i) और (ii) से,

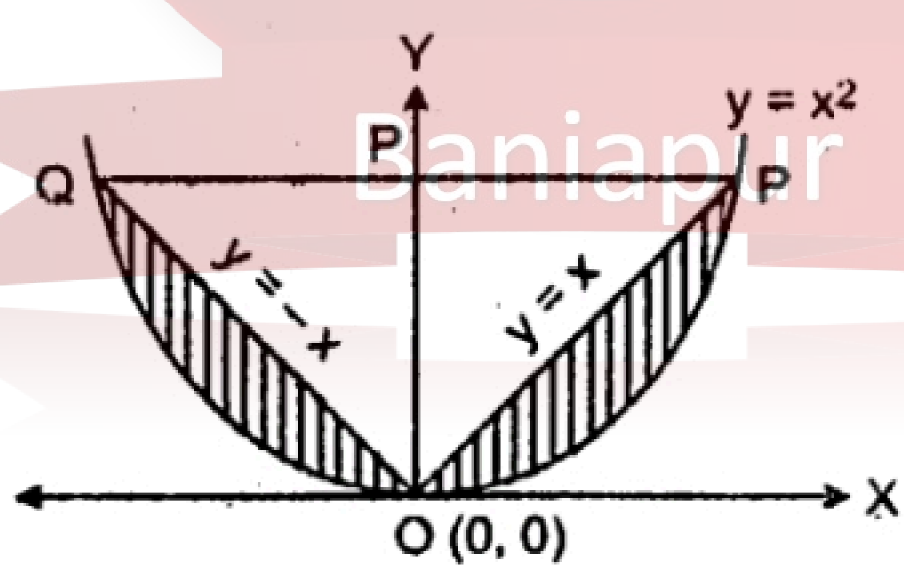
$$\text{क्षेत्रफल } OPQ = 2 \text{ क्षेत्रफल} \times OAB$$

या $$\frac{32}{3} = 2 \times \frac{4}{3}a^{3/2} \text{ या } a^{3/2} = 4$$

या $$a = 4^{2/3}.$$ उत्तर

प्रश्न 9. परवलय $y = x^2$ एवं $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया परवलय का समीकरण : $y = x^2$
जो y-अक्ष के प्रति सममित है।



$y = x^2, y = x$ मिलते हैं जब $x = x^2$ या $x(x-1) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0, x = 1$

$\therefore A(1, 1)$ है। $[y = |x| \Rightarrow y = x, -x]$

अत: अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 2\,[\text{क्षेत्रफल } \Delta APO - \text{क्षेत्रफल } \Delta OAP]$$

$$= 2\left|\int_{y=0}^1 x\,dy - \frac{1}{2}(1)(1)\right|$$

$$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{y}\,dy - \frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\left|\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|^{1} - 1$$

$$= \frac{4}{3}(1-0)-1 = \frac{1}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 10. वक्र $x^2 = 4y$ एवं रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वक्र $\quad x^2 = 4y \qquad$ ...(i)

और रेखा का समीकरण $\quad x = 4y - 2 \qquad$ ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर,

$$(4y-2)^2 = 4y$$

या $\quad 16y^2 - 16y + 4 = 4y$

या $\quad 16y^2 - 20y + 4 = 0$

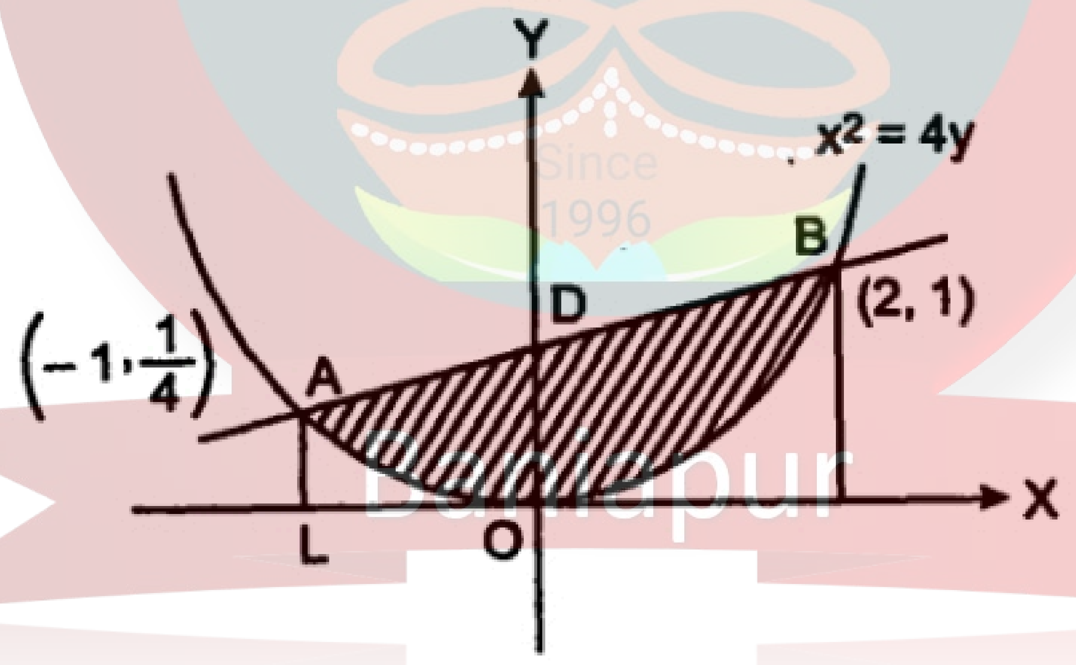
या $\quad 4y^2 - 5y + 1 = 0$

या $\quad (4y-1)(y-1) = 0$

$\therefore \quad y = \frac{1}{4}, 1$

अब समीकरण (i) से, जब $y = \frac{1}{4}$ हो, तब $x = \pm 1$ और जब $y = 1$ हो, तब $x = \pm 2$

$\therefore \; A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ तथा $B(2, 1)$, समीकरण (i) और (ii) के प्रतिच्छेदन बिन्दु हैं।



$\therefore \quad$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_{-1}^{2} [y(\text{रेखा } PQ \text{ के लिए}) - y(\text{परवलय के लिए})]dx$

$$= \int_{-1}^{2}\left(\frac{x+2}{4} - \frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left|\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(2+4-\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(6-\frac{8}{3}\right) - \left(-2+\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{4}\left|\frac{10}{3} + 2 - \frac{5}{6}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{20+12-5}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{27}{6}\right)$$

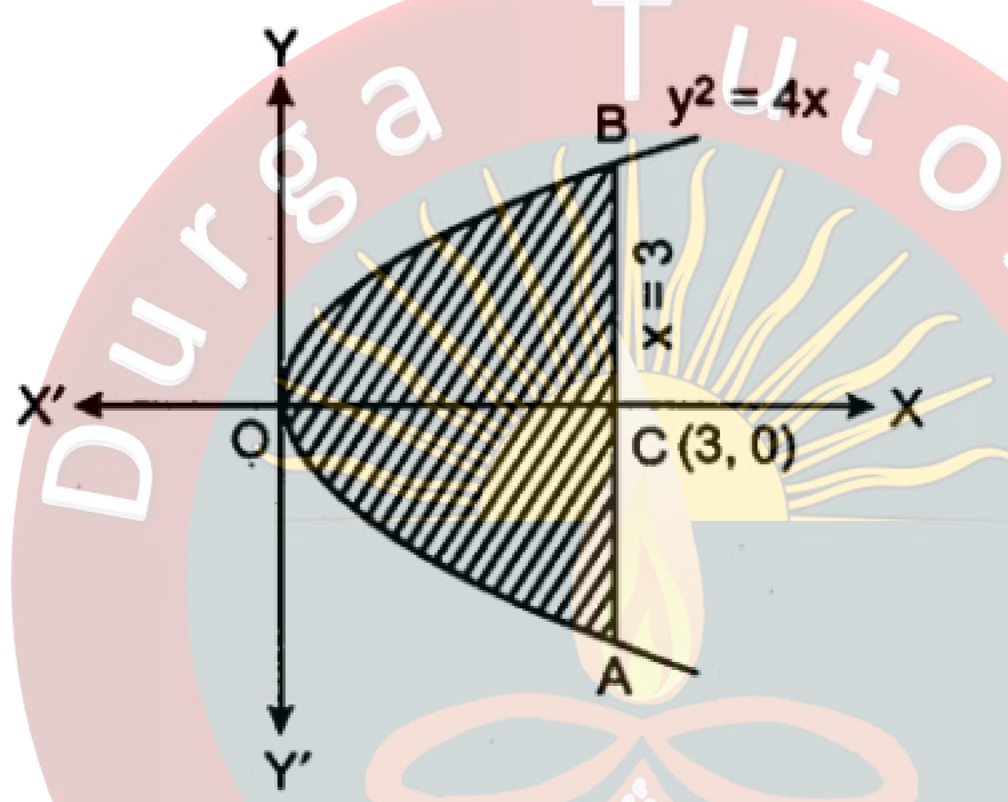
$$= \frac{9}{8} \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 11. वक्र $y^2 = 4x$ एवं रेखा $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया परवलय का समीकरण $y^2 = 4x$

जिसका शीर्ष (0, 0) है और OX इसका अक्ष है जिसमें सापेक्ष परवलय सममित है।

और दिया है : $x = 3$ एक सरल रेखा है जो y-अक्ष के समान्तर 3 इकाई दूरी पर है।



∴ अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OAB का क्षेत्रफल

= 2 × क्षेत्र OCB का क्षेत्रफल

$$= 2\int_0^3 y\,dx = 2\int_0^3 \sqrt{4x}\,dx = 4\left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)_0^3$$

$$= 4 \times \frac{2}{3}(3^{3/2}) = \frac{8}{3} \times 3\sqrt{3}$$

$$= 8\sqrt{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 12. एवं 13 में सही उत्तर का चयन कीजिए :

प्रश्न 12. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0, x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

हल : वृत्त का समीकरण : $x^2 + y^2 = 4$

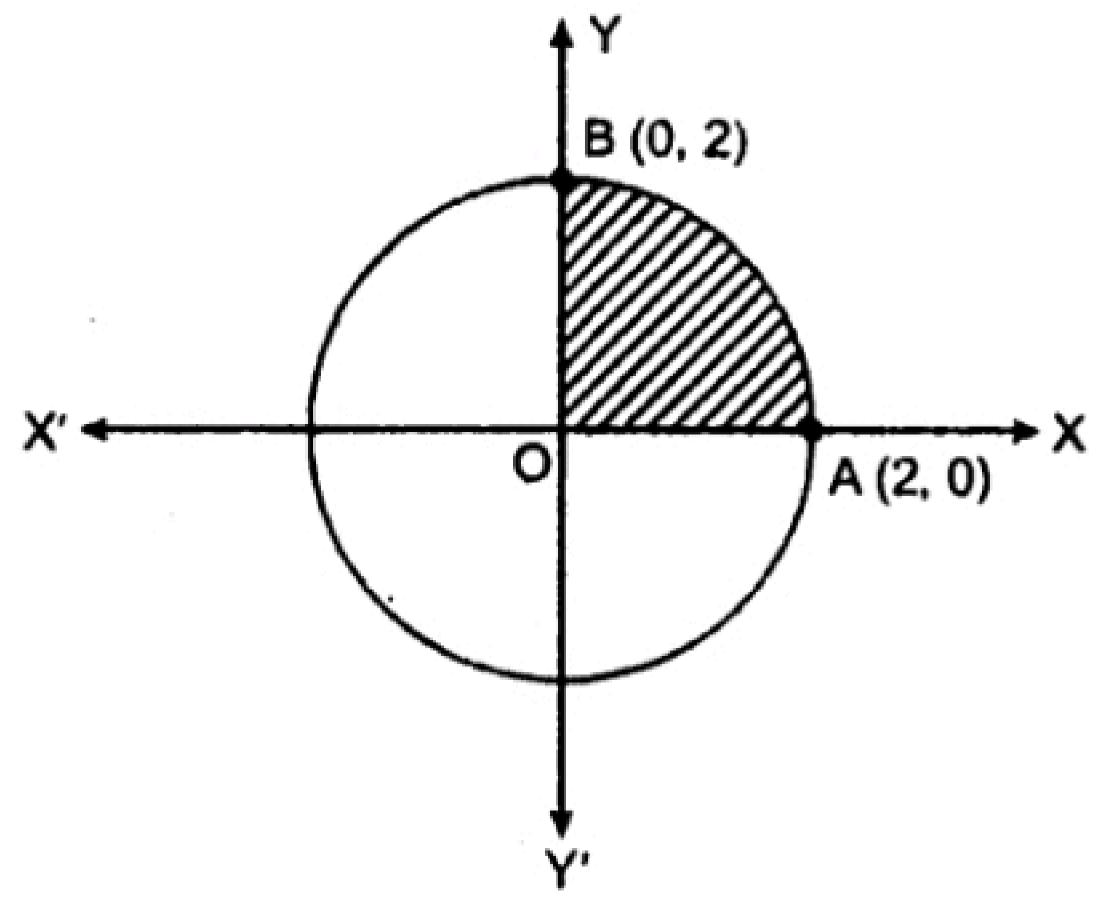
∴ $y^2 = 4 - x^2$

या $y = \sqrt{4 - x^2}$

जब $x = 0$ हो, तब $y = 2$

और जब $x = 2$ हो, तब $y = 0$

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु (2, 0) और (0, 2) हैं।



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^2 y\,dx$

$$= \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= 0 + 2\sin^{-1}(1)$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \text{ वर्ग इकाई।}$$

अत: विकल्प (A) सही है। उत्तर

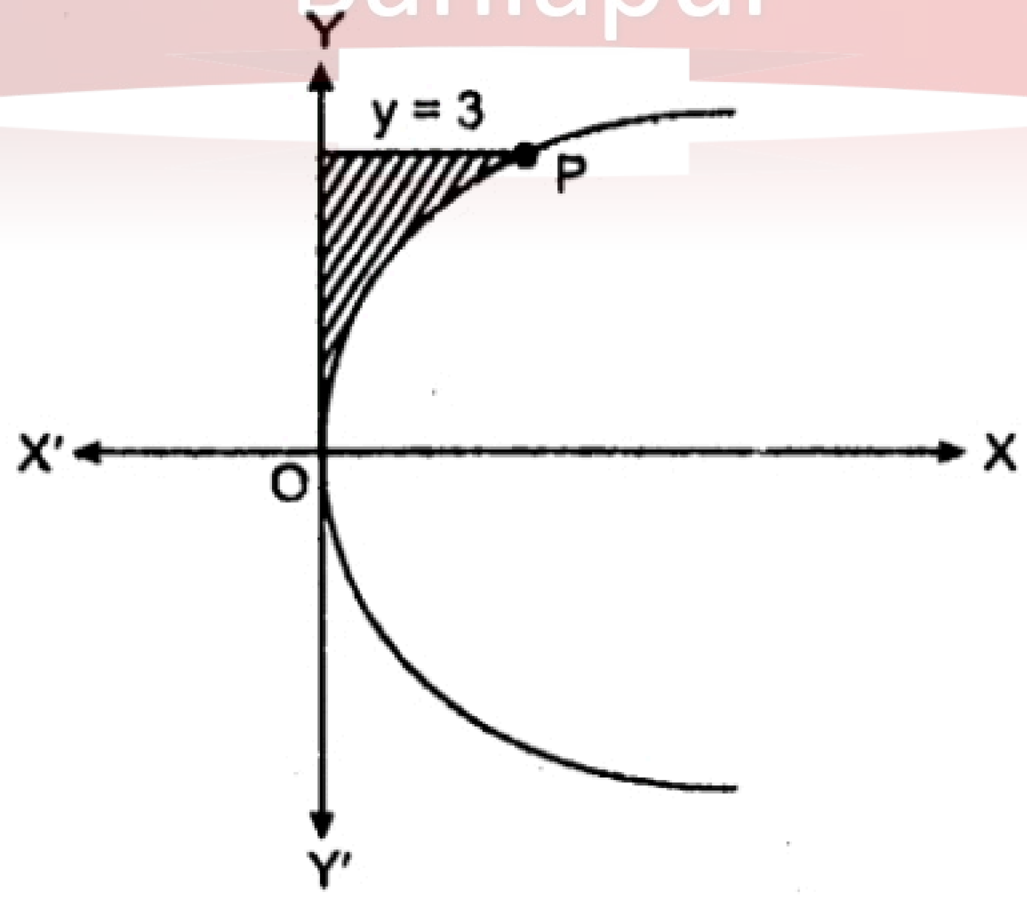
प्रश्न 13. वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

हल : दिया गया वक्र का समीकरण,

$$y^2 = 4x$$

अर्थात्
$$x = \frac{1}{4}y^2$$



अब रेखा $y = 3$ तथा वक्र $y^2 = 4x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_0^3 x\,dy$$

$$= \int_0^3 \frac{y^2}{4} dy = \frac{1}{4}\int_0^3 y^2 dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}[27 - 0]$$

$$= \frac{1}{12} \times 27 = \frac{9}{4} \text{ वर्ग इकाई।}$$

अत: विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

प्रश्नावली 8.2

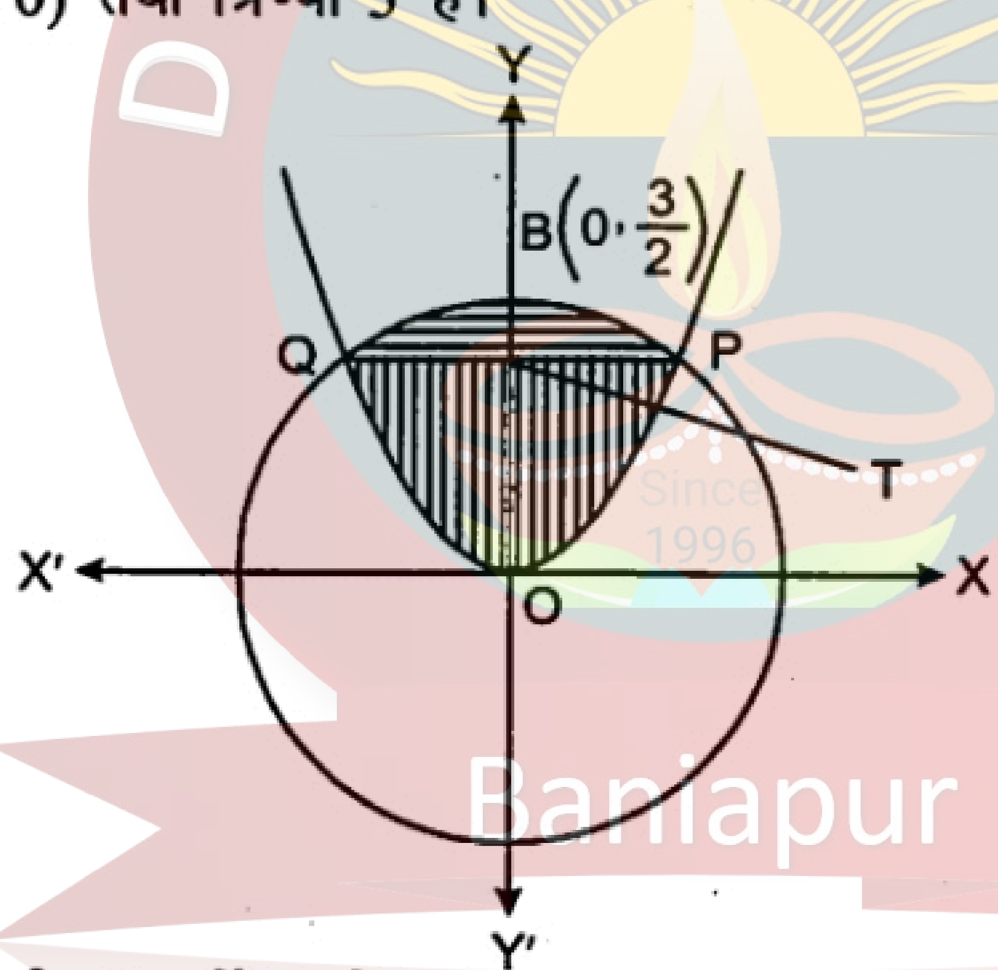
प्रश्न 1. परवलय $x^2 = 4y$ और वृत्त $4x^2 + 4y^2 = 9$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का समीकरण, $x^2 = 4y$ ...(i)

जिसका शीर्ष (0, 0) है और सममित रेखा OY है तथा $4x^2 + 4y^2 = 9$

या $$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$ ...(ii)

एक वृत्त है जिसका केन्द्र (0, 0) तथा त्रिज्या 3 है।



समीकरण (i) से x का मान समी. (ii) में रखने पर,

$$4y^2 + 16y - 9 = 0$$

$\therefore$ $$(2y - 1)(2y + 9) = 0 \text{ अर्थात् } y = \frac{1}{2} \text{ या } -\frac{9}{2}$$

जब $y = \frac{1}{2}$ हो,

तब $$x = \pm\sqrt{2}$$

मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल – क्षेत्र $QOPB$ का क्षेत्रफल

= 2 × (क्षेत्र BOP का क्षेत्रफल)

= 2 × (क्षेत्र TOP + क्षेत्र TPB का क्षेत्रफल)

$$= 2\left[\int_0^{1/2} \sqrt{4y}\, dy + \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{\frac{9}{4} - y}\, dy\right]$$

$$= 4\left[\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{1/2} + 2\left[\frac{y}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - y^2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{2y}{3}\right]_{1/2}^{3/2}$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} + 2\left[\left(0 - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}}\right) + \frac{9}{8}\left(\sin^{-1}1 - \sin^{-1}\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{9}{4}\left(\sin^{-1}1 - \sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$ उत्तर

प्रश्न 2. वक्रों $(x-1)^2 + y^2 = 1$ एवं $x^2 + y^2 = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $x^2 + y^2 = 1$ ...(i)

तथा $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ...(ii)

वक्र (i) एक वृत्त है जिसका केन्द्र (0, 0) है तथा त्रिज्या 1 इकाई है। जबकि समीकरण (ii) का केन्द्र (1, 0) है तथा त्रिज्या 1 इकाई है। दोनों वृत्त x-अक्ष के सापेक्ष सममित हैं।

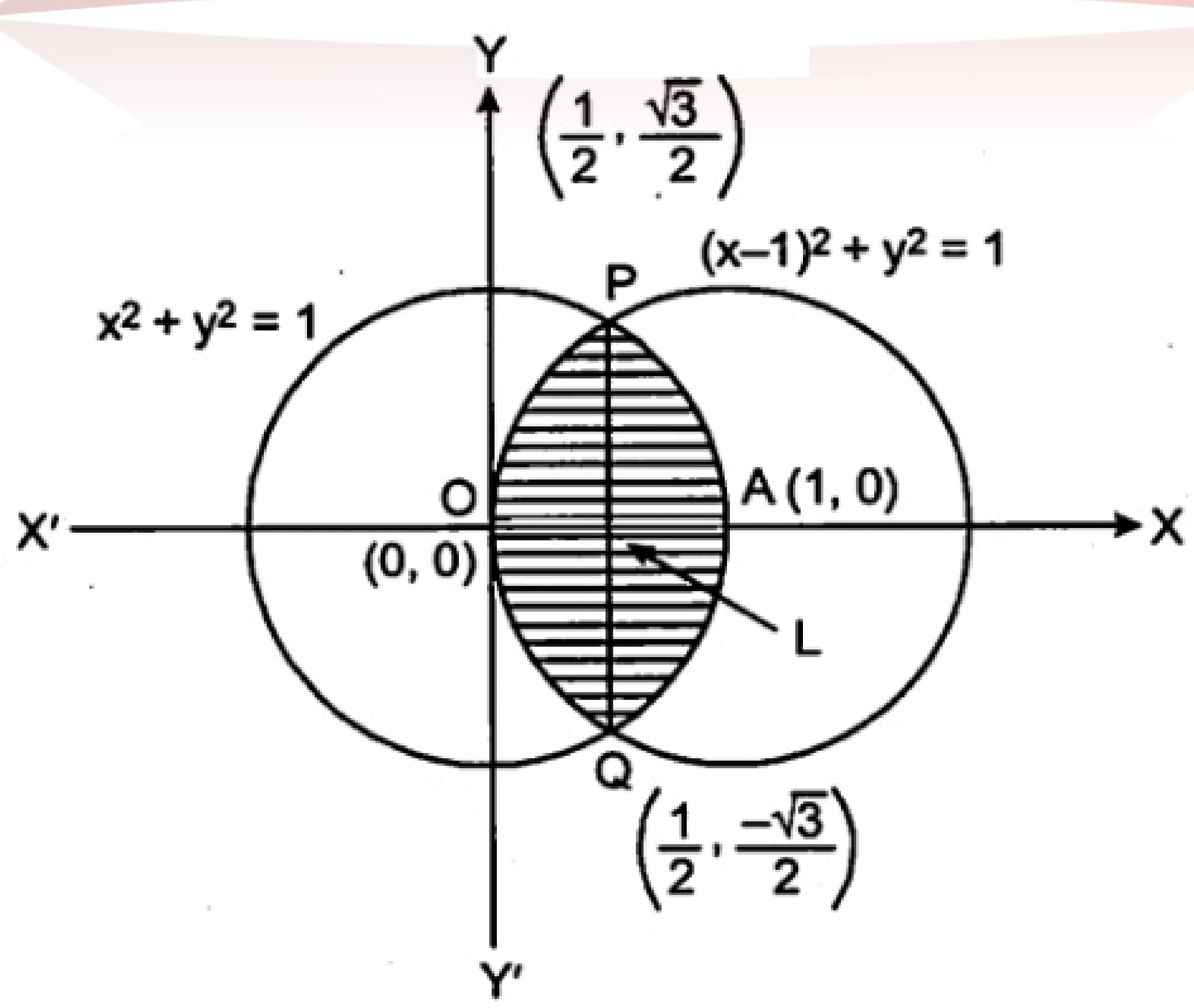
समीकरण (i) और (ii) को हल करने पर

$$-2x + 1 = 0 \text{ या } x = \frac{1}{2}$$

तब $$y^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

या $$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ प्रतिच्छेद बिन्दु $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ और $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ हैं।



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= OQAP$ क्षेत्रफल

$= 2 \times$ क्षेत्र OAP का क्षेत्रफल

$= 2 \times$ क्षेत्र OLP और LAP का क्षेत्रफल

$$= 2\left[\int_0^{1/2}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx + \int_{1/2}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)\right]_0^{1/2} + 2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_{1/2}^{1}$$

$$= 2\left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] - \left[0 + \frac{1}{2}\sin^{-1}(-1)\right]\right\}$$

$$+ \left[\left(0 + \frac{1}{2}\sin^{-1}1\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

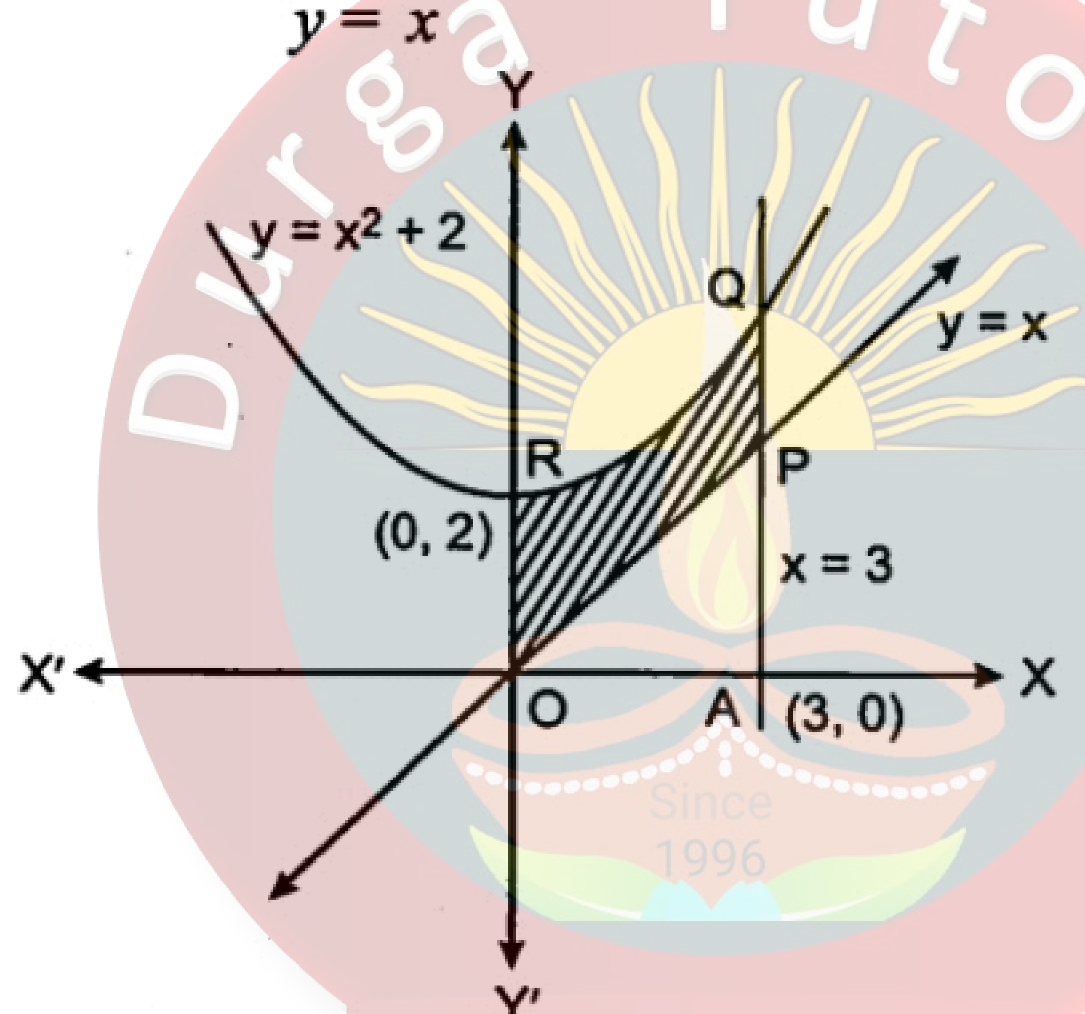
$$= \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ वर्ग इकाई। **उत्तर**

प्रश्न 3. वक्रों $y = x^2 + 2, y = x, x = 0$ एवं $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया परवलय का समीकरण, $y = x^2 + 2$ या $x^2 = y - 2$ ...(i)

जिसका शीर्ष (0, 2) है तथा सममित का अक्ष OY है।

तथा $y = x$ ...(ii)



यह मूल बिन्दु (0, 0) से होकर जाने वाली रेखा है।

रेखा $x = 3$, y-अक्ष के समान्तर है।

अतः अभीष्ट क्षेत्र का क्षेत्रफल = $ROPQ$ का क्षेत्रफल − OAP का क्षेत्रफल

$$= \int_0^3 (x^2 + 2)dx - \int_0^3 x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^3 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= (9 + 6) - \frac{9}{2} = 15 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$$ वर्ग इकाई। **उत्तर**

प्रश्न 4. समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (– 1, 0), , 3) एवं (3, 2) हैं।

हल : दिए गए शीर्ष हैं : (– 1, 0), (1, 3) और (3, 2)

हम जानते हैं कि बिन्दु (x_1, y_1), (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

माना बिन्दु $A(-1, 0)$, $B(1, 3)$ को मिलाने वाली रेखा AB का समीकरण

$$y - 0 = \frac{3-0}{1+1}(x+1)$$

$$y = \frac{3}{2}(x+1) \qquad \text{...(i)}$$

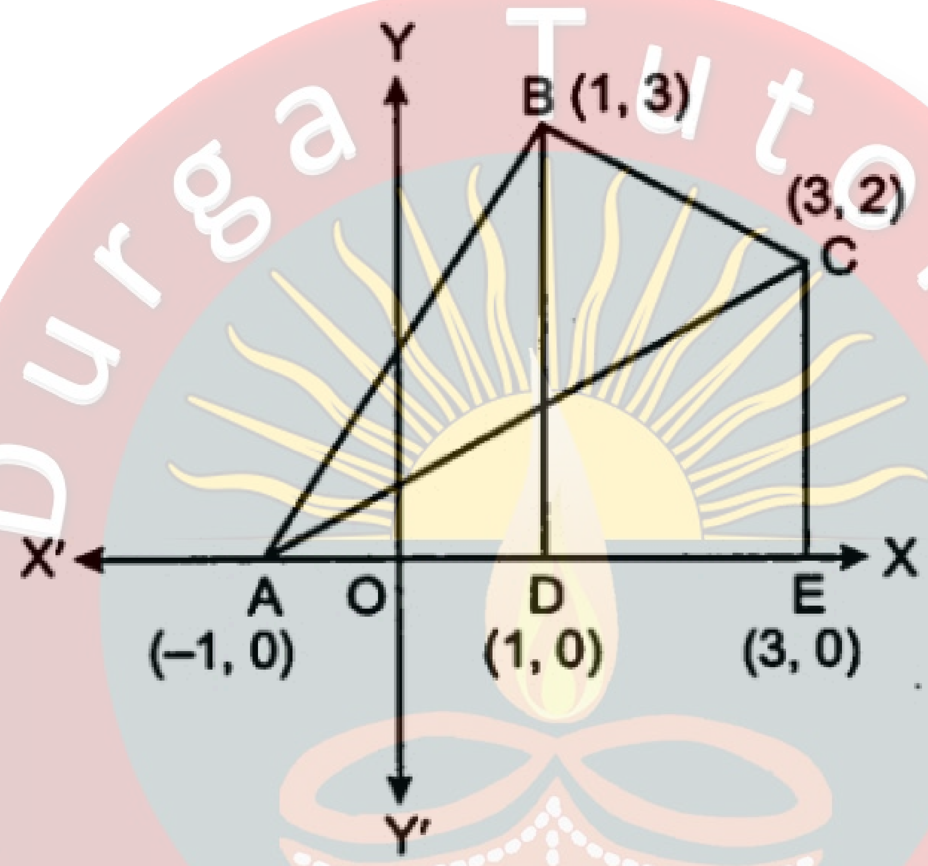
माना बिन्दु $B(1, 3)$, $C(3, 2)$ को मिलाने वाली रेखा BC का समीकरण

$$y - 3 = \frac{2-3}{3-1}(x-1) = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{2}(x-1)+3 = -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \qquad \text{...(ii)}$$

तथा बिन्दु $C(3, 2)$, $A(-1, 0)$ को मिलाने वाली रेखा AC का समीकरण

$$y - 0 = \frac{2-0}{3+1}(x+1) \text{ या } y = \frac{1}{2}(x+1) \qquad \text{...(iii)}$$



ΔABC का क्षेत्रफल = ΔABD का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज $BDEC$ का क्षेत्रफल – ΔACE का क्षेत्रफल

$$= \int_{-1}^{1} y\,dx\,(AB \text{ के लिए}) + \int_{1}^{3} y\,dx\,(BC \text{ के लिए}) - \int_{-1}^{3} y\,dx\,(AC \text{ के लिए})$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}(x+1)dx + \int_{1}^{3} \frac{7-x}{2}dx - \int_{-1}^{3} \frac{x+1}{2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\left|\frac{x^2}{2}+x\right|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left|7x-\frac{x^2}{2}\right|_{1}^{3} - \frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{2}+x\right|_{-1}^{3}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\left(21-\frac{9}{2}\right)-\left(7-\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}\times 2+\frac{1}{2}(14-4)-\frac{1}{2}\left(\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3+5-4 = 4.$$

उत्तर

प्रश्न 5. समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं के समीकरण $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ एवं $x = 4$ हैं।

हल : दिया है :

$$y = 2x + 1 \quad \ldots(i)$$
$$y = 3x + 1 \quad \ldots(ii)$$

तथा $$x = 4 \quad \ldots(iii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$$x = 0 \text{ तथा } y = 1$$

समीकरण (i) तथा (iii) को हल करने पर

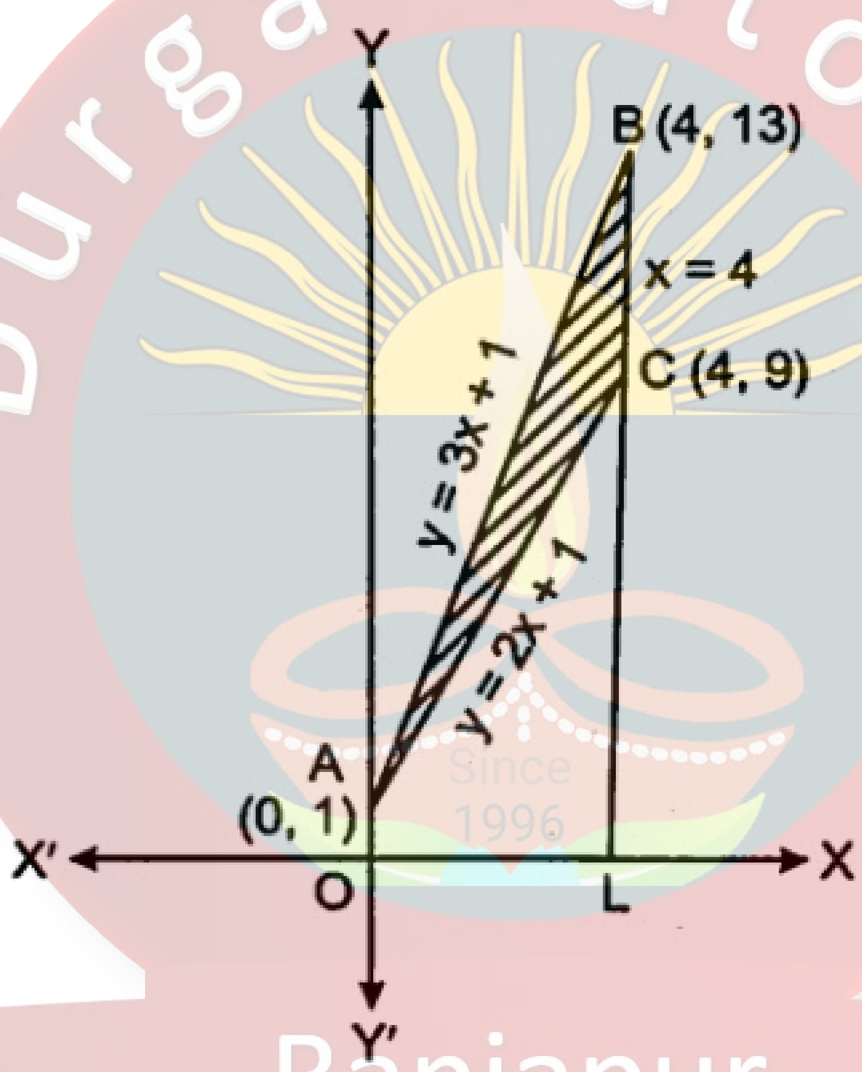
$$x = 4, \therefore y = 2 \times 4 + 1 = 9$$

समीकरण (ii) तथा (iii) को हल करने पर

$$x = 4,$$

$\therefore$ $$y = 3 \times 4 + 1 = 13$$

बिन्दु (0, 1), (4, 9), (4, 13) की सहायता से चित्र खींचिए।



त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = समलम्ब चतुर्भुज $AOLB$ का क्षेत्रफल – समलम्ब चतुर्भुज $AOLC$ का क्षेत्रफल

$$= \int_0^4 (3x+1)dx - \int_0^4 (2x+1)dx$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} + x\right)_0^4 - \left(\frac{2x^2}{2} + x\right)_0^4$$

$$= \left(\frac{3 \times 16}{2} + 4\right) - (16 + 4)$$

$$= 28 - 20 = 8 \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 6 एवं 7 में सही उत्तर का चयन कीजिए :

प्रश्न 6. वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखा $x + y = 2$ से घिरे छोटे भाग का क्षेत्रफल है :

(A) $2(\pi - 2)$ (B) $(\pi - 2)$ (C) $2\pi - 1$ (D) $2(\pi + 2)$

हल : $\because$ ΔABC का क्षेत्रफल = $OABC$ का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

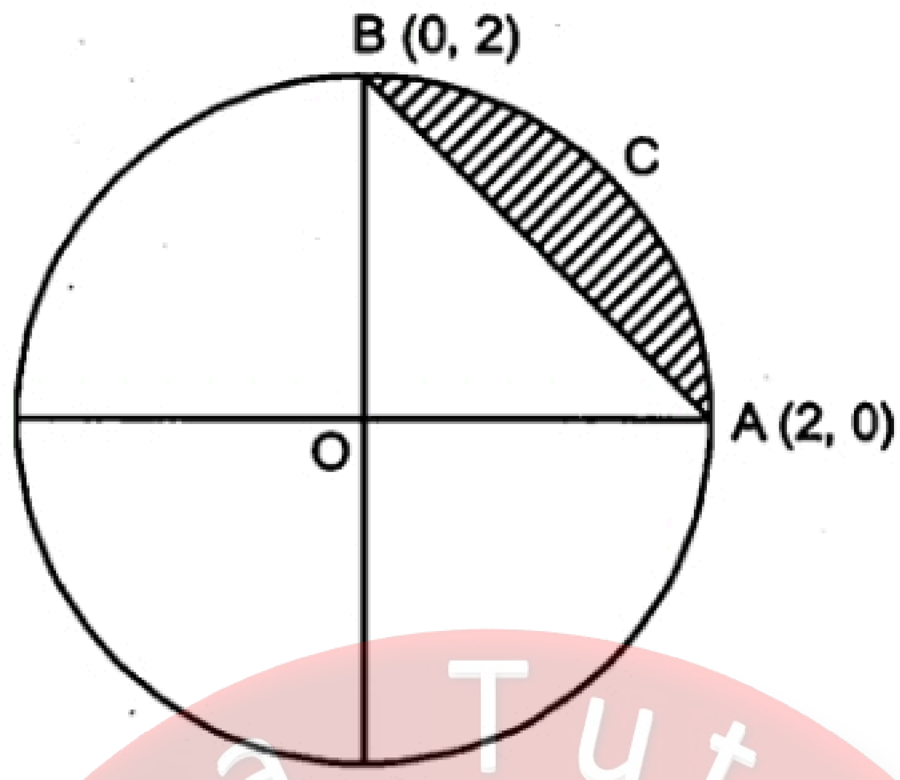
$$= \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx - \int_0^2 (2 - x)dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= [2 \sin^{-1} 1 - 0] + \left[4 - \frac{4}{2} - 0\right]$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{2} - 2$$

$$= \pi - 2$$



अत: विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 7. वक्रों $y^2 = 4x$ एवं $y = 2x$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

हल : दिया गया वक्र है :

$$y^2 = 4x \quad \text{...(i)}$$

$$y = 2x \quad \text{..(ii)}$$

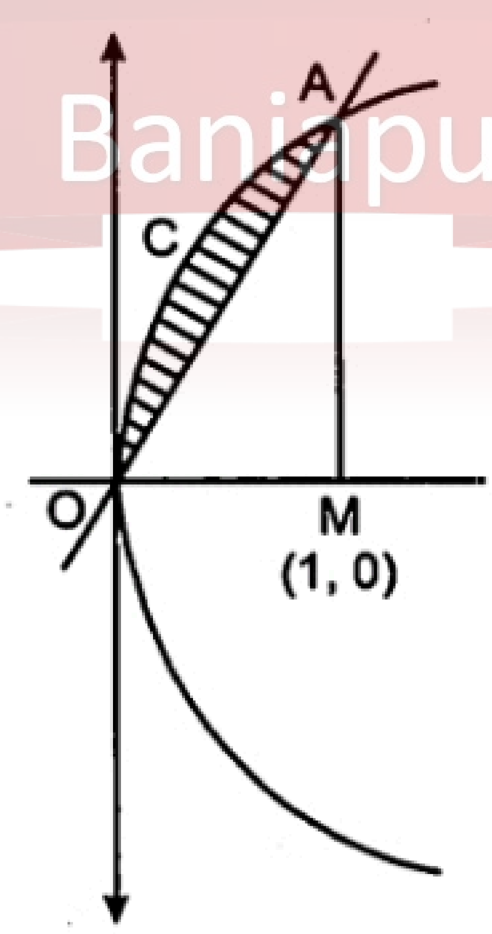
समीकरण (i) तथा (ii) से,

$$(4x)^2 = 4x$$

$$\therefore \quad x(x-1) = 0$$

$$x = 0, x = 1$$

अत: वक्र (i) और (ii) एक-दूसरे को $O(0, 0)$ तथा $A(1, 2)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।



वक्रों $y^2 = 4x$ तथा $y = 2x$ के मध्यवर्ती का क्षेत्रफल

= $OMACO$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल – OMA का क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 \sqrt{4x}\,dx = 2\frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^1 = \frac{4}{3} \times 1$$

$= \frac{4}{3}$ वर्ग इकाई

तथा $= \int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1$

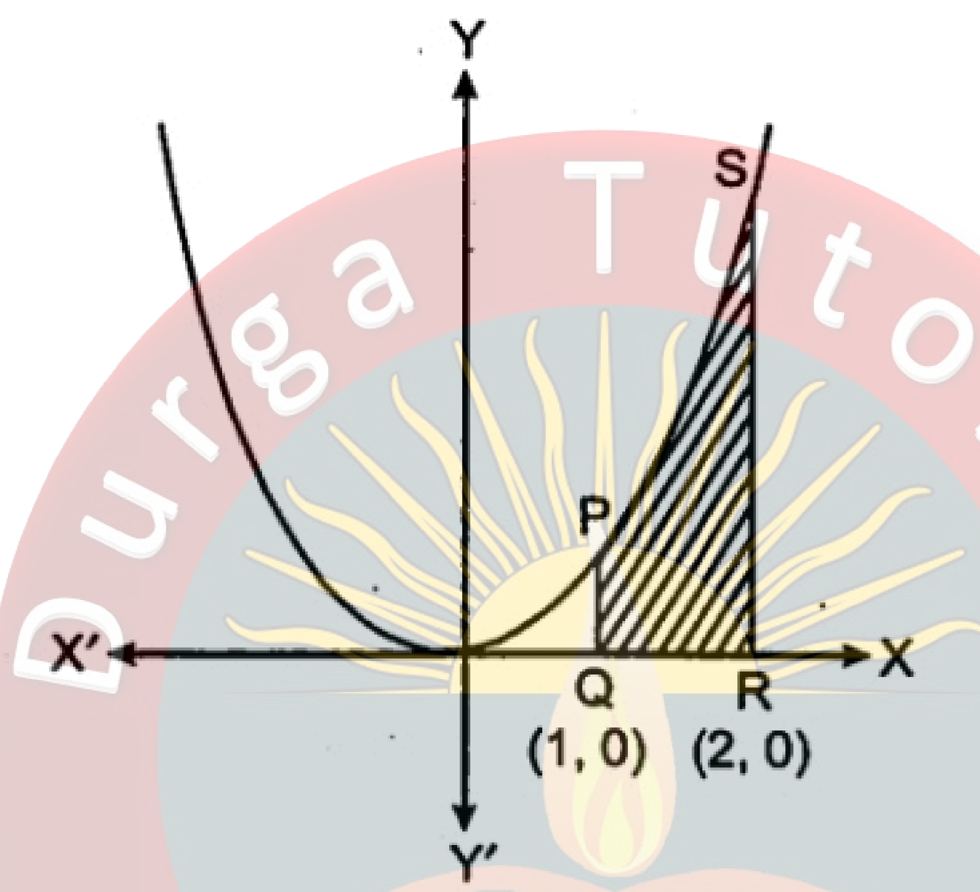
$$= \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

अत: विकल्प (B) सही है। उत्तर

अध्याय 8 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. दिए हुए वक्रों एवं रेखाओं से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :
(i) $y = x^2, x = 1, x = 2$ एवं x-अक्ष
(ii) $y = x^4, x = 1, x = 5$ एवं x-अक्ष

हल : प्रश्नानुसार परवलय $y = x^2$ का शीर्ष (0, 0) है और सममित रेखा OY है।



$y = x^2, x = 1, x = 2$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= $ क्षेत्र $PQRS$ का क्षेत्रफल

$$= \int_1^2 y\,dx$$

$$= \int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right]$$

$= \frac{7}{3}$ वर्ग इकाई। उत्तर

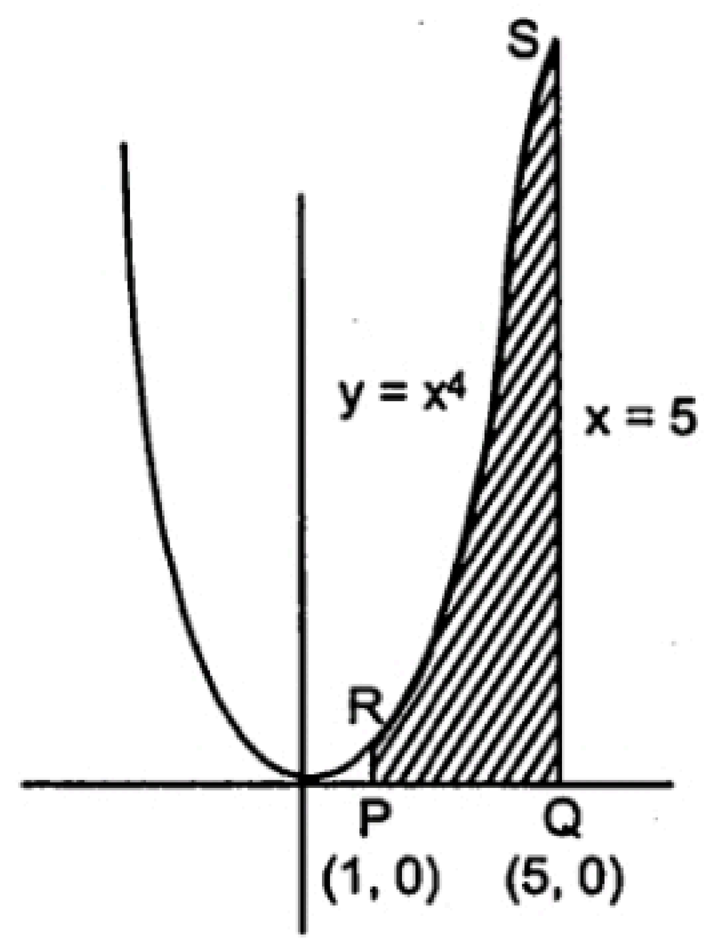
(ii) दिया है : $y = x^4$ बिन्दु (0, 0) से होकर जाता है। इसकी सममित रेखा OY है।
$y = x^4$ हेतु x तथा y के निम्नलिखित मान हैं :

x	−1	0	1	2	3
y	1	0	1	16	81

तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= $ क्षेत्र $PQRS$ का क्षेत्रफल

$$= \int_1^5 y\,dx = \int_1^5 x^4\,dx = \left|\frac{x^5}{5}\right|_1^5$$



$$= \left(\frac{5^5}{5} - \frac{1}{5}\right) = 625 - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3125-1}{5} = \frac{3124}{5}$$

$$= 624.8 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

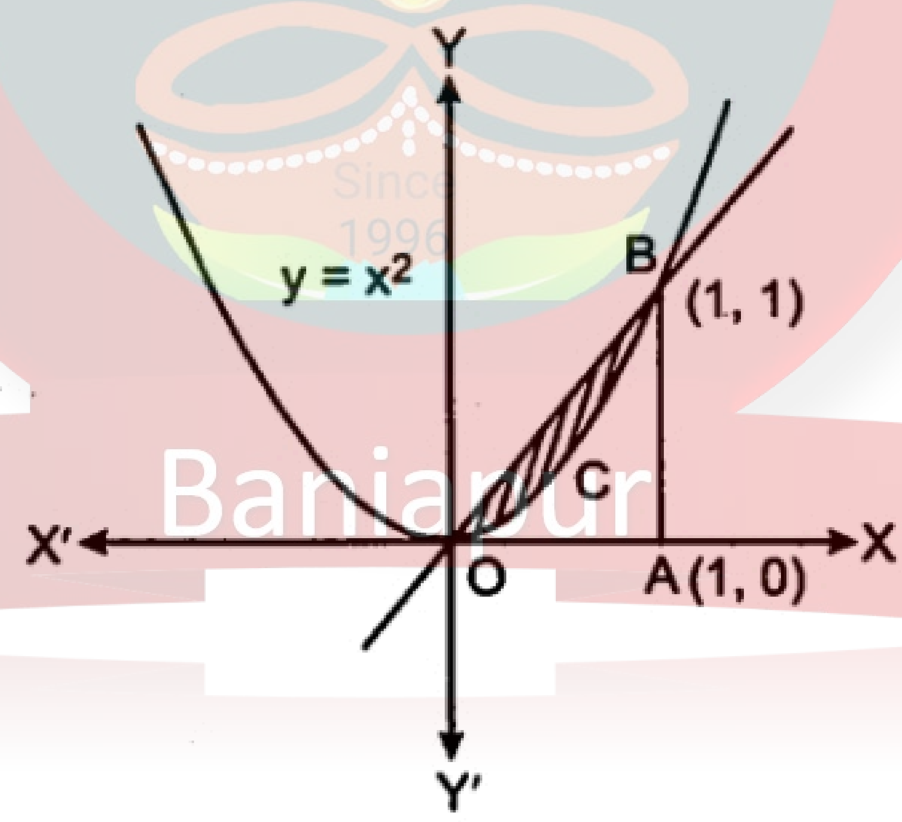
प्रश्न 2. वक्रों $y = x$ एवं $y = x^2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

$$y = x \qquad \text{...(i)}$$

तथा

$$y = x^2 \qquad \text{...(ii)}$$



y का मान $y = x^2$ में रखने पर

$$x = x^2 \text{ या } x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$\therefore$

$$x = 0, x = 1$$

जब $x = 0$ तो $y = 0$ तथा जब $x = 1$ तो $y = 1$

अत: $y = x^2$ एवं $y = x$, बिन्दु $(0, 0)$ तथा $(1, 1)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

वक्र $y = x^2$ एवं $y = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

= क्षेत्र OCB का क्षेत्रफल

= क्षेत्र OAB का क्षेत्रफल – क्षेत्र $OABC$ का क्षेत्रफल

$$= \int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 y_2 \, dx$$

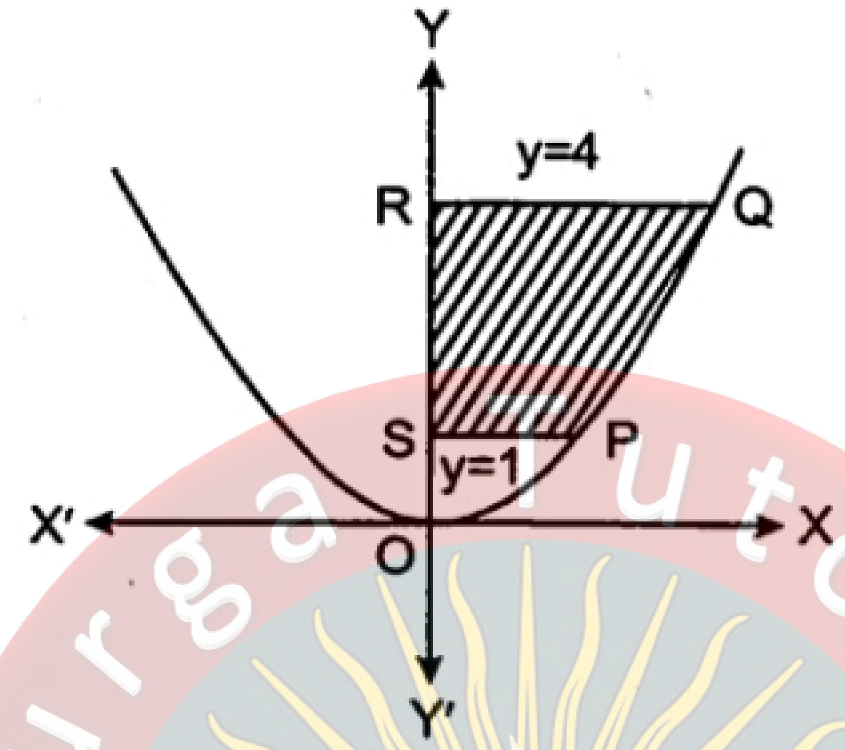
$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^1 x \, dx - \int_0^1 x^2 dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 3. प्रथम चतुर्थांश में सम्मिलित एवं $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$ तथा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $y = 4x^2$ एक परवलय जिसका शीर्ष (0, 0) है।



अब $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$ तथा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \text{क्षेत्र } PQRS \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= \int_1^4 x\,dy = \int_1^4 \sqrt{\frac{y}{4}}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[y^{3/2}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left[4^{3/2} - 1^{3/2}\right]$$

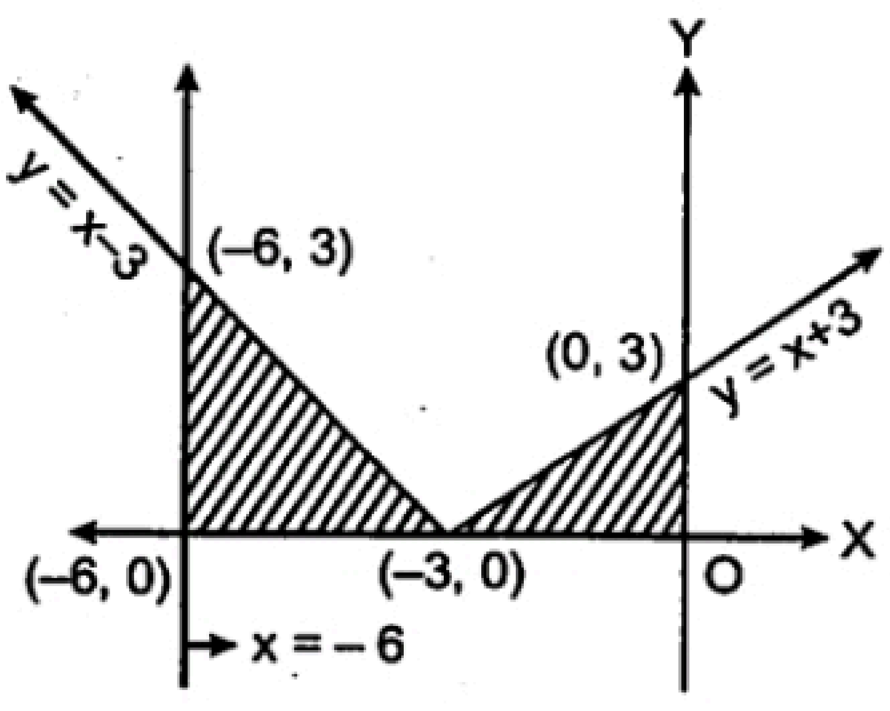
$$= \frac{1}{3}(8-1)$$

$$= \frac{7}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 4. $y = |x + 3|$ का ग्राफ खींचिए एवं $\int_{-6}^{0} |x + 3|\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $y = |x + 3|$

$$= \begin{cases} (x+3), & x \geq -3 \\ -(x+3), & x < -3 \end{cases}$$



जब $x < -3$ अर्थात् $y = -x - 3$

x	-4	-5	-6
y	1	2	3

और जब $x \geq -3$

x	-1	-2	-3
y	2	1	0

अभीष्ट क्षेत्रफल,

$$\therefore \quad \int_{-6}^{0} |x+3|\, dx = \int_{-6}^{0} |x+3|\, dx + \int_{-1}^{0} |x+3|\, dx$$

$$= -\int_{-6}^{-3} -(x+3)dx + \int_{-3}^{0} (x+3)\, dx$$

$$= -\left|\frac{x^2}{2} + 3x\right|_{-6}^{-3} + \left|\frac{x^2}{2} + 3x\right|_{-3}^{0}$$

$$= -\left[\frac{9}{2} - 9 - 18 + 18\right] + \left[0 + 0 + \frac{9}{2} + 4\right]$$

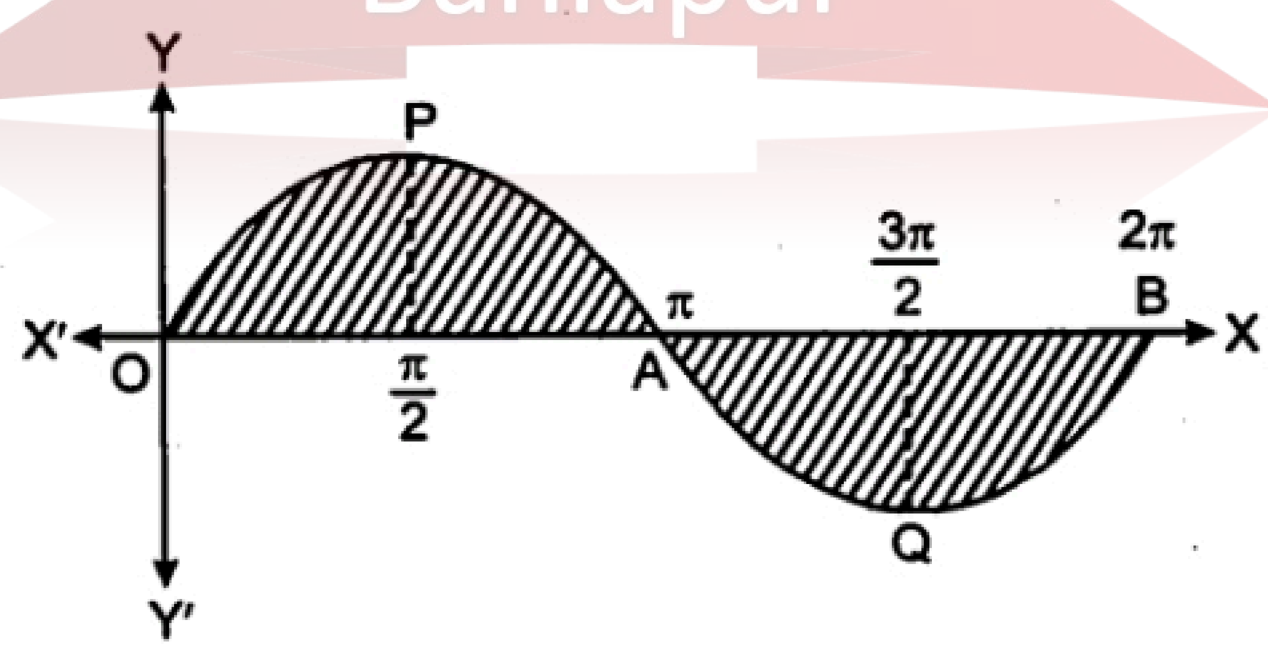
$$= \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 5. $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ तथा वक्र $y = \sin x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $y = \sin x$ के ग्राफ पर x के कुछ मानों के संगत y के मान निम्न प्रकार हैं। इन बिन्दुओं को वक्र द्वारा मिलाने से निम्नानुसार ग्राफ प्राप्त होता है :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
y	0	0.5	0.7	0.8	1	0.5	0.7	0.8	0



$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^{\pi} y dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-y) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx$$

$$= |-\cos x|_0^{\pi} - |-\cos x|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= (-\cos \pi + \cos \theta) + \cos 2\pi - \cos \pi)$$

$$= [-(-1) + 1] + [1 - (-1)]$$

$$= (1 + 1) + (1 + 1)$$

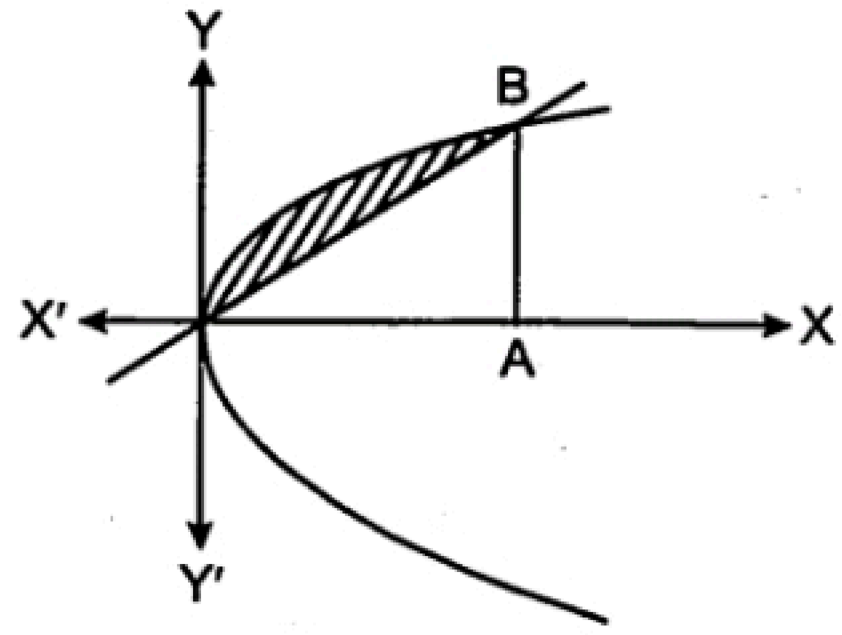
$$= 4 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 6. परवलय $y^2 = 4ax$ एवं रेखा $y = mx$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए वक्र और सरल रेखा का समीकरण

$$y^2 = 4ax \quad \text{...(i)}$$
$$y = mx \quad \text{...(ii)}$$



y का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$m^2x^2 = 4ax \text{ या } x = \frac{4a}{m^2}, \text{ और } x = 0$$

इस प्रकार वक्र $y^2 = 4ax$ और रेखा $y = mx$ बिन्दु $O(0, 0)$ तथा $P\left(\frac{4a}{m^2}, \frac{4a}{m}\right)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अत: $y^2 = ax$ तथा $y = mx$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= $ क्षेत्र OCB का क्षेत्रफल

$= $ क्षेत्र $ABCO$ का क्षेत्रफल $- \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\frac{4a}{m^2}} y_1 dx - \int_0^{\frac{4a}{m^2}} y_2 dx$$

जबकि y_1 वक्र $y^2 = 4ax$ और y_2 रेखा $y = mx$ के लिए प्रयुक्त करने पर

$$= \int_0^{\frac{4a}{m^2}} \sqrt{4ax}\, dx - \int_0^{\frac{4a}{m^2}} mx\, dx$$

$$= 2\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^{\frac{4a}{m^2}} - \frac{m}{2}\left[x^2\right]_0^{\frac{4a}{m^2}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a} - \left(\frac{4a}{m^2}\right)^{3/2} - \frac{m}{2}\left(\frac{4a}{m^2}\right)^2$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\, 8.\frac{a^{3/2}}{m^3} - \frac{m}{2}\frac{16a^2}{m^4} = \frac{32}{3}\frac{a^2}{m^3} = \frac{8a^2}{m^3}$$

$$= \frac{(32-24)a^2}{3m^3} = \frac{8a^2}{3m^3} \text{ वर्ग इकाई।}$$ **उत्तर**

प्रश्न 7. परवलय $4y = 3x^2$ एवं रेखा $2y = 3x + 12$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय तथा रेखा के समीकरण

$$4y = 3x^2 \quad \text{...(i)}$$
$$2y = 3x + 12 \quad \text{...(ii)}$$

$2y$ का मान समीकरण (i) में रखने पर

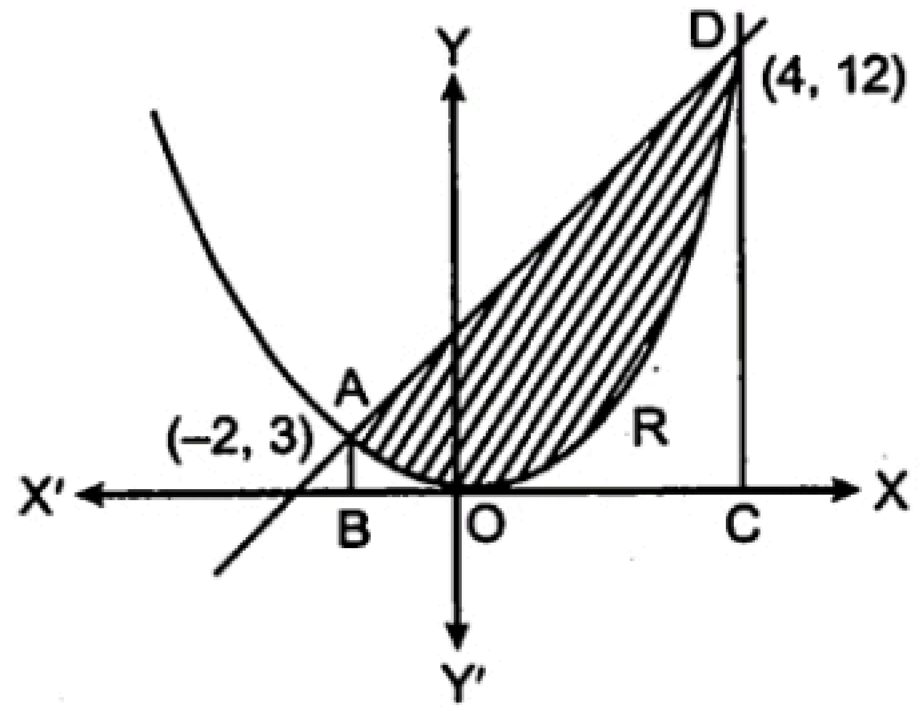
$$2(3x + 12) = 3x^2 \text{ या } 3x^2 - 6x - 24 = 0$$

या $\quad x^2 - 2x - 8 = 0$ या $(x-4)(x+2) = 0$

$\therefore \quad x = 4, -2$

जब $\quad x = 4$ तो $2y = 12 + 12 = 24$ या $y = 12$

तथा जब $\quad x = -2$ तो $2y = -6 + 12 = 6$ या $y = 3$



इस प्रकार परवलय और रेखा एक-दूसरे को $P(-2, 3)$ तथा $Q(4, 12)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र AOD का क्षेत्रफल

= समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल – क्षेत्रफल $ABCDA$

$= \int_{-2}^{4} y_1 dx$ (रेखा के लिए) $- \int_{-2}^{4} y_2 dx$ (परवलय के लिए)

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(3x+12)dx - \int_{-2}^{4}\frac{3x^2}{4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2}{2}+12x\right]_{-2}^{4} - \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{4}$$

$$= \frac{1}{2}[(24+48)-(6-24)] - \frac{3}{4}\left(\frac{64}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}[72+18] - \frac{3}{4}\cdot\frac{72}{3}$$

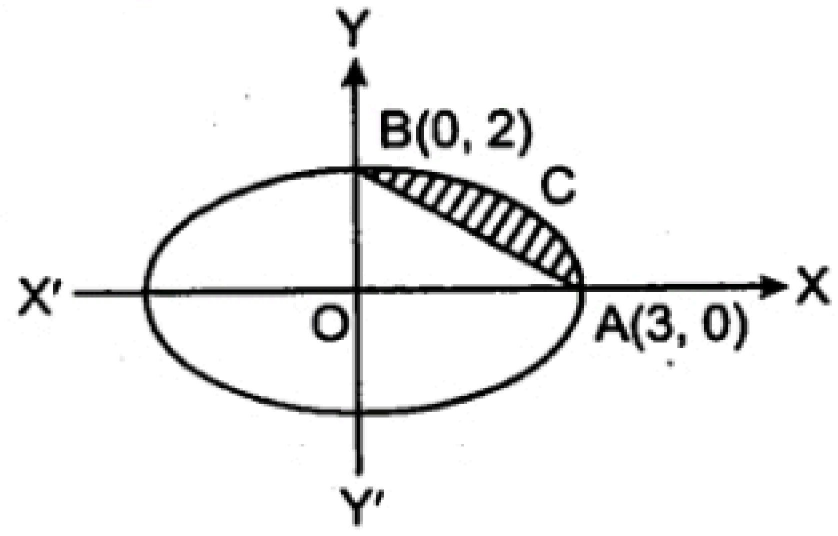
$= \frac{90}{2} - 18 = 45 - 18 = 27$ वर्ग इकाई। **उत्तर**

प्रश्न 8. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ एवं रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$ ...(i)

रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{2} = 1$ ...(ii)

दोनों समीकरणों से प्राप्त बिन्दु $A(3, 0)$, $B(0, 2)$ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं।



अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^1 y_1\, dx$ (दीर्घ वृत्त के लिए) $- \int_0^3 y_2 dx$ (रेखा के लिए)

$$= \int_0^3 \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\, dx - \int_0^3 2\left(1-\frac{x}{3}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x) dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(0+\frac{9}{2}\sin^{-1}1\right)-(0)\right] - \frac{2}{3}\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

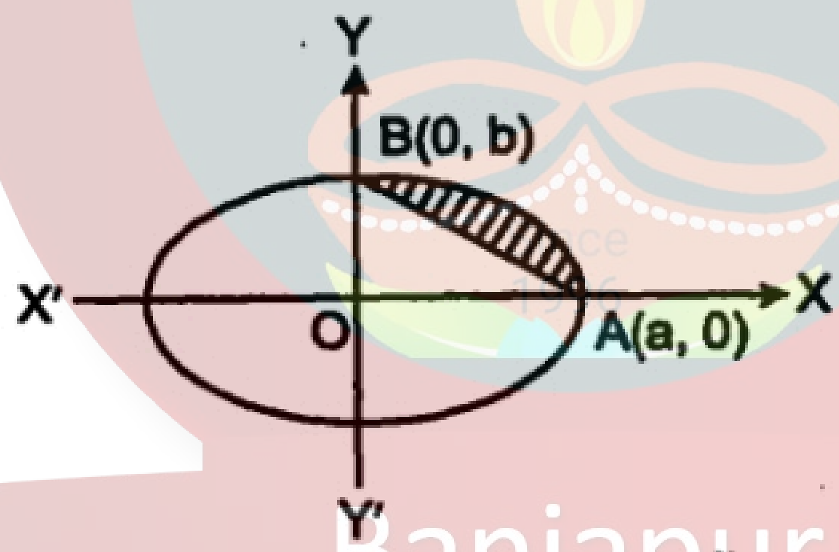
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\left[9-\frac{9}{2}\right] = \frac{3}{2}\pi - \frac{2}{3}\times\frac{9}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\pi - 3 = \frac{3}{2}(\pi-2) \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 9. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ एवं रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ...(i)

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ...(ii)



दोनों समीकरण बिन्दु $A(a, 0)$ तथा $B(0, b)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र BAC का क्षेत्रफल

= क्षेत्र $OACB$ का क्षेत्रफल – क्षेत्र OAB का क्षेत्रफल

$$= \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\, dx - \int_0^a b\left(1-\frac{x}{a}\right) dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx - \frac{b}{a}\int_0^a (a-x) dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a - \frac{b}{a}\left[ax-\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0\right] - \frac{b}{a}\left[a^2-\frac{a^2}{2}\right]$$

$$= \frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{ab}{4}(\pi - 2) \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 10. परवलय $x^2 = y$, रेखा $y = x + 2$ और x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $x^2 = y$ ...(i)

और $y = x + 2$ ...(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से,

$$x^2 = x + 2$$

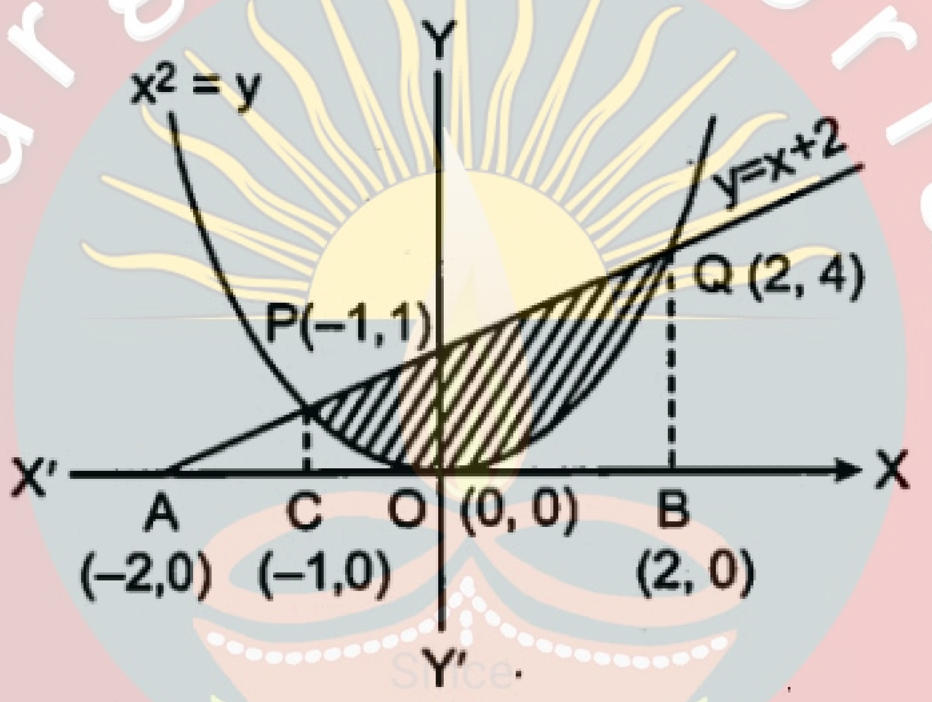
या $x^2 - x - 2 = 0$

या $(x - 2)(x + 1) = 0$

या $x = 2, x = -1$

$\therefore$ जब $x = 2$ तो $y = (2)^2 = 4$

और जब $x = -1$ तो $y = (-1)^2 = 1$



अत: बिन्दु (2, 4) और (– 1, 1) प्रतिच्छेदन बिन्दु हैं।

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_{-1}^{2} [y \text{ (रेखा के लिए)} - y \text{ (परवलय के लिए)}]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left|\frac{1}{2}(4 - 1) + 2(2 + 1) - \frac{1}{3}(8 + 1)\right|$$

$$= \frac{3}{2} + 6 - 3 = \frac{9}{2} \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 11. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए वक्र $|x| + |y| = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण

$x + y = 1$ ...(i)

$x - y = 1$ ...(ii)

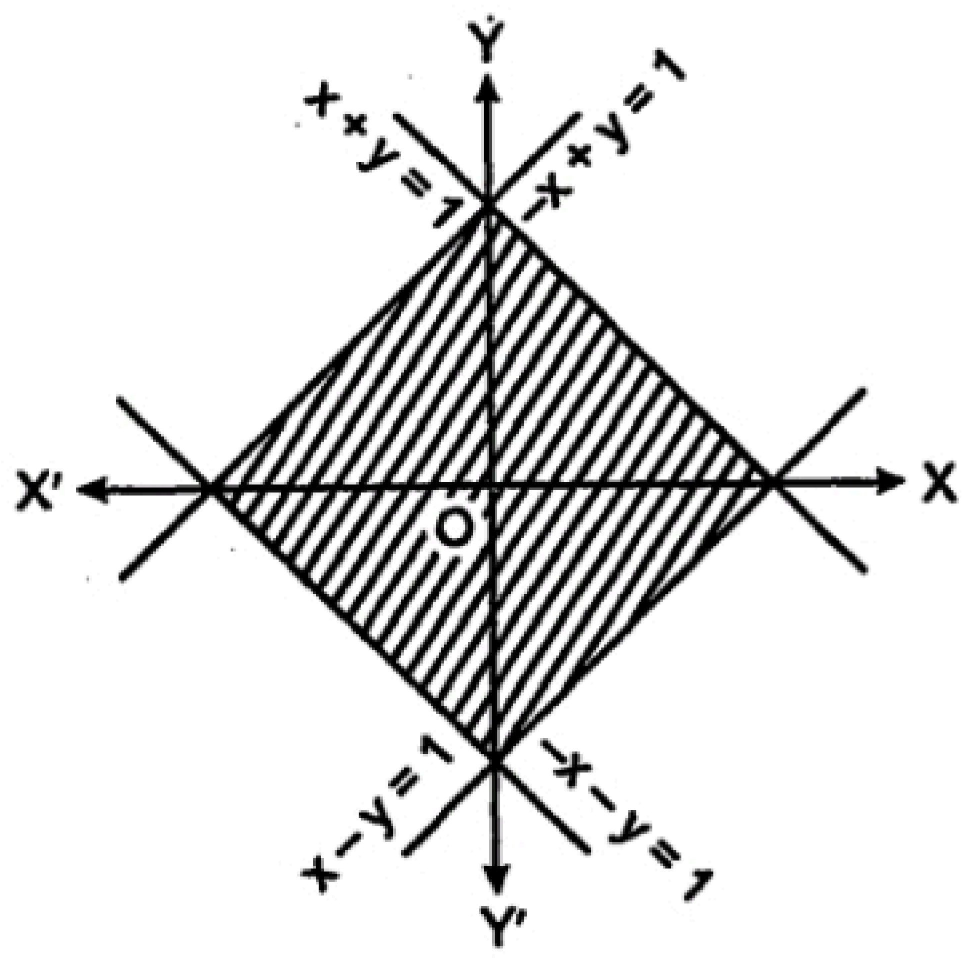
$-x + y = 1$ ...(iii)

$-x - y = 1$ ...(iv)

इनसे घिरे क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 4\int_{0}^{1} y \text{ (रेखा (i) के लिए)}\, dx$$

क्योंकि आकृति x-अक्ष तथा y-अक्ष दोनों के लिए सममित है।



$$= 4\int_0^1 (1-x)dx = 4\left(x-\frac{x^2}{2}\right)_0^1$$

$$= 4\left(1-\frac{1}{2}-0\right)$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 12. वक्रों $\{(x, y), y > x^2$ तथा $y = |x|\}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : वक्र $x^2 = y$ एक परवलय है जिसका शीर्ष (0, 0) है तथा सममित अक्ष OY है।

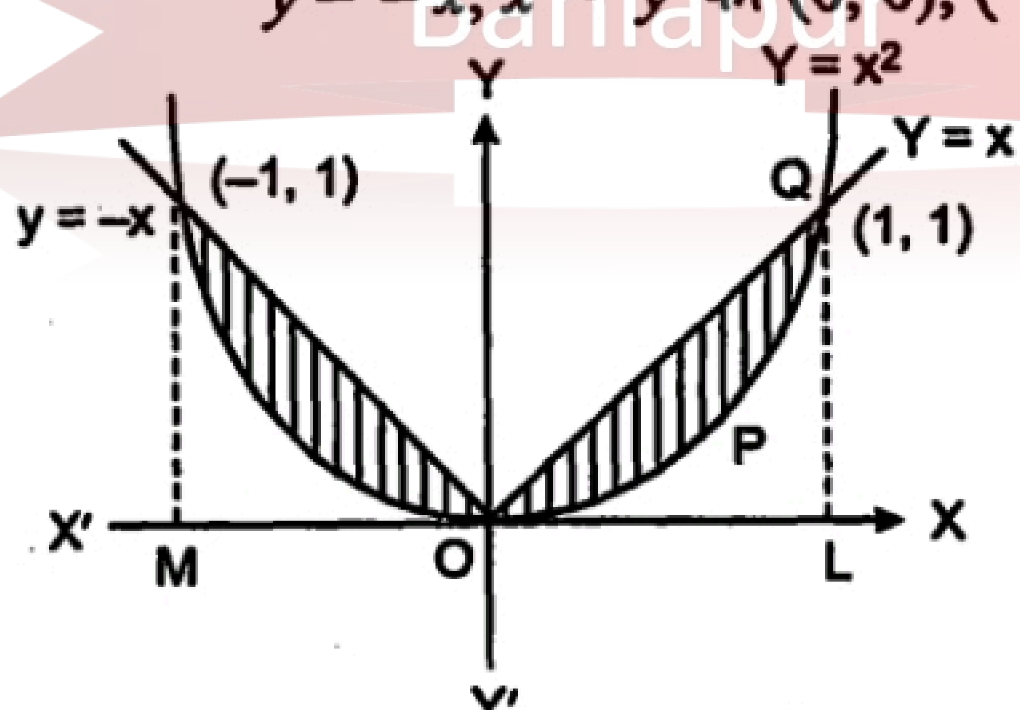
समीकरण $y = |x|$ दो रेखाओं को निरूपित करता है।

जब $x > 0$ तो $y = x$

तथा जब $x < 0,\ y = -x$

अर्थात् $y = x, x^2 = y$ को (0, 0), (1, 1) पर प्रतिच्छेद करती है।

और $y = -x, x^2 = y$ को (0, 0), (– 1, 1) पर प्रतिच्छेद करती है।



अतः: अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 × क्षेत्र OPQ का क्षेत्रफल

= 2[ΔOLQ का क्षेत्रफल – क्षेत्र $OLQPO$ का क्षेत्रफल

$$= 2\left[\int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 dx\right] y_1 \text{ रेखा } y = x \text{ तथा } y_2$$

वक्र $x^2 = y$ के लिए प्रयुक्त करने पर

$$= 2\left[\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2 dx\right]$$

$$= 2\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{2}\right]_0^1\right\} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 13. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए, एक ऐसे त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक $A(2, 0)$, $B(4, 5)$ एवं $C(6, 3)$ हैं।

हल : दिया है : रेखा AB का समीकरण

$$y - 0 = \frac{5-0}{4-2}(x-2)$$

अर्थात्
$$y = \frac{5}{2}(x-2)$$

इसी प्रकार रेखा BC का समीकरण है

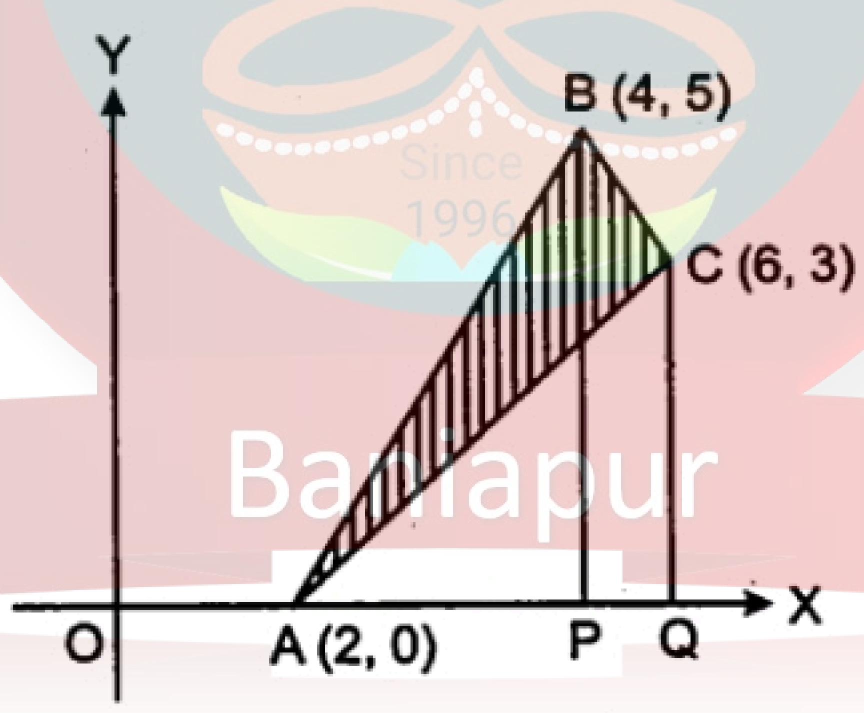
$$y - 5 = \frac{3-5}{6-4}(x-4)$$

या
$$y = -x + 9$$

तथा रेखा CA का समीकरण है

$$y - 3 = \frac{0-3}{2-6}(x-6)$$

या
$$y = \frac{3}{4}(x-2)$$



अभीष्ट क्षेत्रफल = ΔABC द्वारा घेरा गया क्षेत्र का क्षेत्रफल

= क्षेत्र ΔAPB का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज $BPQC$ का क्षेत्रफल – क्षेत्र ΔAQC का क्षेत्रफल

$$= \frac{5}{2}\int_2^4 (x-2)dx + \int_4^6 -(x-9)dx - \frac{3}{4}\int_2^6 (x-2)dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[\frac{(x-2)^2}{2}\right]_2^4 - \left[\frac{(x-9)^2}{2}\right]_4^6 - \frac{3}{4}\left[\frac{(x-2)^2}{2}\right]_2^6$$

$$= \frac{5}{4}[2^2 - 0] - \frac{1}{2}[(-3)^2 - (-5)^2] - \frac{3}{8}[(4)^2 - 0]$$

$$= \frac{5}{4} \times 4 - \frac{1}{2}[9 - 25] - \frac{3}{8}(16 - 0)$$

$$= 5 + 8 - 6 = 7 \text{ वर्ग इकाई।}$$ उत्तर

प्रश्न 14. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए, रेखाओं $2x + y = 4$, $3x - 2y = 6$ एवं $x - 3y + 5 = 0$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण हैं :

$$2x + y = 4 \quad \text{...(i)}$$
$$3x - 2y = 6 \quad \text{...(ii)}$$
$$x - 3y = -5 \quad \text{...(iii)}$$

समीकरण (i) को 2 से गुणा करके (ii) में जोड़ने पर

$$7x = 14 \text{ या } x = 2$$

अब समीकरण (i) से

$$4 + y = 4 \quad \text{या } y = 0$$

अत: बिन्दु C के निर्देशांक = (2, 0).

समीकरण (iii) को 2 से गुणा करके समीकरण (i) में से घटाने पर

$$7y = 14 \quad \text{या } y = 2$$

पुन: समीकरण (i) से $\quad 2x + 2 = 4 \quad$ या $x = 1$

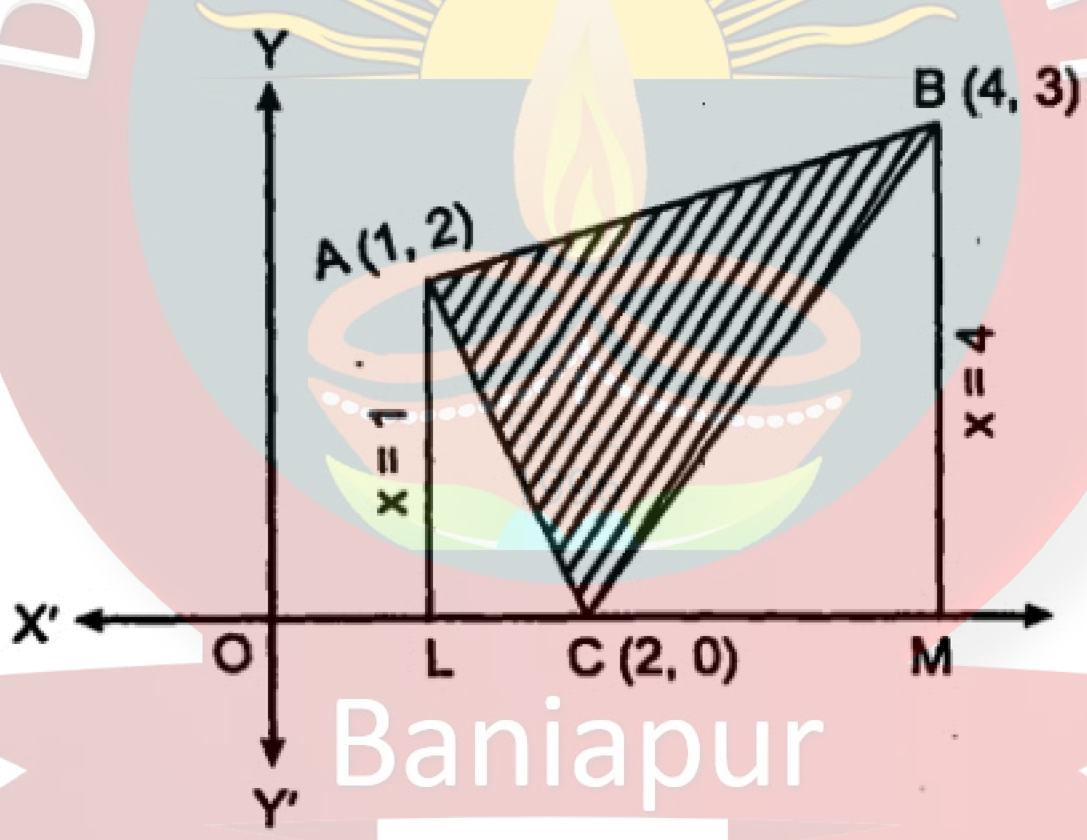
अत: बिन्दु A के निर्देशांक = (1, 2)

समीकरण (iii) को 3 से गुणा करके समीकरण (ii) में घटाने पर,

$$7y = 21 \quad \text{या } y = 3$$

अब समीकरण (ii) से $3x - 6 = 6$ या $x = 4$

अत: बिन्दु B के निर्देशांक (4, 3) हैं।



त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = समलम्ब चतुर्भुज $ALMB$ का क्षेत्रफल − ΔALC का क्षेत्रफल − ΔBCM का क्षेत्रफल

$$= \int_1^4 \frac{x+5}{3} dx - \int_1^2 (4 - 2x) dx - \int_2^4 \frac{3x-6}{2} dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^4 - [4x - x^2]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{3}\left([8+20] - \left(\frac{1}{2} + 5\right)\right) - [(8-4) - (4-1)] - \frac{1}{2}[(24-24) - (6-12)]$$

$$= \frac{1}{3}\left[28 - \frac{11}{2}\right] - [4-3] - \frac{1}{2}(0+6)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{45}{2} - 1 - 3 = \frac{15}{2} - 4 = \frac{7}{2} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उत्तर

प्रश्न 15. क्षेत्र $\{(x, y) : y^2 \le 4x, 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

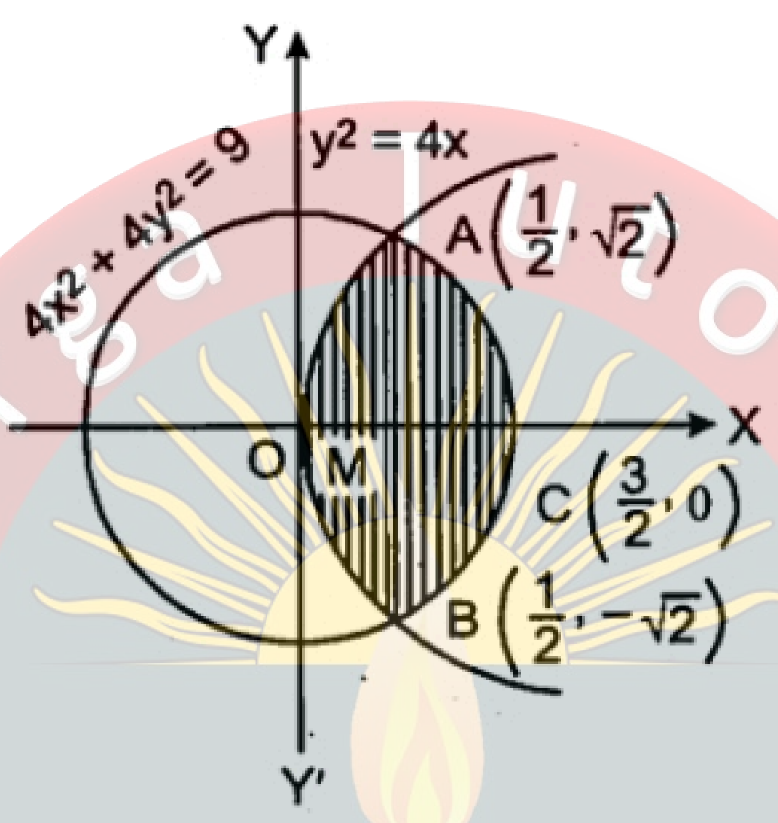
हल : दिया है : $y^2 = 4x$ एक परवलय है जिसका शीर्ष मूल बिन्दु (0, 0) है जिसका अक्ष x-अक्ष है साथ ही $4x^2 + 4y^2 = 9$ एक वृत्त को निरूपित करता है जिसका केन्द्र (0, 0) और त्रिज्या $= \dfrac{3}{2}$ है।

अत: $$y^2 = 4x \quad \text{...(i)}$$

और $$x^2 + y^2 = \frac{9}{4} \quad \text{...(ii)}$$

समीकरण (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$A\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ और $B\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$ प्राप्त होते हैं। दोनों ही वक्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित हैं।



$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= 2\left(\int_0^{1/2} 2\sqrt{x}\,dx + \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\,dx\right)$$

$$= 4\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{1/2} + 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3/2}\right)\right]_{1/2}^{3/2}$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - 0\right) + \left[x\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)\right]_{1/2}^{3/2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + 0 + \frac{9}{4}\sin^{-1}(1) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$ **उत्तर**

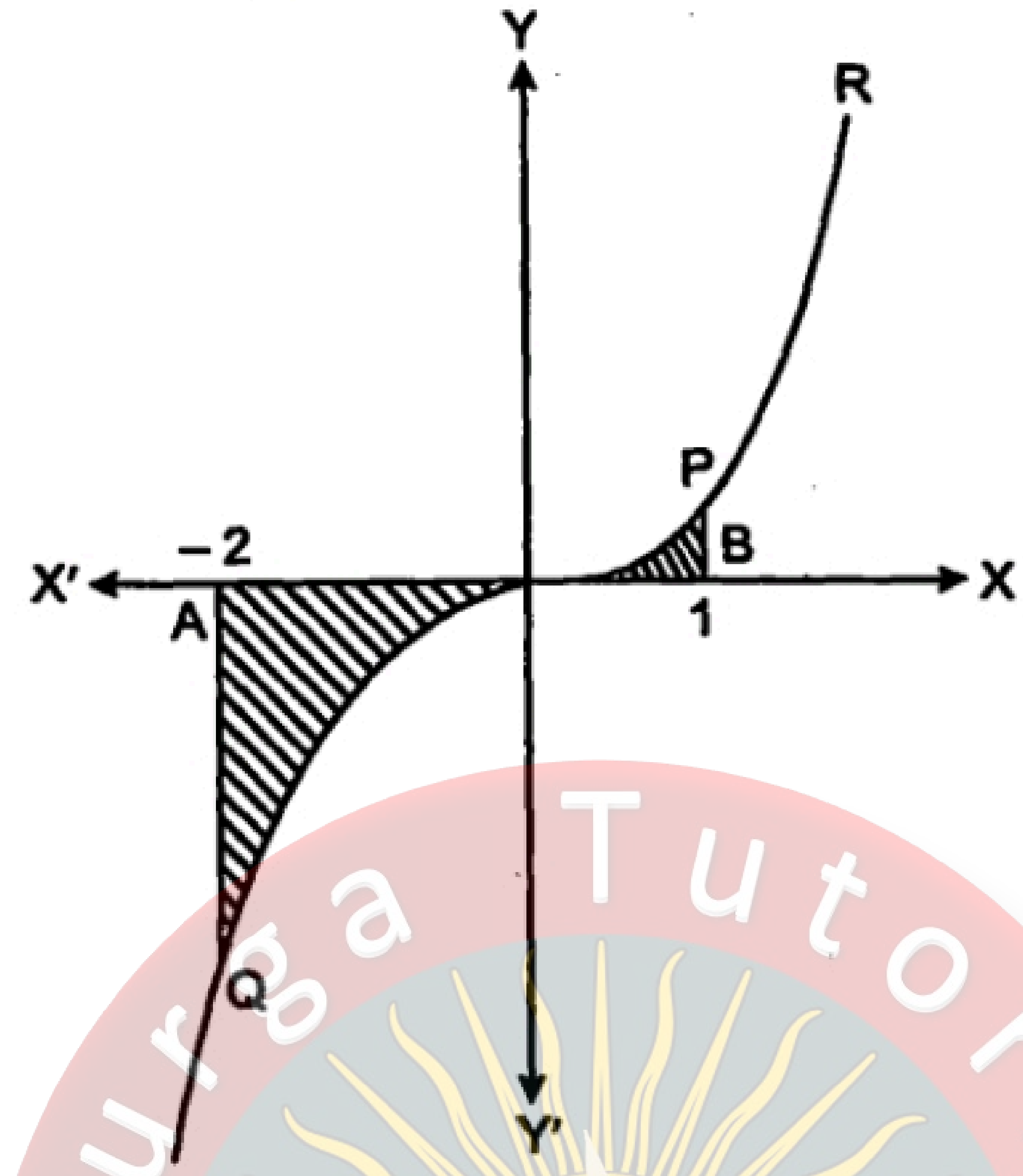
प्रश्न 16 से 19 तक के प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए—

प्रश्न 16. वक्र $y = x^3$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -2$, $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है—

(A) -9 (B) $-\dfrac{15}{4}$ (C) $\dfrac{15}{4}$ (D) $\dfrac{17}{4}$

हल : दिया गया वक्र $y = x^3$

अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ = धनात्मक है।



∴ दिया वक्र वर्द्धमान है,

$$\frac{dy}{dx} = 0, x = 0$$

∴ x-अक्ष पर स्पर्श रेखा है।

$$f(-x) = -f(x) \therefore (-x)^3 = -x^3$$

$y = x^3$, द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

= $AQOA$ का क्षेत्रफल + BPO का क्षेत्रफल

$$= \int_{-2}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = 0 - \frac{(-2)^4}{4} + \left(\frac{1}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

अत: विकल्प (D) सही है। उत्तर

प्रश्न 17. वक्र $y = x|x|$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = -1$ तथा $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

हल : जब $x > 0, |x| = x$

∴ वक्र का दिया गया समीकरण है : $y = x^2$

$$y = +x^2$$

जब $x < 0, |x| = -x,$

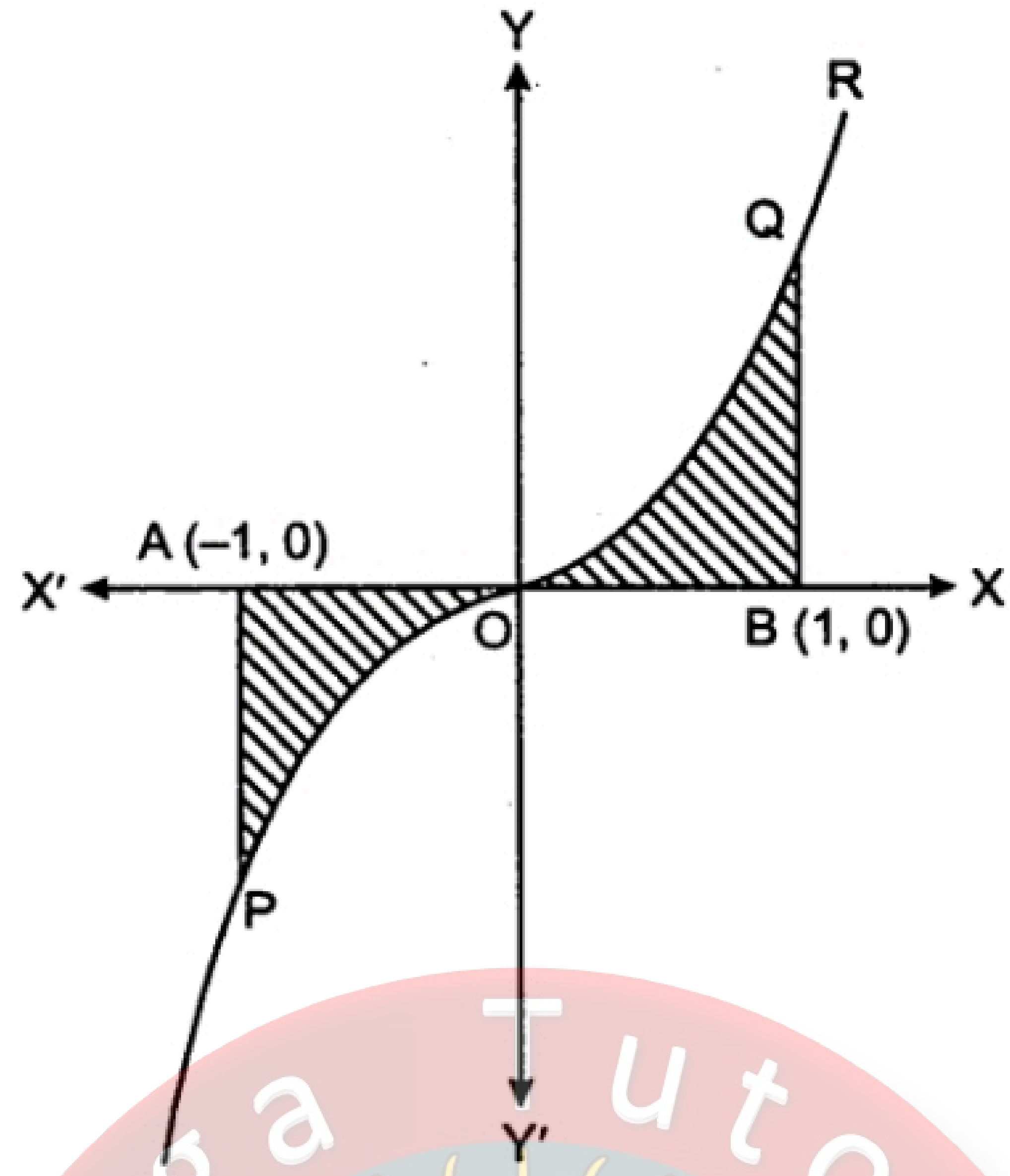
∴ वक्र का दिया गया समीकरण है :

$$y = -x^2$$

x-अक्ष से घिरा क्षेत्रफल

= POA का क्षेत्रफल + ΔBQO का क्षेत्रफल

$$= \int_{-1}^{0} -x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx = 2 \times \int_{0}^{1} x^2 dx$$



$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

अत: विकल्प (C) सही है। उत्तर

प्रश्न 18. क्षेत्र $y^2 \geq 6x$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ में सम्मिलित क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(A) $\frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$ (B) $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$

(C) $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$ (D) $\frac{4}{3}(8\pi + \sqrt{3})$

हल : वक्रों के समीकरण हैं :

$$x^2 + y^2 = 16 \quad ...(i)$$

$$y^2 = 6x \quad ...(ii)$$

समीकरण (i) में $y^2 = 6x$ रखने पर

$$x^2 + 6x = 16$$

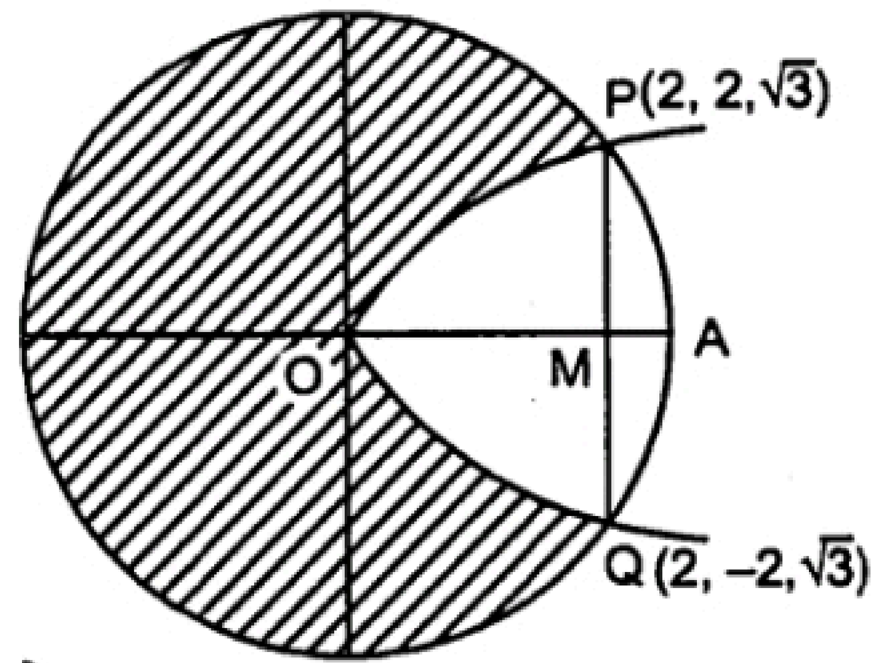
या $x^2 + 6x - 16 = 0$

या $(x + 8)(x - 2) = 0$

$\therefore$ $x = -8, 2$

परन्तु $x \neq -8$

अत: $x = 2$



परवलय तथा वृत्त के अन्दर का क्षेत्रफल

= $POQAP$ का क्षेत्रफल

= 2(POM का क्षेत्रफल + PMA का क्षेत्रफल)

$$= 2\left[\int_0^2 \sqrt{6x}\,dx + \int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{6}.\frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^2 + \left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_2^4\right]$$

$$= 2\left\{\frac{2}{4}\sqrt{6}(2^{3/2} - 0) + \left[(0 + 8\sin^{-1}(1) - \left(\sqrt{12} + 8\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{6}.\sqrt{8} + 2\left(8 \times \frac{\pi}{2} - \sqrt{12} - 8 \times \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{16}{3}\sqrt{3} + 8\pi - 2\sqrt{12} - \frac{8\pi}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3}$$

अब वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ का क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= 4\left[\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4$$

$$= 4[(0 + 8\sin^{-1} 1) - 0] = 32 \times \frac{\pi}{2}$$

$$= 16\pi$$

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल − $POQAP$ का क्षेत्रफल

$$= 16\pi - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{16}{3}\pi\right)$$

$$= \frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$$

अतः विकल्प (C) सही है। उत्तर

प्रश्न 19. y-अक्ष, $y = \cos x$ एवं $y = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है—

(A) $2(\sqrt{2} - 1)$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2} + 1$ (D) $\sqrt{2}$

हल : दिए वक्र हैं : $y = \cos x$, $y = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

y का मान रखने पर,

$$\sin x = \cos x$$

या $$\tan x = 1$$

$\Rightarrow$ $$x = \frac{\pi}{4}$$

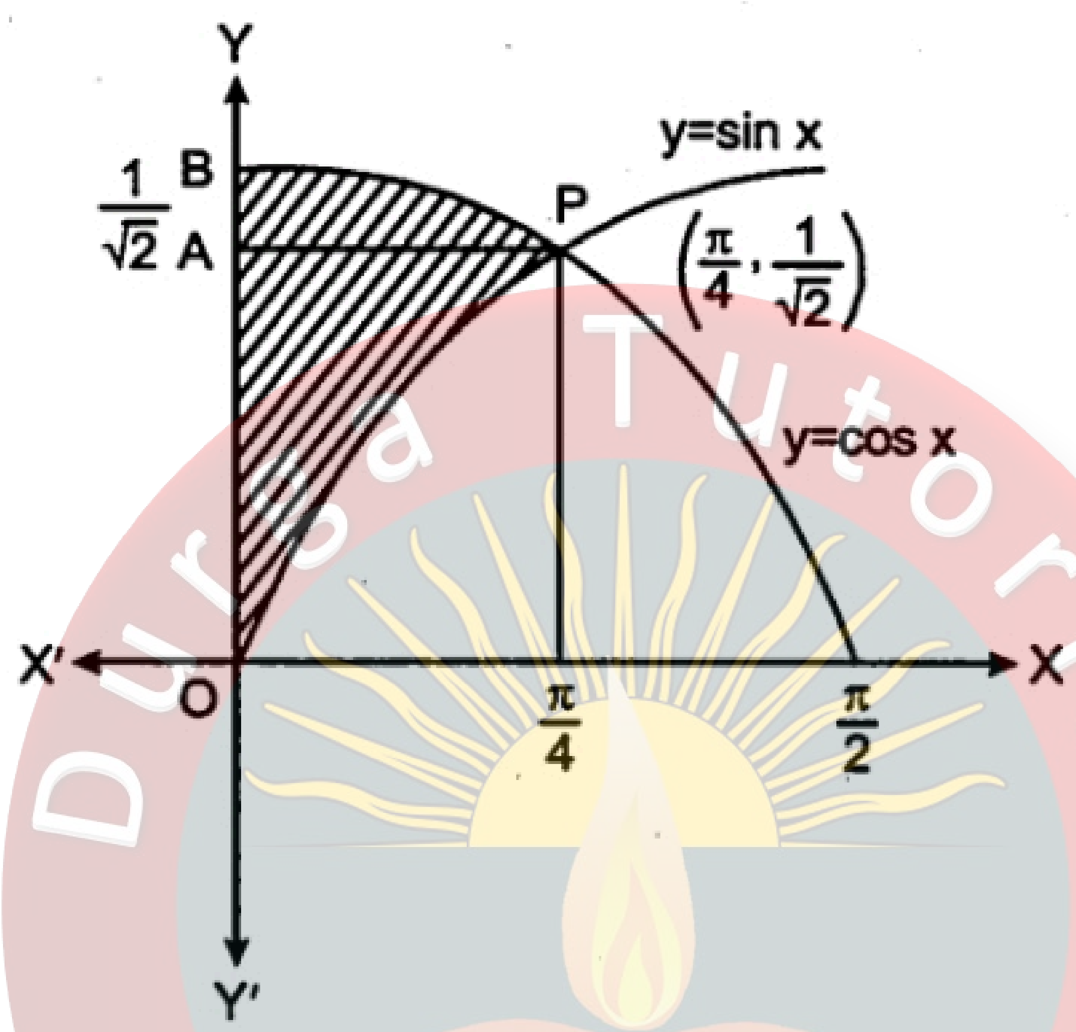
$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y-अक्ष पर, $y = \cos x$ तथा $y = \sin\, x\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

$= \Delta\, OPBO$ का क्षेत्रफल

$= \Delta\, PAO$ का क्षेत्रफल $+ APBA$ का क्षेत्रफल

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x_1 dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 x_2 dy$$



जहाँ x_1 वक्र $y = \sin x$ या $x = \sin^{-1} y$,

और $\quad x_2$ वक्र $y = \cos x$ अथवा $x = \cos^{-1} y$.

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin^{-1} y dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \cos^{-1} dy$$

$$= \left[y \sin^{-1} y - \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} y\, dy\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[y \cos^{-1} y + \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} y\, dy\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

$$= \left[y \sin^{-1} y + \sqrt{1-y^2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[y \cos^{-1} y - \sqrt{1-y^2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - 1\right] + \left[(\cos^{-1} 1 - 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$ वर्ग इकाई।

अत: विकल्प (B) सही है। **उत्तर**