Durga Tutorial
Baniapur
Since 1996

Durga Tutorial

Online Classes

बिहार बोर्ड और CBSE बोर्ड की तैयारी

Free Notes के लिए

www.durgatutorial.com

पर जाएँ।

ज्यादा जानकारी के लिए हमें
Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511

अध्याय 1

समुच्चय
Sets

प्रश्नावली 1.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित में कौन-से समुच्चय हैं? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

(i) *J* अक्षर से प्रारंभ होने वाले वर्ष के सभी महीनों का संग्रह।
(ii) भारत के दस सबसे अधिक प्रतिभाशाली लेखकों का संग्रह।
(iii) विश्व के सर्वश्रेष्ठ ग्यारह बल्लेबाजों का संग्रह।
(iv) आपकी कक्षा के सभी बालकों का संग्रह।
(v) 100 से कम सभी प्राकृत संख्याओं का संग्रह।
(vi) लेखक प्रेमचंद द्वारा लिखित उपन्यासों का संग्रह।
(vii) सभी सम पूर्णांकों का संग्रह।
(viii) इस अध्याय में आने वाले प्रश्नों का संग्रह।
(ix) विश्व के सबसे अधिक खतरनाक जानवरों का संग्रह।

हल (i) *J* अक्षर से प्रारंभ होने वाले वर्ष के सभी महीनों का संग्रह हम निश्चित रूप से बता सकते हैं। जो निम्न है, जनवरी, जून तथा जुलाई।
अतः यह संग्रह सुपरिभाषित है, इसलिए यह एक समुच्चय है।

(ii) एक लेखक एक व्यक्ति के लिए अधिक प्रतिभाशाली तथा दूसरे व्यक्ति के लिए अधिक प्रतिभाशाली नहीं भी हो सकता है। अतः हम निश्चित रूप से दस सबसे अधिक प्रतिभाशाली लेखकों का संग्रह नहीं बता सकते। अतः यह संग्रह सुपरिभाषित नहीं है, इसलिए यह समुच्चय नहीं है।

(iii) एक बल्लेबाज एक व्यक्ति के लिए सर्वश्रेष्ठ हो सकता है तथा दूसरे व्यक्ति के लिए सर्वश्रेष्ठ नहीं भी हो सकता है। अतः हम निश्चित रूप से सर्वश्रेष्ठ ग्यारह बल्लेबाजों का संग्रह नहीं बता सकते। अतः यह संग्रह सुपरिभाषित नहीं है, इसलिए यह एक समुच्चय नहीं है।

(iv) कक्षा के सभी बालकों का संग्रह हम आसानीपूर्वक बता सकते हैं। अतः यह संग्रह सुपरिभाषित है, इसलिए यह एक समुच्चय है।

(v) 100 से कम सभी प्राकृत संख्याओं का संग्रह = {1, 2, 3, 4, ..., 99}
अतः यह संग्रह सुपरिभाषित है इसलिए यह एक समुच्चय है।

(vi) लेखक प्रेमचंद द्वारा लिखित उपन्यासों का संग्रह हम आसानीपूर्वक बता सकते हैं। अतः यह संग्रह सुपरिभाषित है इसलिए यह एक समुच्चय है।

(vii) सभी सम पूर्णांकों का संग्रह = {0, 2, 4, 6, 8, ...} हम आसानी से बता सकते हैं। अतः यह संग्रह सुपरिभाषित है, इसलिए यह एक समुच्चय है।

(viii) अध्याय में आने वाले प्रश्नों का संग्रह हम आसानीपूर्वक बता सकते हैं। अतः यह संग्रह सुपरिभाषित है, इसलिए यह एक समुच्चय है।

(ix) शब्द अधिक खतरनाक स्पष्ट नहीं है। एक जानवर एक व्यक्ति के लिए अधिक खतरनाक हो सकता है। और दूसरे व्यक्ति के लिए अधिक खतरनाक नहीं भी हो सकता है। अतः यह संग्रह सुपरिभाषित नहीं है, इसलिए यह एक समुच्चय नहीं है।

प्रश्न 2. मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, रिक्त स्थानों में उपयुक्त प्रतीक $\in$ अथवा $\notin$ भरिए।

(i) 5 ... A (ii) 8 ... A (iii) 0 ... A (iv) 4 ... A
(v) 2 ... A (vi) 10 ... A

हल (i) $5 \in A$ (ii) $8 \notin A$ (iii) $0 \notin A$ (iv) $4 \in A$ (v) $2 \in A$ (vi) $10 \notin A$

प्रश्न 3. निम्नलिखित समुच्चयों को रोस्टर रूप में लिखिए।

(i) $A = \{x : x$ एक पूर्णांक है और $-3 < x < 7\}$

(ii) $B = \{x : x$ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है $\}$

(iii) $C = \{x : x$ दो अंकों की ऐसी प्राकृत संख्या है जिसके अंकों का योगफल 8 है।$\}$

(iv) $D = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है जो संख्या 60 की भाजक है।$\}$

(v) E = TRIGONOMETRY शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय

(vi) F = BETTER शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय

हल (i) $A = \{x : x,$ एक पूर्णांक है, $-3 < x < 7\}$ तब, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(iii) $C = \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\}$

(iv) $D = \{2, 3, 5\}$

(v) $E = \{T, R, I, G, O, N, M, E, Y\}$

(vi) $F = \{B, E, T, R\}$

प्रश्न 4. निम्नलिखित समुच्चयों को समुच्चय निर्माण रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) {3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32}
(iii) {5, 25, 125, 625} (iv) {2, 4, 6, ...}
(v) {1, 4, 9 ..., 100}

हल (i) $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है जो 3 का गुणक है और $x < 15\}$

(ii) दिए हुए समुच्चय के अवयव 2 के घात के रूप के हैं (5 तक)
अतः $B = \{x : x = 2^n, n \in N$ और $n \le 5\}$

(iii) दिए हुए समुच्चय के अवयव 5 के घात के रूप के हैं (4 तक)
अतः $C = \{x : x = 5^n, n \in N$ और $n \le 4\}$

(iv) दिए हुए समुच्चय के अवयव सम प्राकृत संख्या हैं,
अतः $D = \{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है$\}$

(v) दिए हुए समुच्चय के अवयव प्राकृत सख्या का वर्ग हैं, $(1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, \ldots)$
अतः $E = \{x : x = n^2, n \in N$ तथा $n \le 10\}$

प्रश्न 5. निम्नलिखित समुच्चयों के सभी अवयवों (सदस्यों) को सूचीबद्ध कीजिए।

(i) $A = \{x : x,$ एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$

(ii) $B = \{x : x,$ एक पूर्णांक है, $-\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}\}$

(iii) $C = \{x : x,$ एक पूर्णांक है, $x^2 \le 4\}$

(iv) $D = \{x : x,$ LOYAL शब्द का एक अक्षर है$\}$

(v) $E = \{x : x,$ वर्ष का एक ऐसा महीना है, जिसमें 31 दिन नहीं होते हैं$\}$

(vi) $F = \{x : x,$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक व्यंजन है, जो k से पहले आता है$\}$

हल (i) $A = \{$विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय अर्थात् $1, 3, 5, 7, \ldots\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

(ii) पूर्णांक जो अंतराल $-\frac{1}{2}$ और $\frac{9}{2}$ के बीच हैं, 0, 1, 2, 3, 4

$\therefore \quad B = \{0, 1, 2, 3, 4,\}$

(iii) पूर्णांक जिनका वर्ग 4 या 4 से छोटा हो, हैं

$-2, -1, 0, 1, 2$

$(\because -2^2 = 4, -1^2 = 1, 0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4)$

$\therefore \quad C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(iv) $D = \{L, O, Y, A\}$

(v) $E = \{$ फरवरी, अप्रैल, जून, सितम्बर, नवम्बर$\}$
(इन महीनों को छोड़कर सभी महीने 31 दिन के हैं।)

(vi) $F = \{b, c, d, f, g, h, j\}$
($\because a, e, i, o, u$ को छोड़कर सभी वर्णमाला व्यंजन हैं)

प्रश्न 6. बाईं ओर रोस्टर रूप में लिखित और दाईं ओर समुच्चय निर्माण रूप में वर्णित समुच्चयों का सही मिलान कीजिए।

(i) {1, 2, 3, 6}	(a) $\{x : x,$ एक अभाज्य संख्या है और 6 की भाजक है$\}$
(ii) {2, 3}	(b) $\{x : x,$ संख्या 10 से कम एक विषम प्राकृत संख्या है$\}$
(iii) {M,A,T,H,E,I,C,S}	(c) $\{x : x,$ एक प्राकृत संख्या है और 6 की भाजक है$\}$
(iv) {1, 3, 5, 7, 9}	(d) $\{x : x,$ MATHEMATICS शब्द का एक अक्षर है$\}$

हल (i) {1, 2, 3, 6} समुच्चय के अवयव प्राकृत संख्या हैं और 6 के भाजक हैं।

(ii) {2, 3} समुच्चय के अवयव अभाज्य संख्या हैं और 6 के भाजक हैं।

(iii) {M,A,T,H,E,I,C,S} समुच्चय के अवयव MATHEMATICS शब्द का एक अक्षर है।

(iv) {1,3,5,7,9} समुच्चय के अवयव 10 से छोटी विषम संख्या है।

अतः (i) → c (ii) → a (iii) → d (iv) → b

प्रश्नावली 1.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित में से कौन-से रिक्त समुच्चय के उदाहरण हैं?

(i) 2 से भाज्य विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय।

(ii) सम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय।

(iii) $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है, $x < 5$ और साथ ही साथ $x > 7\}$

(iv) $\{y : y$ किन्हीं भी दो समांतर रेखाओं का उभयनिष्ठ बिंदु है$\}$

हल (i) ऐसी कोई विषम प्राकृत संख्या नहीं है जो 2 से भाज्य हो, इसलिए इस समुच्चय का कोई अवयव नहीं है। अतः यह एक रिक्त समुच्चय है।

(ii) सम अभाज्य संख्या केवल 2 है अर्थात् एक अवयव है। अतः यह एक रिक्त समुच्चय नहीं है।

(iii) 5 से छोटी और 7 से बड़ी कोई प्राकृत संख्या नहीं है। अतः यह एक रिक्त समुच्चय है।

(iv) चूँकि समांतर रेखाएँ कभी भी एक-दूसरे को काटती नहीं हैं। अतः उनमें कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है। इसलिए यह एक रिक्त समुच्चय है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन परिमित और कौन अपरिमित हैं?

(i) वर्ष के महीनों का समुच्चय।

(ii) {1, 2, 3, ...}

(iii) {1, 2, 3, ... 99, 100}

(iv) 100 से बड़े धन पूर्णांकों का समुच्चय।

(v) 99 से छोटे अभाज्य पूर्णांकों का समुच्चय।

हल (i) वर्ष के महीनों का समुच्चय परिमित समुच्चय है क्योंकि समुच्चय के 12 अवयव हैं जो वर्ष के महीने हैं।

(ii) यह एक अपरिमित समुच्चय है क्योंकि इस समुच्चय में अपरिमित प्राकृत संख्या है।

(iii) यह एक परिमित समुच्चय है क्योंकि इस समुच्चय में प्रथम 100 प्राकृत संख्या हैं।

(iv) यह एक अपरिमित समुच्चय है क्योंकि 100 से बड़े अनगिनत धन पूर्णांक हैं।

(v) यह एक परिमित समुच्चय है क्योंकि 99 से छोटी 25 अभाज्य संख्याएँ {2, 3, 5, 7, ..., 97} हैं।

प्रश्न 3. निम्नलिखित समुच्चयों में से प्रत्येक के लिए बताइए कि कौन परिमित है और कौन अपरिमित है?

(i) x-अक्ष के समांतर रेखाओं का समुच्चय।

(ii) अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय।

(iii) उन संख्याओं का समुच्चय जो 5 के गुणज हैं।

(iv) पृथ्वी पर रहने वाले जानवरों का समुच्चय।

(v) मूलबिंदु (0, 0) से होकर जाने वाले वृत्तों का समुच्चय।

हल (i) अपरिमित, x-अक्ष के समांतर अनगिनत रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(ii) परिमित, क्योंकि अंग्रेजी वर्णमाला में 26 अक्षर होते हैं।

(iii) अपरिमित, क्योंकि 5 के गुणज अनगिनत संख्याएँ हैं जोकि $\{5, 10, 15, \ldots\}$ हैं।

(iv) परिमित, क्योंकि पृथ्वी पर रहने वाले जानवरों का समुच्चय निश्चित है।

(v) अपरिमित, क्योंकि मूलबिंदु (0, 0) से होकर जाने वाले अनगिनत वृत्त खींचे जा सकते हैं।

प्रश्न 4. निम्नलिखित में बताइए कि $A = B$ है अथवा नहीं है

(i) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, c, b, a\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$, $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{x : x$ सम धन पूर्णांक है और $x \leq 10\}$

(iv) $A = \{x : x$ संख्या 10 का एक गुणज है $\}$, $B = \{10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

हल (i) समुच्चय A और B के सभी अवयव समान हैं जो a, b, c तथा d हैं। अतः $A = B$

(ii) यहाँ 12, A का एक अवयव है किंतु B का एक अवयव नहीं है और 18, B का एक अवयव है किंतु A का एक अवयव नहीं है। इसलिए A और B के सभी अवयव समान नहीं हैं। अतः $A \neq B$

(iii) यहाँ, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ तथा $B = \{x : x$ सम धन पूर्णांक है और $x \leq 10\}$ $= \{2, 4, 6, 8, 10\}$

अर्थात् A तथा B दोनों में समान अवयव हैं।

अतः $A = B$

(iv) यहाँ, $A = \{x : x$ संख्या 10 का एक गुणज है$\} = \{10, 20, 30, 40, \ldots\}$

तथा $B = \{10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

समुच्चय A और B में अवयव समान नहीं हैं।

अतः $A \neq B$

प्रश्न 5. क्या निम्नलिखित समुच्चय युग्म समान हैं? कारण सहित बताइए।

(i) $A = \{2, 3\}$ और $B = \{x : x$ समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ का एक हल हैं$\}$

(ii) $A = \{x : x$ शब्द 'FOLLOW' का एक अक्षर है$\}$

$B = \{y : y$ शब्द 'WOLF' का एक अक्षर है$\}$

हल (i) $A = \{2, 3\}$ और $B = \{x : x$ समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ का एक हल है $\}$

हम पहले $x^2 + 5x + 6 = 0$ का हल निकालते हैं।

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$\Rightarrow$ $x^2 + 3x + 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow$ $x(x + 3) + 2(x + 3) = 0$

$\Rightarrow$ $(x + 3)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow$ $x = -2, -3$

अत: $B = \{-2, -3\}$

A और B के अवयव समान नहीं हैं। अत: $A \neq B$

(ii) यहाँ, $A = \{x : x$ शब्द 'FOLLOW' का एक अक्षर है$\} = \{F, O, L, W\}$

$B = \{y : y$ शब्द 'WOLF' का एक अक्षर है$\} = \{W, O, L, F\}$

चूँकि A और B समुच्चय के प्रत्येक अवयव समान हैं। अत: $A = B$

नोट *दो समुच्चय समतुल्य कहलाते हैं यदि दोनों समुच्चयों में विभिन्न अवयव समान संख्या में हों।*

प्रश्न 6. नीचे दिए हुए समुच्चयों में से समान समुच्चयों का चयन कीजिए।

$A = \{2, 4, 8, 12\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{4, 8, 12, 14\},$

$D = \{3, 1, 4, 2\}, E = \{-1, 1\}, F = \{0, a\},$

$G = \{1, -1\}, H = \{0, 1\}$

हल यहाँ, समुच्चय B और D के अवयव तथा समुच्चय E और F के अवयव समान हैं।

अत: $B = D$ और $E = G$ है।

प्रश्नावली 1.3

प्रश्न 1. रिक्त स्थानों में प्रतीक $\subset$ या $\not\subset$ को भरकर सही कथन बनाइए।

(i) $\{2, 3, 4\} \ldots \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ii) $\{a, b, c\} \ldots \{b, c, d\}$

(iii) $\{x : x$ आपके विद्यालय की एक कक्षा XI का एक विद्यार्थी है।$\} \ldots \{x : x$ आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है।$\}$

(iv) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक वृत्त है।$\} \ldots \{x : x$ एक समान समतल में वृत्त है जिसकी त्रिज्या 1 इकाई है।$\}$

(v) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक त्रिभुज है।$\} \ldots \{x : x$ किसी समतल में स्थित एक आयत है।$\}$

(vi) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक समबाहु त्रिभुज है।$\} \ldots \{x : x$ किसी समतल में स्थित एक त्रिभुज है।$\}$

(vii) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है।$\} \ldots \{x : x$ एक पूर्णांक है।$\}$

हल $A \subset B$ का अर्थ है कि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B में है तथा $A \not\subset B$ का अर्थ है कि समुच्चय A का कम-से-कम एक अवयव ऐसा है जो समुच्चय B में नहीं है।

(i) $\{2, 3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(चूँकि पहले समुच्चय के सभी अवयव दूसरे समुच्चय में हैं।)

(ii) $\{a, b, c\} \not\subset \{b, c, d\}$
(चूँकि पहले समुच्चय के सभी अवयव दूसरे समुच्चय में नहीं हैं।)

(iii) $\{x : x$ आपके विद्यालय की कक्षा XI का एक विद्यार्थी है$\} \subset \{x : x$ आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है$\}$
(यदि कोई आपके विद्यालय की कक्षा XI का एक विद्यार्थी है, तो वह निश्चित रूप से आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है।)

(iv) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक वृत्त है$\} \not\subset \{x : x$ एक समान समतल में स्थित एक वृत्त है जिसकी त्रिज्या 1 इकाई है।$\}$
(चूँकि पहले समुच्चय के अवयव किसी समतल में स्थित एक वृत्त है जिसकी त्रिज्या कुछ भी किंतु निश्चित होगी, अतः इसके सभी अवयव दूसरे समुच्चय के अवयव नहीं हैं।)

(v) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक त्रिभुज है$\} \not\subset \{x : x$ किसी समतल में स्थित एक आयत है$\}$
(चूँकि पहले समुच्चय के सभी अवयव दूसरे समुच्चय के अवयव नहीं हैं।)

(vi) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है$\} \subset \{x : x$ एक पूर्णांक है$\}$
अर्थात् $\{2, 4, 6, 8, \ldots\} \subset \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$
(चूँकि पहले समुच्चय के सभी अवयव दूसरे समुच्चय के अवयव हैं।)

(vii) $\{x : x$ किसी समतल में स्थित एक समबाहु त्रिभुज है$\} \subset \{x : x$ किसी समतल में स्थित एक त्रिभुज है$\}$
(चूँकि दूसरे समुच्चय के अवयव त्रिभुज हैं। अतः पहले समुच्चय के सभी अवयव दूसरे समुच्चय के अवयव होंगे)

प्रश्न 2. जाँच कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य हैं।

(i) $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$

(ii) $\{a, e\} \subset \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है।$\}$

(iii) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$

(iv) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

(v) $\{a\} \in \{a, b, c\}$

(vi) $\{x : x$ संख्या 6 से कम एक सम प्राकृत संख्या है।$\} \subset \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है, जो संख्या 36 को विभाजित करती है।$\}$

हल (i) चूँकि समुच्चय $\{a, b\}$ के प्रत्येक अवयव समुच्चय $\{b, c, a\}$ का एक अवयव है।
अतः $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$ असत्य है।

(ii) अंग्रेजी वर्णमाला का स्वर $\{a, e, i, o, u\}$ है। अतः $\{a, e\} \subset \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$ सत्य है।

(iii) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$ असत्य है क्योंकि पहले समुच्चय का एक अवयव 2, दूसरे समुच्चय का अवयव नहीं है।

(iv) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ सत्य है क्योंकि पहले एकल समुच्चय का अवयव दूसरे समुच्चय का अवयव है।

(v) असत्य, क्योंकि एक अवयव किसी समुच्चय का सदस्य हो सकता है जबकि एक समुच्चय कभी भी दूसरे समुच्चय का सदस्य नहीं हो सकता। अर्थात् $a \in \{a, b, c\}$ किंतु $\{a\} \notin \{a, b, c\}$

(vi) $\{x : x$ संख्या 6 से कम एक सम प्राकृत संख्या है$\} = \{2, 4\}$ तथा $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या है, जो संख्या 36 को विभाजित करती है$\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

चूँकि समुच्चय $\{2, 4\}$ का प्रत्येक अवयव समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ का एक अवयव है।

अतः दिया हुआ कथन सत्य है।

प्रश्न 3. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$। निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही नहीं है और क्यों?

(i) $\{3, 4\} \subset A$ (ii) $\{3, 4\} \in A$ (iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$ (iv) $1 \in A$

(v) $1 \subset A$ (vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$ (vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$

(ix) $\phi \in A$ (x) $\phi \subset A$ (xi) $\{\phi\} \subset A$

हल (i) यह असत्य है, क्योंकि $\{3, 4\} \not\subset A$ किंतु $\{\{3, 4\}\} \subset A$ सत्य है। समुच्चय A में अवयवों की संख्या चार है अर्थात् 1, 2, $\{3, 4\}$ और 5 है। याद रहे $\{3, 4\}$ समुच्चय A का एक अवयव है न कि एक समुच्चय।

(ii) $\{3, 4\} \in A$, यह एक सत्य कथन है।

(iii) ऊपर, हम व्याख्या कर चुके हैं कि $\{\{3, 4\}\} \subset A$, अतः यह एक सत्य कथन है।

(iv) $1 \in A$, यह एक सत्य कथन है।

(v) यह असत्य है, क्योंकि $1 \in A$

(vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$, यह एक सत्य कथन है।

(vii) यह असत्य है क्योंकि $\{1, 2, 5\} \notin A$

(viii) यह असत्य है क्योंकि यह संभव नहीं है।

(ix) यह असत्य है क्योंकि $\phi \subset A$

(x) $\phi \subset A$, यह सत्य कथन है क्योंकि ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय है।

(xi) यह असत्य है क्योंकि $\phi \subset A$

अतः (i), (v), (vii), (viii), (ix) और (xi) असत्य कथन है।

प्रश्न 4. निम्नलिखित समुच्चयों के सभी उपसमुच्चय लिखिए।

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

यदि एक समुच्चय में अवयवों की संख्या n है, तब कुल संभावित उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^n$

हल (i) $\{a\}$

उपसमुच्चय $= \phi, \{a\}$

(ii) $\{a, b\}$

उपसमुच्चय = $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

(iii) $\{1, 2, 3\}$

उपसमुच्चय = $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

(iv) ϕ, उपसमुच्चय = ϕ

नोट *ϕ सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय है।*

प्रश्न 5. $P(A)$ के कितने अवयव हैं, यदि $A = \phi$?

हल यदि $A = \phi$, तब शक्ति या घात समुच्चय की परिभाषानुसार,

$P(A)$ में अवयवों की संख्या $= 2^0 = 1$, जो निम्न है $P(A) = P(\phi) = \{\phi\}$

प्रश्न 6. निम्नलिखित को अंतराल रूप में लिखिए।

(i) $\{x : x \in R, -4 < x \le 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -12 < x < -10\}$

(iii) $\{x : x \in R, 0 \le x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R, 3 \le x \le 4\}$

हल (i) $(-4, 6]$ (ii) $(-12, -10)$ (iii) $[0, 7)$ (iv) $[3, 4]$

प्रश्न 7. निम्नलिखित अंतरालों को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

(i) $(-3, 0)$ (ii) $[6, 12]$ (iii) $(6, 12]$ (iv) $[-23, 5)$

हल हम जानते हैं कि संवृत अंतराल में अन्त बिंदु होते हैं जबकि विवृत अंतराल में अन्त बिंदु नहीं होते हैं। अत:

(i) $(-3, 0) = \{x : x \in R, -3 < x < 0\}$ (चूँकि यह एक विवृत अंतराल है)

(ii) $[6, 12] = \{x : x \in R, 6 \le x \le 12\}$ (चूँकि यह एक संवृत अंतराल है)

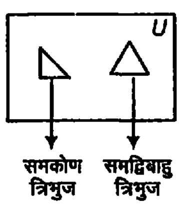
(iii) $(6, 12] = \{x : x \in R, 6 < x \le 12\}$ (चूँकि यह बाएँ से विवृत अंतराल है तथा दाएँ से संवृत अंतराल है।)

(iv) $[-23, 5) = \{x : x \in R, -23 \le x < 5\}$ (चूँकि यह दाएँ से विवृत अंतराल है तथा बाएँ से संवृत अंतराल है।)

प्रश्न 8. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए आप कौन-सा सार्वत्रिक समुच्चय प्रस्तावित करेंगे?

(i) समकोण त्रिभुजों का समुच्चय। (ii) समद्विबाहु त्रिभुजों का समुच्चय।

हल दिए हुए प्रत्येक समुच्चय के लिए सभी संभावित त्रिभुजों का समुच्चय सार्वत्रिक समुच्चय होता है।



प्रश्न 9. समुच्चय $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ और $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ प्रदत्त हैं। इन तीनों समुच्चयों A, B और C के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा (से) सार्वत्रिक समुच्चय लिए जा सकते हैं?

(i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) ϕ
(iii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (iv) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

हल सार्वत्रिक समुच्चय कम-से-कम A, B और C के सभी अवयवों को रखता है।

(i) यहाँ, $8 \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
अतः हम $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ को सार्वत्रिक समुच्चय नहीं ले सकते हैं।

(ii) समुच्चय ϕ को सार्वत्रिक समुच्चय नहीं ले सकते हैं।

(iii) दिए हुए समुच्चय A, B तथा C के लिए समुच्चय $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ सार्वत्रिक समुच्चय है क्योंकि A, B तथा C के सभी अवयव समुच्चय $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ में हैं।

(iv) यहाँ, $0 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, अतः हम इसे सार्वत्रिक समुच्चय नहीं ले सकते हैं।

प्रश्नावली 1.4

प्रश्न 1. निम्नलिखित में से प्रत्येक समुच्चय युग्म का सम्मिलन ज्ञात कीजिए।

(i) $X = \{1, 3, 5\}, Y = \{1, 2, 3\}$
(ii) $A = \{a, e, i, o, u\}, B = \{a, b, c\}$
(iii) $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और 3 का गुणज है।$\}$
$B = \{x : x$ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है।$\}$
(iv) $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $1 < x \le 6\}$
$B = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $6 < x < 10\}$
(v) $A = \{1, 2, 3\}, B = \phi$

दो समुच्चयों का सम्मिलन एक समुच्चय है जो दोनों समुच्चयों के सभी अवयवों को रखता है जिसमें उभयनिष्ठ अवयव केवल एक बार ही रखते हैं।

हल (i) हम जानते हैं कि दो अथवा दो से अधिक समुच्चयों का सम्मिलन सभी अवयवों को रखता है जिसमें उभयनिष्ठ अवयव केवल एक बार ही रखते हैं।
यहाँ, $X = \{1, 3, 5\}$ तथा $Y = \{1, 2, 3\}$
अतः $X \cup Y = \{1, 2, 3, 5\}$

(ii) यहाँ, $A = \{a, e, i, o, u\}$ तथा $B = \{a, b, c\}$
अतः $A \cup B = \{a, e, i, o, u, b, c\}$

(iii) $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और 3 का गुणज है$\}$
अतः $A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
और $B = \{x : x$ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है$\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$
इसलिए $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

(iv) यहाँ, $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $1 < x \leq 6\}$

$\Rightarrow \quad A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

तथा $\quad B = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $6 < x < 10\}$

$\Rightarrow \quad B = \{7, 8, 9\}$

अतः $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(v) यहाँ, $A = \{1, 2, 3\}$ तथा $B = \phi$

अतः $\quad A \cup B = \{1, 2, 3\}$

प्रश्न 2. मान लीजिए कि $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$,क्या $A \subset B$? $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B का एक अवयव है, इसलिए $A \subset B$

और $\quad A \cup B = \{a, b, c\}$

प्रश्न 3. यदि A और B दो ऐसे समुच्चय हैं कि $A \subset B$, तो $A \cup B$ क्या है?

हल चूँकि A उपसमुच्चय है B का, अतः समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B में होगा।

$\therefore \quad A \cup B = B$

प्रश्न 4. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$ और $D = \{7, 8, 9, 10\}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $B \cup C$

(iv) $B \cup D$ (v) $A \cup B \cup C$ (vi) $A \cup B \cup D$

(vii) $B \cup C \cup D$

हल

(i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(iii) $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(iv) $B \cup D = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(v) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(vi) $A \cup B \cup D = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(vii) $B \cup C \cup D = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} \cup \{7, 8, 9, 10\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

प्रश्न 5. प्रश्न 1 में दिए प्रत्येक समुच्चय युग्म का सर्वनिष्ठ समुच्चय ज्ञात कीजिए।

दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ निकालने के लिए, हम दोनों समुच्चयों के उभयनिष्ठ अवयवों को लेते हैं।

हल हम जानते हैं कि दो अथवा दो से अधिक समुच्चयों के सर्वनिष्ठ समुच्चय में, दिए गए समुच्चयों के उभयनिष्ठ अवयव होते हैं। अतः

(i) $X \cap Y = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$

(ii) $A \cap B = \{a, e, i, o, u\} \cap \{a, b, c\} = \{a\}$

(iii) $A \cap B = \{3, 6, 9, ...\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3\}$

(iv) $A \cap B = \{2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{7, 8, 9\} = \phi$

(v) $A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \phi = \phi$

प्रश्न 6. यदि $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{7, 9, 11, 13\}$, $C = \{11, 13, 15\}$ और $D = \{15, 17\}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

(i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$ (iii) $A \cap C \cap D$ (iv) $A \cap C$

(v) $B \cap D$ (vi) $A \cap (B \cup C)$ (vii) $A \cap D$ (viii) $A \cap (B \cup D)$

(ix) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$ (x) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ निकालने के लिए, हम दोनों समुच्चयों के उभयनिष्ठ अवयवों को लेते हैं।

हल (i) $A \cap B = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13\} = \{7, 9, 11\}$

(ii) $B \cap C = \{7, 9, 11, 13\} \cap \{11, 13, 15\} = \{11, 13\}$

(iii) $A \cap C \cap D = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{11, 13, 15\} \cap \{15, 17\} = \{11\} \cap \{15, 17\} = \phi$

(iv) $A \cap C = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{11, 13, 15\} = \{11\}$

(v) $B \cap D = \{7, 9, 11, 13) \cap \{15, 17\} = \phi$

(vi) $A \cap (B \cup C) = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13\} \cup \{11, 13, 15\}$

$= \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15\} = \{7, 9, 11\}$

(vii) $A \cap D = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{15, 17\} = \phi$

(viii) $A \cap (B \cup D) = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13\} \cup \{15, 17\}$

$= \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15, 17\} = \{7, 9, 11\}$

(ix) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$

$= \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13\} \cap \{7, 9, 11, 13\} \cup \{11, 13, 15\}$

$= \{7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15\} = \{7, 9, 11\}$

(x) $(A \cup D) \cap (B \cup C) = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cup \{15, 17\} \cap \{7, 9, 11, 13\} \cup \{11, 13, 15\}$

$= \{3, 5, 7, 9, 11, 15, 17\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15\}$

$= \{7, 9, 11, 15\}$

प्रश्न 7. यदि $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है।}

$B = \{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है।}

$C = \{x : x$ एक विषम प्राकृत संख्या है।}

$D = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है }, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

(i) $A \cap B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $A \cap D$ (iv) $B \cap C$

(v) $B \cap D$ (vi) $C \cap D$

हल $A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है।} $= \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$B = \{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है।} $= \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

$C = \{x : x$ एक विषम प्राकृत संख्या है।} $= \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$

$D = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है।} $= \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$

(i) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10, ...\} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\} = B$

(ii) $A \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9, ...\} = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\} = C$

(iii) $A \cap D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, ...\} = \{2, 3, 5, 7, ...\} = D$

(iv) $B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9, ...\} = \phi$

(v) $B \cap D = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, ...\} = \{2\}$

(vi) $C \cap D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, ...\} = \{3, 5, 7, 11, ...\}$

$= \{x : x$ एक विषम अभाज्य संख्या है$\}$

प्रश्न 8. निम्नलिखित समुच्चय युग्मों में से कौन-से युग्म असंयुक्त हैं?

(i) $\{1, 2, 3, 4\}$ **तथा** $\{x : x$ **एक प्राकृत संख्या है और** $4 \le x \le 6\}$

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ **तथा** $\{c, d, e, f\}$

(iii) $\{x : x$ **एक सम पूर्णांक है।**$\}$ **और** $\{x : x$ **एक विषम पूर्णांक है**$\}$

दो समुच्चय असंयुक्त कहलाते हैं जब $A \cap B = \phi$, अर्थात् रिक्त समुच्चय

हल (i) माना $A = \{1, 2, 3, 4\}$

तथा $B = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है और $4 \le x \le 6\} = \{4, 5, 6\}$

$\Rightarrow \quad A \cap B = \{4\}$

अतः दिए हुए समुच्चय असंयुक्त नहीं हैं।

(ii) $\{a, e, i, o, u\} \cap \{c, d, e, f\} = \{e\}$

अतः दिए हुए समुच्चय असंयुक्त नहीं हैं।

(iii) $\{x : x$ एक सम पूर्णांक है$\} \cap \{x : x$ एक विषम पूर्णांक है$\}$

$= \{2, 4, 6, 8, 10...\} \cap \{1, 3, 5, 7, ..\} = \phi$

अतः दिए हुए समुच्चय असंयुक्त हैं।

प्रश्न 9. यदि $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$,

$B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ **तथा**

$D = \{5, 10, 15, 20\}$, **तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए।**

(i) $A - B$	(ii) $A - C$	(iii) $A - D$	(iv) $B - A$
(v) $C - A$	(vi) $D - A$	(vii) $B - C$	(viii) $B - D$
(ix) $C - B$	(x) $D - B$	(xi) $C - D$	(xii) $D - C$

माना A और B दो समुच्चय हैं, तब $A - B$ उन अवयवों का समुच्चय है जो समुच्चय A में हैं किंतु समुच्चय B में नहीं हैं।

हल (i) $A - B = \{$वे अवयव जो A में हैं किंतु B में नहीं हैं।$\}$

$= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} - \{4, 8, 12, 16, 20\} = \{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$

(ii) $A - C = \{$वे अवयव जो A में हैं किंतु C में नहीं हैं$\}$

$= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} - \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

$= \{3, 9, 15, 18, 21\}$

(iii) $A - D = \{$वे अवयव जो A में हैं किंतु D में नहीं हैं$\}$

$= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} - \{5, 10, 15, 20\} = \{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$

(iv) $B - A$ = {वे अवयव जो B में हैं किंतु A में नहीं हैं}
$= \{4, 8, 12, 16, 20\} - \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$
$= \{4, 8, 16, 20\}$

(v) $C - A$ = {वे अवयव जो C में हैं किंतु A में नहीं हैं}
$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} - \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$
$= \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$

(vi) $D - A$ = {वे अवयव जो D में हैं किंतु A में नहीं हैं}
$= \{5, 10, 15, 20\} - \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$
$= \{5, 10, 20\}$

(vii) $B - C$ = {वे अवयव जो B में हैं किंतु C में नहीं हैं}
$= \{4, 8, 12, 16, 20\} - \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} = \{20\}$

(viii) $B - D$ = {वे अवयव जो B में हैं किंतु D में नहीं हैं}
$= \{4, 8, 12, 16, 20\} - \{5, 10, 15, 20\} = \{4, 8, 12, 16\}$

(ix) $C - B$ = {वे अवयव जो C में हैं किंतु B में नहीं हैं}
$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} - \{4, 8, 12, 16, 20\}$
$= \{2, 6, 10, 14\}$

(x) $D - B$ = {वे अवयव जो D में हैं किंतु B में नहीं हैं}
$= \{5, 10, 15, 20\} - \{4, 8, 12, 16, 20\}$
$= \{5, 10, 15\}$

(xi) $C - D$ = {वे अवयव जो C में हैं किंतु D में नहीं हैं}
$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} - \{5, 10, 15, 20\}$
$= \{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$

(xii) $D - C$ = {वे अवयव जो D में हैं किंतु C में नहीं हैं}
$= \{5, 10, 15, 20\} - \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
$= \{5, 15, 20\}$

प्रश्न 10. यदि $X = \{a, b, c, d\}$ और $Y = \{f, b, d, g\}$, तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए।
(i) $X - Y$ (ii) $Y - X$ (iii) $X \cap Y$

हल (i) $X - Y$ = {वे अवयव जो X में हैं किंतु Y में नहीं हैं}
$= \{a, b, c, d\} - \{f, b, d, g\}$
$= \{a, c\}$

(ii) $Y - X$ = {वे अवयव जो Y में हैं किंतु X में नहीं हैं}
$= \{f, b, d, g\} - \{a, b, c, d\}$
$= \{f, g\}$

(iii) $X \cap Y$ = {वे अवयव जो X तथा Y दोनों में उभयनिष्ठ हों}
$= \{a, b, c, d\} \cap \{f, b, d, g\}$
$= \{b, d\}$

प्रश्न 11. यदि R वास्तविक संख्याओं और Q परिमेय संख्याओं के समुच्चय हैं, तो $R-Q$ क्या होगा?

हल चूँकि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, परिमेय संख्याओं के समुच्चय तथा अपरिमेय संख्याओं के समुच्चय का सम्मिलन होता है।

$\therefore$ $R - Q =$ अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय होगा।

प्रश्न 12. बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य है या असत्य? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $\{2, 3, 4, 5\}$ तथा $\{3, 6\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ तथा $\{a, b, c, d\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ तथा $\{3, 7, 11, 15\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iv) $\{2, 6, 10\}$ तथा $\{3, 7, 11\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

हल (i) $\{2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 6\} = \{3\} \neq \phi$

$\Rightarrow$ दिए हुए समुच्चय असंयुक्त समुच्चय नहीं हैं, अतः दिया गया कथन असत्य है।

(ii) $\{a, e, i, o, u\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a\} \neq \phi$

$\Rightarrow$ दिए हुए समुच्चय असंयुक्त समुच्चय नहीं हैं, अतः दिया गया कथन असत्य है।

(iii) $\{2, 6, 10, 14\} \cap \{3, 7, 11, 15\} = \phi$

$\Rightarrow$ दिए हुए समुच्चय असंयुक्त समुच्चय हैं, अतः दिया गया कथन सत्य है।

(iv) $\{2, 6, 10\} \cap \{3, 7, 11\} = \phi$

$\Rightarrow$ दिए हुए समुच्चय असंयुक्त समुच्चय हैं, अतः दिया गया कथन सत्य है।

प्रश्नावली 1.5

प्रश्न 1. मान लीजिए कि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ और $C = \{3, 4, 5, 6\}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

(i) A' (iii) $(A \cup C)'$ (iv) $(A \cup B)'$

(v) $(A')'$ (vi) $(B - C)'$

किसी समुच्चय A का पूरक $A' = U - A$ होता है अर्थात् समुच्चय A का पूरक उन अवयवों का समुच्चय है जो U में हैं लेकिन A में नहीं हैं।

हल (i) $A' = U - A$

$=$ {वे अवयव जो U में हैं किंतु A में नहीं हैं}

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

(ii) $B' = U - B$

$=$ {वे अवयव जो U में हैं किंतु B में नहीं हैं}

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(iii) $(A \cup C)' = U - (A \cup C)$

= {वे अवयव जो U में हैं किंतु $(A \cup C)$ में नहीं हैं }
= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} − {1, 2, 3, 4, 5, 6} = {7, 8, 9}

(iv) $(A \cup B)' = U - (A \cup B)$
= {वे अवयव जो U में हैं किंतु $(A \cup B)$ में नहीं हैं}
= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} − {1, 2, 3, 4, 6, 8} = {5, 7, 9}

(v) $(A')' = A = \{1, 2, 3, 4\}$

(vi) $(B - C)' = U - (B - C)$
= {वे अवयव जो U में हैं किंतु $(B - C)$ में नहीं हैं}
= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} − {2, 8} = {1, 3, 4, 5, 6, 7, 9}

प्रश्न 2. यदि $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, तो निम्नलिखित समुच्चयों के पूरक ज्ञात कीजिए।

(i) $A = \{a, b, c\}$ (ii) $B = \{d, e, f, g\}$
(iii) $C = \{a, c, e, g\}$ (iv) $D = \{f, g, h, a\}$

हल (i) $A' = U - A$
= {वे अवयव जो U में हैं किंतु A में नहीं हैं }
= $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} - \{a, b, c\} = \{d, e, f, g, h\}$

(ii) $B' = U - B$
= {वे अवयव जो U में हैं किंतु B में नहीं हैं }
= $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} - \{d, e, f, g\} = \{a, b, c, h\}$

(iii) $C' = U - C$
= {वे अवयव जो U में हैं किंतु C में नहीं हैं }
= $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} - \{a, c, e, g\} = \{b, d, f, h\}$

(iv) $D' = U - D$
= {वे अवयव जो U में हैं किंतु D में नहीं हैं }
= $\{a, b, c, d, e, f, g, h\} - \{f, g, h, a\} = \{b, c, d, e\}$

प्रश्न 3. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय मानते हुए, निम्नलिखित समुच्चयों के पूरक लिखिए।

(i) {$x : x$, एक प्राकृत सम संख्या है। }
(ii) {$x : x$, एक प्राकृत विषम संख्या है। }
(iii) {$x : x$, संख्या 3 का एक धन गुणज है। }
(iv) {$x : x$, एक अभाज्य संख्या है। }
(v) {$x : x$, 3 और 5 से विभाजित होने वाली एक संख्या है। }
(vi) {$x : x$, एक पूर्ण वर्ग संख्या है। }
(vii) {$x : x$, एक पूर्ण घन संख्या है। }
(viii) $\{x : x + 5 = 8\}$
(ix) $\{x : 2x + 5 = 9\}$
(x) $\{x : x \geq 7\}$
(xi) {$x : x \in N$ और $2x + 1 > 10$}

हल दिया है, U = प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$

(i) माना $A = \{x : x$, एक प्राकृत सम संख्या है।$\}$

$= \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A' = U - A$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\} - \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$

$= \{x : x$, एक विषम प्राकृत संख्या है।$\}$

(ii) माना $A = \{x : x$, एक प्राकृत विषम संख्या है।$\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A' = U - A$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\} - \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$

$= \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

$= \{x : x$, एक प्राकृत सम संख्या है।$\}$

(iii) माना $A = \{x : x$, संख्या 3 का एक धन गुणज है।$\}$

$= \{3, 6, 9, 12, 15, ..\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A'$

$= U - A$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\} - \{3, 6, 9, 12, 15, ...\}$

$= \{1, 2, 4, 5, ...\}$

$= \{x : x \in N$ और x, 3 का गुणज नहीं है।$\}$

(iv) माना $A = \{x : x$, एक अभाज्य संख्या है।$\}$

$= \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\} - \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$

$= \{1, 4, 6, 8\}$

$= \{x : x$, एक धन भाज्य संख्या है और $x = 1\}$

(v) माना $A = \{x : x$, 3 और 5 से विभाजित होने वाली एक संख्या है।$\}$

$= \{15, 30, 45, 60, ...\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A' = U - A$

$= \{1, 2, 3, 4, ..., 15, 16, ...30, 31, ...\} - \{15, 30, 45, 60, ...\}$

$= \{1, 2, 3, 4, ..., 14, 16, 17, ..29, ...\}$

$= \{x : x$, एक धन पूर्णांक है जो 15 से विभाज्य नहीं है।$\}$

(vi) माना $A = \{x : x$, एक पूर्ण वर्ग संख्या है।$\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A'$

$= \{x : x \in N$ और x एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।$\}$

(vii) माना $A = \{x : x$, एक पूर्ण घन संख्या है।$\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A'$

$= \{x : x \in N$ और x एक पूर्ण घन संख्या नहीं है।$\}$

(viii) माना $A = \{x : x + 5 = 8\} = \{x : x = 3\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A'$

$= \{x : x \in N$ तथा $x \neq 3\}$

(ix) माना $A = \{x : 2x + 5 = 9\}$

$\Rightarrow$ $A = \{x : x = 2\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A' = \{x : x \in N$ तथा $x \neq 2\}$

(x) माना $A = \{x : x \geq 7\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A' = \{x : x \in N$ तथा $x < 7\}$

(xi) माना $A = \{x : x \in N$ तथा $2x + 1 > 10\}$

$\Rightarrow$ $A = \{x : x \in N$ तथा $x > \frac{9}{2}\}$

$\therefore$ A का पूरक $= A' = \{x : x \in N$ तथा $x \leq \frac{9}{2}\}$

प्रश्न 4. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{2, 3, 5, 7\}$, तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

हल (i) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{2, 3, 5, 7\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\Rightarrow$ $(A \cup B)' = U - (A \cup B)$

$=\{$वे अवयव जो U में हैं किंतु $(A \cup B)$ में नहीं हैं $\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$= \{1, 9\}$ ...(i)

अब, A का पूरक $= A' = U - A$

$=\{$वे अवयव जो U में हैं किंतु A में नहीं हैं $\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

तथा B का पूरक $= B' = U - B$

$=\{$वे अवयव जो U में हैं किंतु B में नहीं हैं$\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 3, 5, 7\}$

$= \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$\Rightarrow$ $A' \cap B' = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$= \{1, 9\}$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से,

$\Rightarrow$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $A \cap B = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{2\}$

$(A \cap B)' = U - (A \cap B)$

= {वे अवयव जो U में हैं किंतु $(A \cap B)$ में नहीं हैं}

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2\}$

$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ...(i)

A का पूरक $= A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

और B का पूरक $= B' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

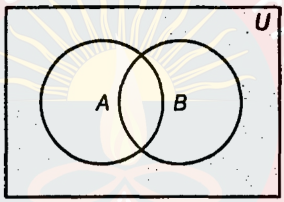
$\Rightarrow \quad A' \cup B' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

प्रश्न 5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए उपर्युक्त वेन आरेख खींचिए।

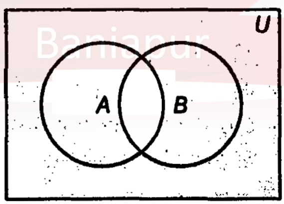
(i) $(A \cup B)'$ (ii) $A' \cap B'$ (iii) $(A \cap B)'$ (iv) $A' \cup B'$

हल (i) $(A \cup B)' = U - (A \cup B)$ = छायांकित क्षेत्र



(ii) $A' \cap B' = (A \cup B)'$ (डि-मॉर्गन नियम द्वारा) = जैसा भाग (i) में दिखाया गया है।

(iii) $(A \cap B)' = U - (A \cap B)$ = छायांकित भाग



(iv) $A' \cup B' = (A \cap B)'$ (डि-मॉर्गन नियम द्वारा)

= जैसा भाग (iii) में दिखाया गया है।

प्रश्न 6. मान लीजिए कि किसी समतल में स्थित सभी त्रिभुजों का समुच्चय सार्वत्रिक समुच्चय U है। यदि A उन सभी त्रिभुजों का समुच्चय है जिनमें कम-से-कम एक कोण $60°$ से भिन्न है, तो A' क्या है?

हल हम जानते हैं कि समबाहु त्रिभुज में सभी कोणों की माप $60°$ होती है।

A उन सभी त्रिभुजों का समुच्चय है जिनमें कोई भी त्रिभुज समबाहु नहीं है क्योंकि उनमें कम-से-कम एक कोण $60°$ से भिन्न है।

$\therefore A'$ = अवयवों का समुच्चय जो U में है किंतु A में नहीं है।

= समबाहु त्रिभुज का समुच्चय

प्रश्न 7. निम्नलिखित कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों को भरिए।

(i) $A \cup A' = \ldots$ (ii) $\phi' \cap A = \ldots$ (iii) $A \cap A' = \ldots$ (iv) $U' \cap A = \ldots$

हल (i) $A \cup A' = U$

चूँकि कोई समुच्चय तथा इसका पूरक, सार्वत्रिक समुच्चय के बराबर होता है।

(ii) $\phi' \cap A$

$= U \cap A$ (चूँकि रिक्त समुच्चय का पूरक, सार्वत्रिक समुच्चय होता है)

$= A$ (किसी समुच्चय A तथा सार्वत्रिक समुच्चय का सर्वनिष्ठ समुच्चय, A होता है)

(iii) $A \cap A' = \phi$

(चूँकि, किसी समुच्चय तथा इसके पूरक का सर्वनिष्ठ, हमेशा रिक्त समुच्चय होता है)

(iv) $U' \cap A$

$= \phi \cap A$ (चूँकि सार्वत्रिक समुच्चय का पूरक रिक्त समुच्चय होता है)

$= \phi$ (किसी समुच्चय A तथा रिक्त समुच्चय का सर्वनिष्ठ, हमेशा रिक्त समुच्चय होता है)

प्रश्नावली 1.6

प्रश्न 1. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $n(X) = 17, n(Y) = 23$ तथा $n(X \cup Y) = 38$, तो $n(X \cap Y)$ ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 1 - 8) निम्नलिखित प्रश्नों में हम निम्न तदात्मय

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

का प्रयोग करेंगे। चार मानों में से किसी एक मान को ज्ञात करने के लिए यदि इनमें से कोई तीन मान दिए हुए हों, तब चौथा मान प्राप्त कर सकते हैं।

हल दिया है,

$n(X) = 17, n(Y) = 23, n(X \cup Y) = 38$

तदात्मय $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ का प्रयोग करने पर,

$\Rightarrow \quad n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$

$= 17 + 23 - 38 = 40 - 38 = 2$

प्रश्न 2. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $X \cup Y$ में 18, X में 8 और Y में 15 अवयव हों, तो $X \cap Y$ में कितने अवयव होंगे?

हल दिया है, $n(X \cup Y) = 18$

$n(X) = 8, n(Y) = 15$

तदात्मय $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ का प्रयोग करने पर,

$18 = 8 + 15 - n(X \cap Y)$

$\Rightarrow \quad n(X \cap Y) = 23 - 18 = 5$

प्रश्न 3. 400 व्यक्तियों के समूह में, 250 हिंदी तथा 200 अंग्रेजी बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति हिंदी तथा अंग्रेजी दोनों बोल सकते हैं?

हल माना H तथा E क्रमशः हिंदी तथा अंग्रेजी बोलने वाले लोग हैं।

$\therefore \quad n(H) = 250$

$n(E) = 200$

तथा $\quad n(H \cup E) = 400$

तदात्मय $n(H \cup E) = n(H) + n(E) - n(H \cap E)$ का प्रयोग करने पर,

$400 = 250 + 200 - n(H \cap E)$

$\Rightarrow \quad 400 = 450 - n(H \cap E)$

$\Rightarrow \quad n(H \cap E) = 450 - 400 = 50$

प्रश्न 4. यदि S और T दो ऐसे समुच्चय हैं कि S में 21, T में 32 और $S \cap T$ में 11 अवयव हों, तो $S \cup T$ में कितने अवयव होंगे?

हल दिया है,

$n(S) = 21, n(T) = 32, n(S \cap T) = 11$

तदात्मय $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$ का प्रयोग करने पर,

$n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$

$\Rightarrow \quad n(S \cup T) = 21 + 32 - 11 = 53 - 11 = 42$

प्रश्न 5. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि X में 40, $X \cup Y$ में 60 और $X \cap Y$ में 10 अवयव हों, तो Y में कितने अवयव होंगे?

हल दिया है, $\quad n(X) = 40, n(X \cup Y) = 60, n(X \cap Y) = 10$

$n(Y) = ?$

तदात्मय $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ का प्रयोग करने पर,

$\Rightarrow \quad 60 = 40 + n(Y) - 10$

$\Rightarrow \quad 60 = 30 + n(Y)$

$\Rightarrow \quad n(Y) = 30$

प्रश्न 6. 70 व्यक्तियों के समूह में, 37 कॉफी और 52 चाय पसंद करते हैं और प्रत्येक व्यक्ति दोनों में से कम-से-कम एक पेय पसंद करता है, तो कितने व्यक्ति कॉफी और चाय दोनों को पसंद करते हैं?

हल माना कॉफी तथा चाय पसंद करने वाले लोगों को क्रमशः C तथा T द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

तब, $\quad n(C \cup T) = 70, n(C) = 37, n(T) = 52$

$n(C \cap T) = ?$

तदात्मय $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T)$ का प्रयोग करने पर,

$\therefore \quad 70 = 37 + 52 - n(C \cap T)$

$\Rightarrow \quad 70 = 89 - n(C \cap T)$

$\Rightarrow \quad n(C \cap T) = 89 - 70 = 19$

Durga Tutorial Since 1996 Baniapur

प्रश्न 7. 65 व्यक्तियों के समूह में, 40 व्यक्ति क्रिकेट और 10 व्यक्ति क्रिकेट तथा टेनिस दोनों को पसंद करते हैं, तो कितने व्यक्ति केवल टेनिस को पसंद करते हैं किंतु क्रिकेट को नहीं? कितने व्यक्ति टेनिस को पसंद करते हैं?

हल माना क्रिकेट तथा टेनिस पसंद करने वाले लोगों को क्रमशः C तथा T द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

तब, $n(C \cup T) = 65, n(C) = 40, n(C \cap T) = 10$

तदात्मय $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T)$ का प्रयोग करने पर,

$\therefore \quad 65 = 40 + n(T) - 10$

$\Rightarrow \quad 65 = 30 + n(T)$

$\Rightarrow \quad 65 - 30 = n(T)$

$\Rightarrow \quad n(T) = 35$

अतः लोगों की संख्या, जो केवल टेनिस को पसंद करते हैं किंतु क्रिकेट को नहीं

$= n(T \cap C')$

$= n(T) - n(C \cap T)$

$= 35 - 10 = 25$

प्रश्न 8. एक कमेटी में, 50 व्यक्ति फ्रेंच, 20 व्यक्ति स्पेनिश और 10 व्यक्ति स्पेनिश और फ्रेंच दोनों ही भाषाओं को बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति इन दोनों ही भाषाओं में से कम-से-कम एक भाषा बोल सकते हैं?

कम-से-कम का अर्थ $(A \cup B)$ से है अर्थात् दो भाषाओं में से कम-से-कम एक भाषा बोलने वाले व्यक्तियों की संख्या को निकालने के लिए हम $(A \cup B)$ में अवयवों की संख्या निकालते हैं।

हल फ्रेंच तथा स्पेनिश बोलने वाले व्यक्तियों को क्रमशः F तथा S द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

दिया है, $n(F) = 50, n(S) = 20, n(S \cap F) = 10$

तदात्मय $n(S \cup F) = n(S) + n(F) - n(S \cap F)$ का प्रयोग करने पर,

$n(S \cup F) = 20 + 50 - 10$

$= 70 - 10 = 60$

$\therefore \quad n(S \cup F) = 60$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन किसका उपसमुच्चय है? इसका निर्णय कीजिए। $A = \{x : x \in R$ तथा $x^2 - 8x + 12 = 0$ को संतुष्ट करने वाली सभी वास्तविक संख्याएँ $x\}$, $B = \{2, 4, 6\}, C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}, D = \{6\}$

यदि A का प्रत्येक अवयव B में है, तब इसे हम लिखते हैं $A \subset B$

हल दिया है, $A = \{x : x \in R$ तथा $x^2 - 8x + 12 = 0$ को संतुष्ट करने वाली सभी वास्तविक संख्याएँ $x\}$

$\because \qquad x^2 - 8x + 12 = 0$

$\Rightarrow \qquad x - 6x - 2x + 12 = 0$

$\Rightarrow \qquad x(x-6) - 2(x-6) = 0$

$\Rightarrow \qquad (x-2)(x-6) = 0$

$\Rightarrow \qquad x = 2, 6,$

$A = \{6, 2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 8 \ldots\}$ और $D = \{6\}$

$\because$ A का प्रत्येक अवयव B तथा C में है।

$\therefore \qquad A \subset B$ तथा $A \subset C$

पुनः, B का प्रत्येक अवयव C में है।

$\therefore \qquad B \subset C$

D का प्रत्येक अवयव A, B तथा C में है।

$\therefore \qquad D \subset A, D \subset B$ तथा $D \subset C$

प्रश्न 2. **ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन सत्य है या असत्य है। यदि सत्य है, तो उसे सिद्ध कीजिए। यदि असत्य है, तो एक उदाहरण दीजिए।**

(i) **यदि** $x \in A$ **तथा** $A \in B$, **तो** $x \in B$

(ii) **यदि** $A \subset B$ **तथा** $B \in C$, **तो** $A \in C$

(iii) **यदि** $A \subset B$ **तथा** $B \subset C$, **तो** $A \subset C$

(iv) **यदि** $A \not\subset B$ **तथा** $B \not\subset C$, **तो** $A \not\subset C$

(v) **यदि** $x \in A$ **तथा** $A \not\subset B$, **तो** $x \in B$

(vi) **यदि** $A \subset B$ **तथा** $x \notin B$, **तो** $x \notin A$

हल (i) **असत्य**

माना $A = \{2\}$, $B = \{\{2\}, 3\}$

$\Rightarrow \qquad 2 \in A$ तथा $A \in B$ किंतु $2 \notin B$

अतः यदि $x \in A$ तथा $A \in B$, तब आवश्यक नहीं है कि $x \in B$

(ii) **असत्य**

माना $A = \{2\}$, $B = \{2, 3\}$ तथा $C = \{\{2, 3,\}, 4\}$

$\Rightarrow \qquad A \subset B$ तथा $B \in C$ किंतु $A \notin C$

अतः यदि $A \subset B$ तथा $B \in C$, तब आवश्यक नहीं है कि $A \in C$

(iii) **सत्य**

माना $1 \in A$, तब

यदि $\qquad A \subset B \Rightarrow 1 \in B$ और यदि $B \subset C \Rightarrow 1 \in C$

$\Rightarrow \qquad 1 \in A \Rightarrow 1 \in C$

अतः $\qquad A \subset C$

$\therefore$ यदि $A \subset B$ तथा $B \subset C$ तब, $A \subset C$

(iv) **असत्य**

माना $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ तथा $C = \{1, 2, 4\}$

$\Rightarrow \qquad A \not\subset B$ और $B \not\subset C$ किंतु $A \subset C$

अतः यदि $A \not\subset B$ तथा $B \not\subset C$, तब आवश्यक नहीं है कि $A \not\subset C$

(v) **असत्य**

माना $A = \{1, 2\}$ तथा $B = \{2, 3, 4, 5\}$

$1 \in A$ तथा $A \not\subset B$ किंतु $1 \notin B$

अतः यदि $x \in A$ तथा $A \not\subset B$, तब आवश्यकन हीं है कि $x \in B$

और यदि $x \notin B \Rightarrow x \notin A$

(vi) **सत्य**

माना $A \subset B$, तब यदि $x \in A \Rightarrow x \in B$ और यदि $x \notin B \Rightarrow x \notin A$

प्रश्न 3. मान लीजिए A, B और C ऐसे समुच्चय हैं कि $A \cup B = A \cup C$ तथा $A \cap B = A \cap C$, तो दर्शाइए कि $B = C$

हल दिया है, $A \cup B = A \cup C$

$\Rightarrow (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C$

$\Rightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C) = C$ $[\because (A \cup C) \cap C = C]$

$\Rightarrow (A \cap B) \cup (B \cap C) = C$ $(\because A \cap C = A \cap B)$ ...(i)

पुनः $A \cup B = A \cup C$

$\Rightarrow (A \cup B) \cap B = (A \cup C) \cap B$

$\Rightarrow B = [(A \cap B) \cup (C \cap B)]$ $[\because (A \cup B) \cap B = B]$

$\Rightarrow B = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से, $B = C$

प्रश्न 4. दिखाइए कि निम्नलिखित चार प्रतिबंध तुल्य हैं

(i) $A \subset B$ (ii) $A - B = \phi$ (iii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B = A$

हल (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

$A \subset B \Leftrightarrow$ A के सभी अवयव B में हैं।

$\Leftrightarrow A - B = \phi$

अतः (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

अब, दिया है, $A - B = \phi$

$\Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

अतः (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv)

दिया है, $A \cup B = B$

$\Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$\therefore$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)

(iv) $\Leftrightarrow$ (i)

दिया है, $A \cap B = A$

$\Leftrightarrow A \subset B$

$\therefore$ (iv) $\Leftrightarrow$ (i)

अतः (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)

Durga Tutorial Since Baniapur

प्रश्न 5. दिखाइए कि यदि $A \subset B$, तो $C - B \subset C - A$

हल माना $x \in C - B$

$\Rightarrow$ $x \in C$ तथा $x \notin B$

$\Rightarrow$ $x \in C$ तथा $x \notin A$ $(\because A \subset B)$

$\Rightarrow$ $x \in C - A$

$\therefore$ $C - B \subset C - A$

प्रश्न 6. मान लीजिए कि $P(A) = P(B)$, सिद्ध कीजिए कि $A = B$

हल माना A का x कोई स्वेच्छ अवयव है, तब एक उपसमुच्चय (माना X) समुच्चय A में इस प्रकार विद्यमान होता है कि $x \in X$

अब, $x \in X \Rightarrow X \subset A$

$\Rightarrow$ $X \in P(A) \Rightarrow X \in P(B)$

$\Rightarrow$ $X \subset B \Rightarrow x \in B$

$x \in A \Rightarrow x \in B$

अत: $A \subset B$ ...(i)

पुन: अब, माना B का y कोई स्वेच्छ अवयव है।

तब, समुच्चय B में एक उपसमुच्चय (माना Y) इस प्रकार विद्यमान होता है कि $y \in Y$

अब, $y \in Y \Rightarrow Y \subset B$

$\Rightarrow$ $Y \in P(B) \Rightarrow Y \in P(A)$ $[\because P(A) = P(B)]$

$\Rightarrow$ $Y \subset A \Rightarrow y \in A$

अत:, $y \in B \Rightarrow y \in A$

$\therefore$ $B \subset A$ ...(ii)

समा (i) तथा (ii) से, $A = B$

प्रश्न 7. किन्हीं भी समुच्चयों A तथा B के लिए, क्या यह सत्य है कि $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

हल कोई समुच्चय A तथा B के लिए तदात्मय $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ सत्य नहीं है।

इसे हम एक उदाहरण द्वारा सिद्ध करेंगे।

माना $A = \{1\}, B = \{2\}$

$\Rightarrow$ $A \cup B = \{1, 2\}$

$\therefore$ $P(A) = \{\phi, \{1\}\}, P(B) = \{\phi, \{2\}\}$

तथा $P(A \cup B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ...(i)

$\Rightarrow$ $P(A) \cup P(B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}\}$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से,

$\Rightarrow$ $P(A) \cup P(B) \neq (A \cup B)$

Durga Tutorial Since 1996 Banlapur

प्रश्न 8. किन्हीं दो समुच्चयों A तथा B के लिए सिद्ध कीजिए कि

$A = (A \cap B) \cup (A - B)$ और $A \cup (B - A) = (A \cup B)$

हल $(A \cap B) \cup (A - B)$

$= (A \cap B) \cup (A \cap B')$ $\quad (\because A - B = A \cap B')$

$= A \cap (B \cup B')$ $\quad [\because (A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B')]$

$= A \cap U$ $\quad (\because B \cup B' = U)$

$= A$

पुनः, $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A')$ $\quad (\because B - A = B \cap A')$

$= (A \cup B) \cap (A \cup A')$

$[\because A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A')]$

$= (A \cup B) \cap U$ $\quad (\because A \cup A' = U)$

$= A \cup B$

प्रश्न 9. समुच्चयों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$

हल (i) $A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B) = A$

(ii) $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A$

प्रश्न 10. दिखाइए कि $A \cap B = A \cap C$ का तात्पर्य $B = C$ आवश्यक रूप से नहीं होता है।

हल माना $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\},$

$C = \{3, 4, 7, 8\}$

तब, $A \cap B = \{3, 4\}$ ...(i)

$A \cap C = \{3, 4\}$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से,

$A \cap B = A \cap C$

लेकिन $B \neq C$

प्रश्न 11. मान लीजिए कि A और B समुच्चय हैं। यदि किसी समुच्चय X के लिए $A \cap X = B \cap X = \phi$ तथा $A \cup X = B \cup X$, तो सिद्ध कीजिए कि $A = B$

(संकेत $A = A \cap (A \cup X), B = B \cap (B \cup X)$ और वितरण नियम का प्रयोग कीजिए)

हल हम जानते हैं कि दो समुच्चय बराबर होते हैं यदि वे जब एक-दूसरे के उपसमुच्चय होते हैं।

अब, दिया है,

$A \cup X = B \cup X$ कोई समुच्चय X के लिए

$\Rightarrow$ $A \cap (A \cup X) = A \cap (B \cup X)$

$\Rightarrow$ $A = (A \cap B) \cup (A \cap X)$ [बंटन नियम और $A \cap (A \cup X) = A$ के प्रयोग से]

$\Rightarrow$ $A = (A \cap B) \cup \phi$ $\quad (\because A \cap X = \phi$, दिया है)

$\Rightarrow$ $A = A \cap B$

$\Rightarrow$ $A \subset B$ ...(i)

Tutorial Baniapur 1996

पुन: $A \cup X = B \cup X$

या $B \cup X = A \cup X$

$\Rightarrow$ $B \cap (B \cup X) = B \cap (A \cup X)$

$\Rightarrow$ $B = (B \cap A) \cup (B \cap X)$ (बंटन नियम के प्रयोग से)

$\Rightarrow$ $B = (B \cap A) \cup \phi$ ($\because B \cap X = \phi$, दिया है)

$\Rightarrow$ $B = (B \cap A)$

$\Rightarrow$ $B \subset A$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) से, $A = B$

प्रश्न 12. ऐसे समुच्चय A, B और C ज्ञात कीजिए ताकि $A \cap B$, $B \cap C$ तथा $A \cap C$ अरिक्त समुच्चय हों और $A \cap B \cap C = \phi$

हल माना $A = \{3, 4\}, B = \{4, 5\}, C = \{3, 5, 6\}$

अब, $A \cap B = \{3, 4\} \cap \{4, 5\} = \{4\} \neq \phi$,

$B \cap C = \{4, 5\} \cap \{3, 5, 6\} = \{5\} \neq \phi$,

$A \cap C = \{3, 4\} \cap \{3, 5, 6\} = \{3\} \neq \phi$

और $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = \{4\} \cap \{3, 5, 6\} = \phi$

इसी प्रकार हम कुछ दूसरे प्रकार के समुच्चय भी चुन सकते हैं।

प्रश्न 13. किसी विद्यालय के 600 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से ज्ञात हुआ कि 150 विद्यार्थी चाय, 225 विद्यार्थी कॉफी तथा 100 विद्यार्थी चाय और कॉफी दोनों पीते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो चाय पीते हैं और न कॉफी पीते हैं?

हल माना C तथा T क्रमशः कॉफी तथा चाय पीने वाले विद्यार्थियों को प्रदर्शित करते हैं।

यहाँ, $n(T) = 150, n(C) = 225, n(C \cap T) = 100$

तदात्मय $n(C \cup T) = n(T) + n(C) - n(C \cap T)$ का प्रयोग करने पर,

$n(C \cup T) = 150 + 225 - 100 = 375 - 100$

$\Rightarrow$ $n(C \cup T) = 275$

दिया है, कुल विद्यार्थियों की संख्या $= 600 = n(U)$

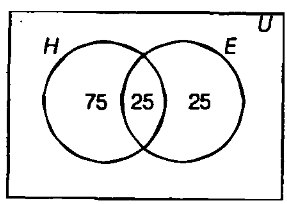
हमें ज्ञात करना है, विद्यार्थियों की संख्या, जो न तो चाय पीते हैं और न कॉफी पीते हैं

अर्थात् $n(C \cup T)'$

$\therefore$ $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = 600 - 275 = 325$

प्रश्न 14. विद्यार्थियों के एक समूह में, 100 विद्यार्थी हिंदी, 50 विद्यार्थी अंग्रेजी तथा 25 विद्यार्थी दोनों भाषाओं को जानते हैं। विद्यार्थियों में से प्रत्येक या तो हिंदी या अंग्रेजी जानता है। समूह में कुल कितने विद्यार्थी हैं?

हल माना H तथा E क्रमशः हिंदी तथा अंग्रेजी जानने वाले विद्यार्थियों को प्रदर्शित करते हैं।



दिया है, $n(H) = 100$

$n(E) = 50$

$n(H \cap E) = 25$

हमें कुल विद्यार्थियों की संख्या $n(H \cup E)$ ज्ञात करना है।

तदात्मय $n(H \cup E) = n(H) + n(E) - n(H \cap E)$ का प्रयोग करने पर,

$$n(H \cup E) = 100 + 50 - 25 = 150 - 25 = 125$$

$$\Rightarrow \quad n(H \cup E) = 125$$

प्रश्न 15. 60 लोगों के सर्वेक्षण में पाया गया कि 25 लोग समाचार पत्र H, 26 लोग समाचार पत्र T, 26 लोग समाचार पत्र I, 9 लोग H तथा I दोनों, 11 लोग H तथा T दोनों, 8 लोग T तथा I दोनों और 3 लोग तीनों ही समाचार पत्र पढ़ते हैं, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए

(i) कम-से-कम एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या।

(ii) ठीक-ठीक केवल एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या।

हल माना H, T तथा I क्रमशः समाचार पत्र H, T तथा I पढ़ने वाले लोगों को प्रदर्शित करते हैं।

यहाँ,
$$n(H) = 25, n(T) = 26, n(I) = 26$$
$$n(H \cap I) = 9, n(H \cap T) = 11, n(T \cap I) = 8$$
$$n(H \cap T \cap I) = 3$$

(i) कम-से-कम एक समाचार पत्र पढ़ने वाले लोगों की संख्या

$$= n(H \cup T \cup I)$$
$$= n(H) + n(T) + n(I) - n(H \cap T) - n(T \cap I) - n(H \cap I) + n(H \cap T \cap I)$$
$$= 25 + 26 + 26 - 11 - 8 - 9 + 3$$
$$= 77 - 28 + 3 = 80 - 28 = 52$$

(ii) ठीक-ठीक केवल एक समाचार पत्र पढ़ने वाले लोगों की संख्या

$$= n(H \text{ केवल}) + n(T \text{ केवल}) + n(I \text{ केवल})$$
$$= n(H) - n(H \cap T) - n(H \cap I) + n(H \cap T \cap I) + n(T) - n(T \cap H) - n(T \cap I) + n(H \cap T \cap I) + n(I) - n(I \cap H) - n(I \cap T) + n(H \cap T \cap I)$$
$$= n(H) + n(T) + n(I) - 2\{n(H \cap I) + n(H \cap T) + n(T \cap I)\} + 3n(H \cap T \cap I)$$
$$= 25 + 26 + 26 - 2\{9 + 11 + 8\} + 3 \times 3$$
$$= 77 - 2 \times 28 + 9 = 86 - 56 = 30$$

प्रश्न 16. एक सर्वेक्षण में पाया गया कि 21 लोग उत्पाद A, 26 लोग उत्पाद B, 29 लोग उत्पाद C पसंद करते हैं। यदि 14 लोग उत्पाद A तथा B, 12 लोग उत्पाद C तथा A, 14 लोग उत्पाद B तथा C और 8 लोग तीनों ही उत्पादों को पसंद करते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने लोग केवल उत्पाद C को पसंद करते हैं।

हल माना A, B तथा C क्रमशः लोग उत्पाद A, B तथा C पसंद करने वाले हैं।

यहाँ, $n(A) = 21, n(B) = 26, n(C) = 29,$

$n(A \cap B) = 14, n(C \cap A) = 12, n(B \cap C) = 14, n(A \cap B \cap C) = 8$

$$n(\text{केवल } C) = n(C) - n(C \cap A) - n(C \cap B) + n(C \cap B \cap A)$$
$$= 29 - 12 - 14 + 8 = 29 - 26 + 8 = 37 - 26 = 11$$

Durga Tutorial
Baniapur
Since 1996

Durga Tutorial

Online Classes

Thank You For Downloading Notes

ज्यादा जानकारी के लिए हमें Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511