Durga Tutorial
Since 1996
Baniapur

Durga Tutorial

Online Classes

बिहार बोर्ड और CBSE बोर्ड की तैयारी

Free Notes के लिए

www.durgatutorial.com

पर जाएँ।

ज्यादा जानकारी के लिए हमें

Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511

14
अध्याय

गणितीय विवेचन

Mathematical Reasoning

प्रश्नावली 14.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित वाक्यों में से कौन-सा कथन है? अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।

(i) एक महीने में 35 दिन होते हैं।
(ii) गणित एक कठिन विषय है।
(iii) 5 और 7 का योगफल 10 से अधिक है।
(iv) किसी संख्या का वर्ग एक सम संख्या होती है।
(v) किसी चतुर्भुज की भुजाएँ बराबर (समान) लंबाई की होती हैं।
(vi) इस प्रश्न का उत्तर दीजिए।
(vii) −1 और 8 का गुणनफल 8 है।
(viii) किसी त्रिभुज के सभी अंतः कोणों का योगफल 180° होता है।
(ix) आज एक तूफानी दिन है।
(x) सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ होती हैं।

कथन सदैव या तो सत्य होता है या असत्य होता है किंतु कभी भी एक वस्तु से दूसरी वस्तु के लिए कथन परिवर्तित नहीं होता है।

हल (i) यह वाक्य सदैव असत्य है, क्योंकि किसी माह में अधिकतम 31 दिन होते हैं। अतः यह एक कथन है।

(ii) यह एक कथन नहीं है, क्योंकि कुछ लोगों के लिए गणित सरल हो सकता है और कुछ अन्य लोगों के लिए यह कठिन हो सकता है।

(iii) यह वाक्य सदैव सत्य है, क्योंकि योगफल 12 है और यह 10 से अधिक है। अतः यह एक कथन है।

(iv) किसी संख्या का वर्ग सम हो भी हो सकता है और नहीं भी। विषम संख्या का वर्ग सदैव विषम संख्या तथा सम संख्या का वर्ग सदैव सम संख्या होती है। उदाहरण के लिए 4 का वर्ग एक सम संख्या है और 5 का वर्ग एक विषम संख्या है। इसलिए यह एक कथन नहीं है।

(v) यह वाक्य कभी सत्य होता है, कभी असत्य होता है। उदाहरण के लिए, वर्ग और समचतुर्भुज की भुजाएँ समान लंबाई की होती हैं जबकि आयत और समलंब की भुजाएँ असमान लंबाई की होती हैं। अतः यह कथन नहीं है।

(vi) यह एक आदेश है इसलिए यह एक कथन नहीं है।

(vii) यह वाक्य असत्य है क्योंकि गुणनफल (–8) प्राप्त होता है। अतः यह एक कथन है।

(viii) यह वाक्य सदैव सत्य होता है इसलिए यह एक कथन है।

(ix) प्रस्तुत वाक्य में यह स्पष्ट नहीं है कि किस दिन का उल्लेख किया गया है इसलिए यह एक कथन नहीं है।

(x) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि सभी वास्तविक संख्याओं को $x + i \times 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। अतः यह एक कथन है।

प्रश्न 2. वाक्यों के तीन ऐसे उदाहरण दीजिए जो कथन नहीं हैं। उत्तर के लिए कारण भी बताइए।

हल वाक्यों के तीन उदाहरण निम्न हैं,

(i) इस कमरे में उपस्थित प्रत्येक व्यक्ति निडर है। यह एक कथन नहीं है,क्योंकि संदर्भ से स्पष्ट नहीं है कि यहाँ पर किस कमरे के बारे में कहा जा रहा है और निडर शब्द भी स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं है।

(ii) वह अभियान्त्रिकी की छात्रा है। यह भी एक कथन नहीं है, क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि 'वह' कौन है?

(iii) $\cos^2\theta$ का मान सदैव 1/2 से अधिक होता है। जब तक हमें यह ज्ञात न हो कि θ क्या है? हम यह नहीं कह सकते कि वाक्य सत्य है या असत्य है।

प्रश्नावली 14.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित कथन के निषेघन लिखिए।

(i) **चेन्नई, तमिलनाडु की राजधानी है।**

(ii) **$\sqrt{2}$ एक सम्मिश्र संख्या नहीं है।**

(iii) **सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज नहीं होते हैं।**

(iv) **संख्या 2, संख्या 7 से अधिक है।**

(v) **प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्णांक होती है।**

निषेधन वाक्य बनाने में, यदि शब्द 'नहीं' वाक्य में दिया हुआ नहीं है, तब वाक्य में शब्द 'नहीं' का प्रयोग करते हैं। यदि शब्द 'नहीं' वाक्य में दिया हुआ हो, तब वाक्य में से शब्द 'नहीं' हटा देते हैं।

हल दिए हुए वाक्यों के निषेधन निम्न हैं,

(i) चेन्नई,तमिलनाडु की राजधानी नहीं है।

(ii) $\sqrt{2}$ एक सम्मिश्र संख्या है।

(iii) सभी त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

(iv) संख्या 2, संख्या 7 से अधिक नहीं है।

(v) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्णांक नहीं होती है।

प्रश्न 2. क्या निम्नलिखित कथन युग्म (कथन के जोड़े) एक–दूसरे के निषेघन हैं?

(i) संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है।
संख्या x एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

(ii) संख्या x एक परिमेय संख्या है।
संख्या x एक अपरिमेय संख्या है।

हल (i) कथन 'संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है',का निषेधन निम्न है 'x एक परिमेय संख्या है' अर्थात् x एक अपरिमेय संख्या नहीं है स्पष्ट रूप से जब कोई संख्या अपरिमेय नहीं है, तो वह परिमेय है। अतः दिए हुए कथन एक-दूसरे के निषेधन हैं।

(ii) संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है अर्थात् 'x एक अपरिमेय संख्या है' पहले कथन का निषेधन है, जो दूसरे कथन के बराबर है। अतः दोनों कथन एक-दूसरे के निषेधन हैं।

प्रश्न 3. निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए और जाँचिए कि वे सत्य हैं या असत्य हैं

(i) संख्या 3 अभाज्य है या विषम है।

(ii) समस्त (सभी) पूर्णांक धनात्मक हैं या ऋणात्मक हैं।

(iii) संख्या 100, संख्याओं 3,11 और 5 से भाज्य है।

सर्वप्रथम दिए हुए मिश्र वाक्य को दो घटक वाक्यों में अलग करते हैं। इसक बाद सत्य या असत्य की जाँच करते हैं।

हल (i) p : संख्या 3 अभाज्य है।
q : संख्या 3 विषम है।
p तथा q दोनों सत्य हैं।

(ii) p : सभी पूर्णांक धनात्मक हैं।
q : सभी पूर्णांक ऋणात्मक हैं।
p तथा q दोनों असत्य हैं

(iii) p : संख्या 100, 3 से भाज्य है।
q : संख्या 100, 11 से भाज्य है।
r : संख्या 100, 5 से भाज्य है।
p असत्य है, q असत्य है तथा r सत्य है।
p, q तथा r एक असत्य कथन हैं।

प्रश्नावली 14.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित मिश्र कथनों में पहले संयोजक शब्दों को पहचानिए और फिर उनको घटक कथनों में विघटित कीजिए।

(i) सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं और सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ नहीं होती हैं।

(ii) किसी पूर्णांक का वर्ग धन या ऋण होता है।

(iii) रेत (बालू) धूप में शीघ्र गर्म हो जाती है और रात्रि में शीघ्र ठंडी नहीं होती है।

(iv) $x = 2$ और $x = 3$, समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ के मूल हैं।

संयोजक शब्द 'और', 'या' हैं। इनके आधार पर मिश्र कथन को दो घटकों में विभक्त किया जाता हैं।

हल (i) संयोजक शब्द 'और' है।

p : सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं।

q : सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ नहीं होती हैं।

(ii) संयोजक शब्द 'या' है।

p : किसी पूर्णांक का वर्ग धन होता है।

q : किसी पूर्णांक का वर्ग ऋण होता है।

(iii) संयोजक शब्द 'और' है।

p : रेत धूप में शीघ्र गर्म हो जाती है।

q : रेत रात्रि में शीघ्र ठंडी नहीं होती है।

(iv) संयोजक शब्द 'और' है।

p : $x = 2$, समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का मूल है।

q : $x = 3$, समीकरण $3x^2 - x - 10 = 0$ का मूल है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित कथनों में परिमाणवाचक वाक्यांश पहचानिए और कथनों के निषेधन लिखिए।

(i) एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है, जो अपने वर्ग के बराबर है।

(ii) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, x, $(x + 1)$ से कम होता है।

(iii) भारत के हर एक राज्य/प्रदेश के लिए एक राजधानी का अस्तित्व है।

हल (i) **परिमाणवाचक वाक्यांश** 'एक ऐसे का अस्तित्व है'

p : एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है, जो अपने वर्ग के बराबर है।

p नहीं $(\sim p)$: एक ऐसी संख्या का अस्तित्व नहीं है जो अपने वर्ग के बराबर है।

(ii) **परिमाणवाचक वाक्यांश** 'प्रत्येक के लिए'

p : प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, x, $(x + 1)$ से कम होता है।

p नहीं $(\sim p)$: प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, x, $(x + 1)$ से कम नहीं होता है।

(iii) **परिमाणवाचक वाक्यांश** 'एक ऐसे का अस्तित्व है'

p : भारत के हर एक राज्य/प्रदेश के लिए एक राजधानी का अस्तित्व है।

p नहीं $(\sim p)$: भारत के हर एक राज्य/प्रदेश के लिए एक राजधानी का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 3. जाँचिए कि क्या नीचे लिखे कथनों के जोड़े (युग्म) एक-दूसरे के निषेधन हैं। अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।

(i) प्रत्येक वास्तविक संख्याओं x और y के लिए, $x + y = y + x$ सत्य है।

(ii) ऐसी वास्तविक संख्याओं x और y का अस्तित्व है, जिनके लिए, $x + y = y + x$ सत्य है।

हल कथन (i) तथा (ii) एक-दूसरे के निषेधन नहीं हैं।

प्रश्न 4. बताइए कि निम्नलिखित कथनों में प्रयुक्त 'या' 'अपवर्जित है' अथवा 'अंतर्विष्ट है। अपने उत्तर के लिए कारण भी बताइए।

(i) सूर्य उदय होता है या चंद्रमा अस्त होता है।

(ii) ड्राइविंग लाइसेंस के आवेदन हेतु आपके पास राशन कार्ड या पासपोर्ट होना चाहिए।

(iii) सभी पूर्णांक धन या ऋण होते हैं।

यदि वाक्यों में से एक सत्य हैं, तब 'या' 'अंतर्विष्ट' है और यदि दोनों वाक्य सत्य हैं, तब 'या' अपवर्जित है।

हल (i) जब सूर्य उदय होता है, तब चंद्रमा अस्त होता है।
उपरोक्त कथन से स्पष्ट है कि दोनों कभी भी एक साथ नहीं हो सकते। अत: यहाँ 'या' अपवर्जित है।

(ii) ड्राइविंग लाइसेंस के आवेदन हेतु आपके पास राशन कार्ड या पासपोर्ट या दोनों हो सकते हैं। अत: यहाँ 'या' अंतर्विष्ट है।

(iii) सभी पूर्णांक धन या ऋण होते हैं। कोई पूर्णांक एक साथ धन तथा ऋण दोनों कभी नहीं हो सकते। अत: यहाँ 'या' अपवर्जित है।

प्रश्नावली 14.4

प्रश्न 1. निम्नलिखित कथन को वाक्यांश ' यदि-तो' का प्रयोग करते हुए पाँच विभिन्न रूप में इस प्रकार लिखिए कि उनके अर्थ समान हों।

यदि एक प्राकृत संख्या विषम है, तो उसका वर्ग भी विषम है।

हल (i) एक प्राकृत संख्या विषम है, का तात्पर्य है कि उसका वर्ग भी विषम है।

(ii) कोई प्राकृत संख्या विषम है, केवल यदि उसका वर्ग विषम है।

(iii) किसी प्राकृत संख्या के विषम होने के लिए यह आवश्यक है कि उसका वर्ग विषम हो।

(iv) किसी प्राकृत संख्या के वर्ग के विषम होने के लिए यह पर्याप्त है कि संख्या विषम है।

(v) यदि किसी प्राकृत संख्या का वर्ग विषम नहीं है, तो वह प्राकृत संख्या विषम नहीं है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्मक और विलोम कथन लिखिए।

(i) यदि x एक अभाज्य संख्या है, तो x विषम है।

(ii) यदि दो रेखाएँ समांतर हैं, तो वे एक-दूसरे को एक समतल में नहीं काटती हैं।

(iii) किसी वस्तु के ठंडे होने का तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि उसका तापक्रम कम है।

(iv) आप ज्यामिति विषय को आत्मसात नहीं कर सकते, यदि आपको यह ज्ञान नहीं है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है?

(v) x एक सम संख्या है, से तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि x संख्या 4 से भाज्य है।

यदि दिया हुआ वाक्य ' यदि p, तो q' के रूप का हो, तब इसका प्रतिधनात्मक कथन 'यदि q नहीं, तो p नहीं है, तथा इसका विलोम कथन' ' यदि q तो p' है।

हल (i) **प्रतिधनात्मक कथन** यदि एक संख्या x विषम नहीं है, तब x एक अभाज्य संख्या नहीं है।

विलोम कथन यदि x एक विषम संख्या है, तब x एक अभाज्य संख्या है।

(ii) **प्रतिधनात्मक कथन** यदि दो रेखाएँ एक-दूसरे को एक समतल में काटती हैं, तब रेखाएँ समांतर नहीं होती हैं।

विलोम कथन यदि दो रेखाएँ एक-दूसरे को एक समतल में नहीं काटती हैं, तब दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।

(iii) **प्रतिधनात्मक कथन** यदि किसी वस्तु का तापक्रम कम नहीं है, तब वह वस्तु ठंडी नहीं है।

विलोम कथन यदि किसी वस्तु का तापक्रम कम है, तब वह ठंडी है।

(iv) **प्रतिधनात्मक कथन** यदि आपको यह ज्ञान है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है, तब आप ज्यामिति विषय को आत्मसात कर सकते हैं।

विलोम कथन यदि आपको यह ज्ञान नहीं है कि निगमनात्मक विवेचन किस प्रकार किया जाता है, तब आप ज्यामिति विषय को आत्मसात नहीं कर सकते हैं।

(v) **प्रतिधनात्मक कथन** यदि x संख्या 4 से भाज्य नहीं है, तब x एक सम संख्या नहीं है।

विलोम कथन यदि x संख्या 4 से भाज्य है, तब x एक सम संख्या है।

प्रश्न 3. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को 'यदि-तो' रूप में लिखिए।

(i) आपको नौकरी (काम) मिलने का तात्पर्य (अंतर्भाव) है कि, आपकी विश्वसनियता अच्छी है।

(ii) केले का पेड़ फूलेगा, यदि वह एक माह तक गरम बना रहे।

(iii) एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है, यदि उसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करें।

(iv) कक्षा में A^+ ग्रेड पाने के लिए यह अनिवार्य है कि, आप पुस्तक के सभी प्रश्नों को सरल कर लेते हैं।

'यदि-तो' संयोजक वाक्य बनाने के लिए वाक्य को शब्द 'यदि' से प्रारंभ करते हैं तथा मध्य में शब्द 'तो' का प्रयोग करते हैं।

हल (i) यदि आपको नौकरी मिल गई है, तब आपकी विश्वसनियता अच्छी है।

(ii) यदि केले का पेड़ एक माह तक गरम बना रहता है, तब, केले का पेड़ फूलेगा।

(iii) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, तब वह समांतर चतुर्भुज होता है।

(iv) यदि आप कक्षा में A^+ ग्रेड पाते हैं, तब आप पुस्तक के सभी प्रश्नों को सरल कर लेते हैं।

प्रश्न 4. नीचे (a) और (b) में प्रदत्त कथनों में से प्रत्येक के लिए में दिए गए कथन प्रतिघनात्मक हैं ना और विलोम कथन पहचानिए।

(a) यदि आप दिल्ली में रहते हैं, तो आपके पास जाड़े के कपड़े हैं।

(i) यदि आपके पास जाड़े के कपड़े नहीं हैं, तो आप दिल्ली में नहीं रहते हैं।

(ii) यदि आपके पास जाड़े के कपड़े हैं, तो आप दिल्ली में रहते हैं।

(b) यदि एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है, तो उसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(i) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित नहीं करते हैं, तो चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज नहीं है।

(ii) यदि चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, तो वह समांतर चतुर्भुज है।

हल (a) (i) प्रतिधनात्मक कथन

(ii) विलोम कथन

(b) (i) प्रतिधनात्मक कथन

(ii) विलोम कथन

प्रश्नावली 14.5

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि कथन P: यदि x एक ऐसी वास्तविक संख्या है कि $x^3 + 4x = 0$, तो $x = 0$ निम्न विधियों द्वारा सत्य है

(i) प्रत्यक्ष विधि द्वारा

(ii) विरोधोक्ति द्वारा

(iii) प्रतिघनात्मक विधि द्वारा।

हल (i) **प्रत्यक्ष विधि** $x^3 + 4x = 0$ या $x(x^2 + 4) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0,\ x^2 + 4 \neq 0,\ x \in R$

(ii) **विरोधोक्ति विधि द्वारा** माना $x \neq 0$ तथा $x = p$, जहाँ p एक वास्तविक संख्या है अर्थात् $p \in R$ और p समीकरण $x^3 + 4x = 0$ का एक मूल है।

$$p^3 + 4p = 0 \quad \Rightarrow \quad p(p^2 + 4) = 0$$

$$p \neq 0$$

तथा $\quad p^2 + 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0$

(iii) **प्रतिघनात्मक विधि द्वारा** माना $x = 0$ सत्य नहीं है तथा $x = p \neq 0$

$\therefore$ $p^3 + 4p = 0,$

$p\,x^2 + 4 < 0$ का मूल है।

या $p(p^2 + 4) = 0$

अब, $p = 0$ तथा $p^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow$ $p(p^2 + 4) \neq 0$ यदि p सत्य नहीं है।

$\therefore$ $x = 0,$ समीकरण $x^3 + 4x = 0$ का एक मूल है।

प्रश्न 2. प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि कथन 'किसी भी ऐसी वास्तविक संख्याओं a और b के लिए', जहाँ $a^2 = b^2$, का तात्पर्य है कि $a = b$' सत्य नहीं है।

हल माना $a = 1, b = -1$ तब $a^2 = b^2 = 1$ किंतु $a \neq b$ अतः, दिया हुआ कथन सत्य नहीं है।

प्रश्न 3. प्रतिधनात्मक विधि द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य है,

p: यदि x एक पूर्णांक है और x^2 सम है, तो x भी सम है।'

हल माना x एक सम संख्या नहीं है अर्थात् $x = 2n + 1$

$$x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$
$$= 4(n^2 + n) + 1$$
$$4(x^2 + x) + 1 \text{ विषम है}$$

अर्थात् 'यदि q सत्य नहीं हैं, तब p सत्य नहीं है'

अतः दिया हुआ कथन सत्य है।

प्रश्न 4. प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य नहीं हैं।

(i) p : यदि किसी त्रिभुज के कोण समान हैं, तो त्रिभुज एक अधिक कोण त्रिभुज है।

(ii) q : समीकरण $x^2 - 1 = 0$ के मूल 0 और 2 के बीच स्थित नहीं हैं।

हल (i) माना त्रिभुज का एक कोण $(90° + \alpha)$ है।

$\therefore$ कोणों का योग $= 3(90° + \alpha) = 270° + 3\alpha$

जो 180° से अधिक है।

$\therefore$ यदि किसी त्रिभुज के कोण समान हैं, तब त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज नहीं हो सकता।

(ii) समीकरण $x^2 - 1 = 0$ का एक मूल $x = 1$ है जो 0 तथा 2 के बीच स्थित है।

$\therefore$ दिया हुआ कथन सत्य नहीं है।

प्रश्न 5. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से सत्य हैं और कौन-से असत्य हैं? प्रत्येक दशा में अपने उत्तर के लिए वैध कारण बताइए

(i) p : किसी वृत्त की प्रत्येक त्रिज्या वृत्त की जीवा होती है।

(ii) q : किसी वृत्त का केंद्र वृत्त की प्रत्येक जीवा को समद्विभाजित करता है।

(iii) r : एक वृत्त, किसी दीर्घवृत्त की एक विशेष स्थिति है।
(iv) s : यदि x और y ऐसे पूर्णांक हैं कि $x > y$, तो $-x < -y$ है।
(v) t : $\sqrt{11}$ एक परिमेय संख्या है।

हल (i) असत्य, परिमाषा से जीवा वृत्त को दो भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर काटती हैं। त्रिज्या के दोनों सिरे वृत्त पर नहीं होते हैं अतः यह वृत्त की जीवा नहीं होती है।

(ii) असत्य, केवल व्यास केन्द्र पर समद्विभाजित होती है। अन्य जीवाएँ केंद्र से होकर नहीं जाती हैं। अतः केंद्र उन्हें समद्विभाजित नहीं कर जा सकता है।

(iii) सत्य, दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

जब $b = a$, तब $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$

जो एक वृत्त की समीकरण है।

(iv) सत्य, असमिका के नियम से, यदि x और y पूर्णांक हैं तथा $x > y$
तब $-x < -y$ उदाहरणार्थ, $3 > 2 \Rightarrow -3 < -2$

(v) असत्य, चूँकि 11 एक अमाज्य संख्या है इसलिए $\sqrt{11}$ अपरिमेय है। (चूँकि अमाज्य संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं होती हैं।)

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. निम्नलिखित कथनों के निषेधन लिखिए।

(i) प्रत्येक धन वास्तविक संख्या x के लिए, संख्या $x - 1$ भी धन संख्या है।
(ii) सभी बिल्लियाँ खरोंचती हैं।
(iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए या तो $x > 1$ या $x < 1$
(iv) एक ऐसी संख्या x का अस्तित्व है कि $0 < x < 1$

हल (i) $\sim p$: कम-से-कम एक धन वास्तविक संख्या x का अस्तिव है कि $(x - 1)$ धनात्मक नहीं है।

(ii) $\sim q$: सभी बिल्लियाँ खरोंचती नहीं हैं।

(iii) $\sim r$: कम-से-कम एक वास्तविक संख्या x का अस्तित्व है कि न तो $x > 1$ और न ही $x < 1$

(iv) $\sim s$: किसी ऐसी वास्तविक संख्या x का अस्तित्व नहीं है कि $0 < x < 1$

प्रश्न 2. निम्नलिखित सप्रतिबंध कथनों (अंतर्भाव) में से प्रत्येक का विलोम तथा प्रतिधनात्मक कथन लिखिए।

(i) एक धन पूर्णांक अभाज्य संख्या है केवल यदि 1 और स्वयं के अतिरिक्त उसका कोई अन्य भाजक नहीं है।
(ii) मैं समुद्र तट पर जाता हूँ जब कभी धूप वाला दिन होता है।
(iii) यदि बाहर गरमी है, तो आपको प्यास लगती है।

हल (i) **प्रतिधनात्मक** यदि एक धन पूर्णांक का स्वयं तथा 1 के अतिरिक्त कोई भाजक है, तब वह अभाज्य संख्या नहीं है।

विलोम यदि एक धन पूर्णांक जिसका स्वयं तथा 1 के अतिरिक्त दूसरा कोई भाजक नहीं है वह अभाज्य संख्या है।

(ii) **प्रतिधनात्मक** यदि जब कभी धूप वाला दिन नहीं होता है, तब मैं समुद्र तट पर नहीं जाता हूँ।

विलोम यदि धूप वाला दिन होता है, तब मैं समुद्र तट पर जाता हूँ।

(iii) **प्रतिधनात्मक** यदि आपको प्यास नहीं लगती है, तब बाहर गरमी नहीं है।

विलोम यदि आपको प्यास लगती है, तब बाहर गरमी है।

प्रश्न 3. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को 'यदि p, तो q' के रूप में लिखिए।

(i) सर्वर पर लॉग ऑन करने के लिए पासवर्ड का होना आवश्यक है।

(ii) जब कभी वर्षा होती है यातायात में अवरोध उत्पन्न होता है।

(iii) आप वेबसाइट में प्रवेश कर सकते हैं केवल यदि आपने निर्धारित शुल्क का भुगतान किया हो।

हल (i) यदि आप सर्वर पर लॉग ऑन करते हैं, तब आपके पास एक पासवर्ड होना आवश्यक है।

(ii) यदि जब कभी वर्षा होती है, तब यातायात में अवरोध उत्पन्न होता है।

(iii) यदि आपने निर्धारित शुल्क का भुगतान किया है, तब आप वेबसाइट में प्रवेश कर सकते हैं।

प्रश्न 4. निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक को 'p यदि और केवल यदि q' के रूप मे पुनः लिखिए।

(i) यदि आप दूरदर्शन (टेलीविजन) देखते हैं, तो आपका मन मुक्त होता है तथा यदि आपका मन मुक्त है, तो आप दूरदर्शन देखते हैं।

(ii) आपके द्वारा A – ग्रेड प्राप्त करने के लिए यह अनिवार्य और पर्याप्त है कि आप समस्त गृहकार्य नियमित रूप से करते हैं।

(iii) यदि एक चतुर्भुज समान कोणिक है, तो वह एक आयत होता है तथा यदि एक चतुर्भुज आयत है, तो वह समान कोणिक होता है।

हल (i) आप दूरदर्शन देखते हैं, यदि और केवल यदि आपका मन मुक्त है।

(ii) आप A– ग्रेड पाते हैं, यदि और केवल यदि आप समस्त गृहकार्य नियमित रूप से करते हैं।

(iii) एक चतुर्भुज समान कोणिक है यदि और केवल यदि वह एक आयत है।

प्रश्न 5. नीचे दो कथन दिए हैं,

p : 25 संख्या 5 का एक गुणज है।

q : 25 संख्या 8 का एक गुणज है।

उपरोक्त कथनों का संयोजक 'और' तथा 'या' द्वारा संयोजित करके मिश्र कथन लिखिए। दोनों दशाओं में प्राप्त मिश्र कथनों की वैधता जाँचिए।

हल (i) 'और' से संयोजित मिश्र कथन : 25 संख्या 5 और 8 का गुणज है। यह असत्य है, क्योंकि p तथा q दोनों सत्य नहीं हैं।

[∵ 25 संख्या 5 से विभाजित है किंतु संख्या 8 से विभाजित नहीं है।]

(ii) 'या' से संयोजित मिश्र कथन : 25 संख्या 5 या 8 का गुणज है। यह सत्य है।

प्रश्न 6. नीचे लिखे कथनों की वैधता की जाँच उनके सामने लिखित विधि द्वारा कीजिए।

(i) p : एक अपरिमेय संख्या और एक परिमेय संख्या का योगफल अपरिमेय होता है (विरोधोक्ति विधि)।

(ii) q : यदि n एक ऐसी वास्तविक संख्या है कि $n > 3$, तो $n^2 > 9$ (विरोधोक्ति विधि)।

हल (i) माना $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या तथा q एक परिमेय संख्या है।

इनका योग $= q + \sqrt{p}$

माना यह अपरिमेय संख्या नहीं है, तब यह परिमेय है।

अर्थात् $q + \sqrt{p} = \frac{a}{b}$, जहाँ a तथा b भाज्य संख्याएँ हैं।

$$\Rightarrow \quad \sqrt{p} = \frac{a}{b} - q$$

बायाँ पक्ष $= \sqrt{p} =$ एक अपरिमेय संख्या

दायाँ पक्ष $= \frac{a}{b} - q =$ एक परिमेय संख्या

यह एक विरोधोक्ति है। अतः एक अपरिमेय संख्या तथा एक परिमेय संख्या का योगफल अपरिमेय होता है।

(ii) माना $n > 3$ तथा $n^2 \le 9$

$n = 3 + p$ लेने पर, $p \in R^+$

$$\Rightarrow \quad n^2 = (3+p)^2$$

$$\Rightarrow \quad n^2 = 9 + 6p + p^2 = 9 + p(6+p)$$

$$\Rightarrow \quad n^2 > 9$$

जो विरोधोक्ति है।

∴ यदि $n > 3$, तब $n^2 > 9$

प्रश्न 7. निम्नलिखित कथन को पाँच भिन्न-भिन्न तरीकों से इस प्रकार व्यक्त कीजिए कि उनके अर्थ समान हों,

q: 'यदि एक त्रिभुज समान कोणिक है, तो वह एक अधिक कोण त्रिभुज है।'

हल (i) एक त्रिभुज समान कोणिक है का तात्पर्य है कि वह अधिक कोण त्रिभुज है।

(ii) किसी त्रिभुज के अधिक कोण होने के लिए यह पर्याप्त है कि वह त्रिभुज समान कोणिक हो।

(iii) किसी त्रिभुज के समकोणिक होने के लिए यह अनिवार्य है कि वह त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज हो।

(iv) कोई त्रिभुज समकोणिक है केवल यदि वह अधिक कोण त्रिभुज है।

(v) यदि कोई त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज नहीं है, तो वह त्रिभुज समकोणिक नहीं है।

Durga Tutorial

Online Classes

Thank You For Downloading Notes

ज्यादा जानकारी के लिए हमें Social Media पर Follow करें।

https://www.facebook.com/durgatutorial23/?modal=admin_todo_tour

https://twitter.com/DurgaTutorial

https://www.instagram.com/durgatutorial/

https://www.youtube.com/channel/UC5AJcz6Oizfohqj7eZvgeHQ

9973735511