गणित

पाठ–7 निर्देशांक ज्यामिति

प्रश्नावली 7.4

प्रश्न 1.

बिंदुओं A(2, – 2) और B(3, 7) को जोड़ने वाले रेखाखंड को रेखा $2x + y - 4 = 0$ जिस अनुपात में विभाजित करती है उसे ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1:

माना बिंदुओं A(2, – 2) और B(3, 7) को जोड़ने वाले रेखाखंड को रेखा $2x + y - 4 = 0$ अनुपात $k:1$ में विभाजित करती है।

इस बिंदु के निर्देशांक = $\left(\frac{3k+2}{k+1}, \frac{7k-2}{k+1}\right)$

क्योंकि यह बिंदु रेखा $2x + y - 4 = 0$ पर स्थित है, अतः

$$\therefore 2\left(\frac{3k+2}{k+1}\right)+\left(\frac{7k-2}{k+1}\right)-4=0$$

$$\Rightarrow \frac{6k+4+7k-2-4k-4}{k+1}=0$$

$$\Rightarrow 9k-2=0$$

$$\Rightarrow k=\frac{2}{9}$$

इसप्रकार, बिंदुओं A(2, – 2) और B(3, 7) को जोड़ने वाले रेखाखंड को रेखा $2x + y - 4 = 0$ अनुपात 2:9 में विभाजित करती है।

प्रश्न 2.

x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु (x, y), (1, 2) और (7, 0) संरेखी हैं।

DurgaTutorial.com

उत्तर 2:

यदि बिंदु (x, y), (1, 2) और (7, 0) संरेखी हैं तो इन तीनो बिंदुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 होगा।

त्रिभुज का क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$\Rightarrow \text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}[x(2-0) + 1(0-y) + 7(y-2)]$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}[2x - y + 7y - 14]$$

$$\Rightarrow 0 = [2x + 6y - 14]$$

$$\Rightarrow x + 3y - 7 = 0$$

प्रश्न 3.

बिंदुओं (6, – 6), (3, – 7) और (3, 3) से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

माना बिंदुओं A(6, – 6), B(3, – 7) और C(3, 3) से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र O(x, y) है।

OA = OB [वृत्त की त्रिज्याएँ]

$$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y+6)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+7)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 36 - 12x + y^2 + 36 + 12y} = \sqrt{x^2 + 9 - 6x + y^2 + 49 + 14y}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$x^2 + 36 - 12x + y^2 + 36 + 12y = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 49 + 14y$
$\Rightarrow 72 - 12x + 12y = 58 - 6x + 14y$
$\Rightarrow -6x - 2y = 58 - 72$
$\Rightarrow -6x - 2y = -14$
$\Rightarrow 3x + y = 7$
$\Rightarrow y = 7 - 3x$ … (i)

इसीप्रकार,
OA = OC [वृत्त की त्रिज्याएँ]
$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y+6)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 36 - 12x + y^2 + 36 + 12y} = \sqrt{x^2 + 9 - 6x + y^2 + 9 - 6y}$

दोनों ओर वर्ग करने पर
$x^2 + 36 - 12x + y^2 + 36 + 12y = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 9 - 6y$
$\Rightarrow 72 - 12x + 12y = 18 - 6x - 6y$
$\Rightarrow -6x + 18y = 18 - 72$
$\Rightarrow -6x + 18y = -54$
$\Rightarrow x - 3y = 9$
$\Rightarrow x - 3(7 - 3x) = 9$ [समीकरण (i) से y का मान रखने पर]
$\Rightarrow x - 21 + 9x = 9$
$\Rightarrow 10x = 30$
$\Rightarrow x = 3$

समीकरण (i) में x का मान रखने पर
$y = 7 - 3(3) = -2$
इसप्रकार, वृत्त का केंद्र O(3, –2) है।

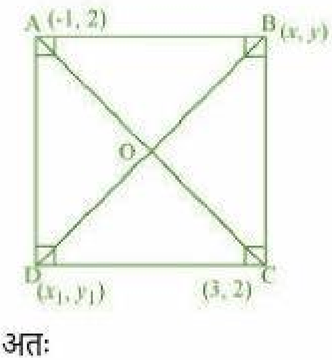
प्रश्न 4.

किसी वर्ग के दो सम्मुख शीर्ष (– 1, 2) और (3, 2) हैं। वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

DurgaTutorial.com

वर्ग के दो सम्मुख शीर्ष A(– 1, 2) और C(3, 2) हैं। माना वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष B(x, y) और D(x_1, y_1) हैं।



वर्ग की सभी भुजाएँ सामान होती हैं। अतः

$\therefore AB = BC$

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 - 4y$

$\Rightarrow 8x = 8$

$\Rightarrow x = 1$

वर्ग के सभी आंतरिक कोण 90° के होते हैं। अतः,

ΔABC में,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(1+1)^2+(y-2)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(1-3)^2+(y-2)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(3+1)^2+(2-2)^2}\right)^2$$

$\Rightarrow 4 + y^2 + 4 - 4y + 4 + y^2 - 4y + 4 = 16$

$\Rightarrow 2y^2 + 16 - 8\,y = 16$

$\Rightarrow 2y^2 - 8\,y = 0$

$\Rightarrow y\,(y-4) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ या $y = 4$

हम जानते हैं की वर्ग के विकर्ण समान होते हैं और एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।इसलिए,
AC के मध्य बिंदु के निर्देशांक = BD के मध्य बिंदु के निर्देशांक

$\Rightarrow\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{2+2}{2}\right) = \left(\frac{x+x_1}{2},\ \frac{y+y_1}{2}\right)$

$\Rightarrow(1,\ 2) = \left(\frac{1+x_1}{2},\ \frac{y+y_1}{2}\right)$

तुलना करने पर

$\frac{1+x_1}{2} = 1$

$\Rightarrow 1 + x_1 = 2$

$\Rightarrow x_1 = 1$

तथा $\frac{y+y_1}{2} = 2$

$\Rightarrow y + y_1 = 4$

यदि $y = 0,\ y_1 = 4$

यदि $y = 4,\ y_1 = 0$

इसप्रकार, वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष (1, 0) और (1, 4) हैं।

Durga Tutorial
Baniapur
DurgaTutorial.com

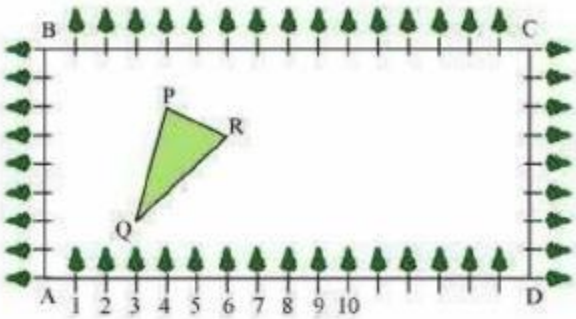
प्रश्न 5.

कृष्णानगर के एक सेकेंडरी स्कूल के कक्षा X के विद्यार्थियों के उनके बागवानी क्रियाकलाप के लिए, एक आयताकार भूखंड दिया गया है। गुलमोहर की पौध (sapling) को परस्पर 1 m की दूरी पर इस भूखंड की परिसीमा (boundary) पर लगाया जाता है। इस भूखंड के अंदर एक त्रिभुजाकार घास लगा हुआ लॉन (lawn) है, जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। विद्यार्थियों को भूखंड के शेष भाग में फूलों के पौधे के बीज बोने हैं।

(i) A को मूलबिंदु मानते हुए, त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि मूलबिंदु C हो, तो ΔPQR के शीर्षों के निर्देशांक क्या होंगे?

साथ ही, उपरोक्त दोनों स्थितिओं में, त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं।



उत्तर 5:

(i) A को मूलबिंदु लेने पर AD x – अक्ष होगा और AB y – अक्ष होगा। इसप्रकार बिंदुओं P, Q और R के निर्देशांक क्रमशः (4, 6), (3, 2) और (6, 5) होंगे।

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[4(2 - 5) + 3(5 - 6) + 6(6 - 2)]$

$= \frac{1}{2}[-12 - 3 + 24]$

$= \frac{1}{2}[9]$

$= \frac{9}{2}$ वर्ग इकाई

(ii) यदि मूलबिंदु C हो, तो AD x – अक्ष होगा और AB y – अक्ष होगा। इसप्रकार ΔPQR के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः P(12, 2), Q(13, 6) और R(10, 3) होंगे।

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[12(6 - 3) + 13(3 - 2) + 10(2 - 6)]$

$= \frac{1}{2}[36 + 13 + 40]$

$= \frac{1}{2}[9]$

$= \frac{9}{2}$ वर्ग इकाई

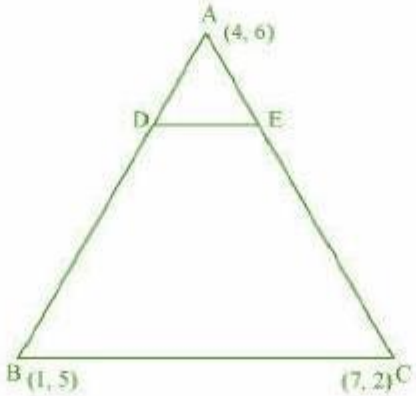
दोनों ही स्तिथिओं में त्रिभुज का क्षेत्रफल सामान है।

DurgaTutorial.com

प्रश्न 6.

एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A(4, 6), B(1, 5) और C(7, 2) हैं। भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और पर प्रतिच्छेद करते हुए एक रेखा इस प्रकार खींची गई है कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ है। ΔADE का क्षेत्रफल परिकलित कीजिए और इसकी तुलना ΔABC के क्षेत्रफल से कीजिए।

उत्तर 6:



दिया है $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$

माना $AD = x$ इसलिए $AB = 4x$ क्योंकि $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$

अतः $BD = AB - AD = 4x - x = 3x$

$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$

इसीप्रकार $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$

अतः, बिंदु D और E भुजाओं AB और AC को 1:3 के अनुपात में विभाजित करते हैं।

इसप्रकार,

बिंदु D के निर्देशांक $= \left(\frac{1\times1+3\times4}{1+3}, \frac{1\times5+3\times6}{1+3}\right)$

$= \left(\frac{13}{4}, \frac{23}{4}\right)$

बिंदु E के निर्देशांक $= \left(\frac{1\times7+3\times4}{1+3}, \frac{1\times2+3\times6}{1+3}\right)$

$= \left(\frac{19}{4}, \frac{20}{4}\right)$

त्रिभुज ΔADE का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}\left[4\left(\frac{23}{4} - \frac{20}{4}\right) + \frac{13}{4}\left(\frac{20}{4} - 6\right) + \frac{19}{4}\left(6 - \frac{23}{4}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3 - \frac{13}{4} + \frac{19}{16}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{48 - 52 + 19}{16}\right]$

$= \frac{15}{32}$ वर्ग इकाई

त्रिभुज ΔABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[4(5 - 2) + 1(2 - 6) + 7(6 - 5)]$

Durga Tutorial
Baniapur
DurgaTutorial.com

$= \frac{1}{2}[12 - 4 + 7]$

$= \frac{15}{2}$ वर्ग इकाई

अब,

$$\frac{\text{त्रिभुज } \Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज } \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{15}{32}}{\frac{15}{2}} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

प्रश्न 7.

मान लीजिए A(4, 2), B(6, 5) और C(1, 4) एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं।

(i) A से होकर जाने वाली मध्यिका BC से D पर मिलती है। बिंदु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) AD पर स्थित ऐसे बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि AP:PD = 2:1 हो।

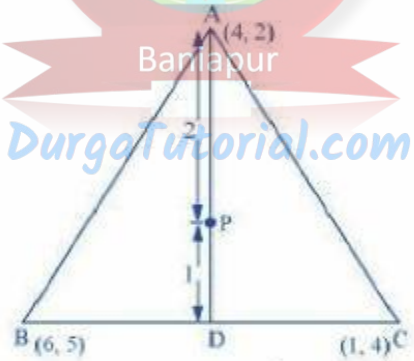
(iii) मध्यिकाओं BE और CF पर ऐसे बिंदुओं Q और R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि BQ:QE = 2:1 हो और CR:RF = 2:1 हो।

(iv) आप क्या देखते है?

(v) यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज के शीर्ष हैं, तो इस त्रिभुज के केंद्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 7:

Durga Tutorial
Baniapur
DurgaTutorial.com



(i) A से होकर जाने वाली मध्यिका BC से D पर मिलती है। इसलिए BC का मध्य बिंदु D है।

बिंदु D के निर्देशांक $= \left(\frac{6+1}{2}, \frac{5+4}{2}\right)$

$= \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$

(ii) AD पर स्थित बिंदु P इसप्रकार है कि AP:PD = 2:1 हो।

बिंदु P के निर्देशांक $= \left(\frac{2\times\frac{7}{2}+1\times4}{2+1}, \frac{2\times\frac{9}{2}+1\times2}{2+1}\right)$

$= \left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(iii) B से होकर जाने वाली मध्यिका AC से E पर मिलती है। इसलिए AC का मध्य बिंदु E है।

बिंदु E के निर्देशांक $= \left(\frac{4+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$

$= \left(\frac{5}{2}, 3\right)$

AE पर स्थित बिंदु Q इसप्रकार है कि AQ:QE = 2:1 हो।

बिंदु Q के निर्देशांक $= \left(\frac{2\times\frac{5}{2}+1\times6}{2+1}, \frac{2\times3+1\times5}{2+1}\right)$

$= \left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

C से होकर जाने वाली मध्यिका AB से F पर मिलती है। इसलिए AB का मध्य बिंदु F है।

बिंदु E के निर्देशांक $= \left(\frac{4+6}{2}, \frac{2+5}{2}\right)$

$= \left(5, \frac{7}{2}\right)$

CF पर स्थित बिंदु R इसप्रकार है कि CR:RF = 2:1 हो।

बिंदु R के निर्देशांक $= \left(\frac{2\times5+1\times1}{2+1}, \frac{2\times\frac{7}{2}+1\times4}{2+1}\right)$

$= \left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(iv) P, Q और R तीनों बिंदुओं के निर्देशांक समान हैं।

(v) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज के शीर्ष हैं, A से होकर जाने वाली मध्यिका BC से D पर मिलती है। इसलिए BC का मध्य बिंदु D है।

बिंदु D के निर्देशांक $= \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

माना O त्रिभुज का केंद्रक है। AD पर स्थित बिंदु O इसप्रकार है कि AO:OD = 2:1 हो।

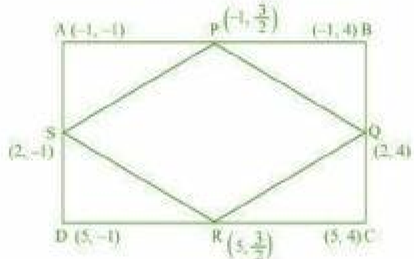
बिंदु O के निर्देशांक $= \left(\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+1\times x_1}{2+1}, \frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+1\times y_1}{2+1}\right)$

$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{2}, \frac{y_1+y_2+y_3}{2}\right)$

प्रश्न 8.

बिंदुओं A(–1, –1), B(–1, 4), C(5, 4) और D(5, –1) से एक आयत ABCD बनता है। P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिंदु हैं। क्या चतुर्भुज PQRS एक वर्ग है? क्या यह एक आयत है? क्या यह एक समचतुर्भुज है? सकारण उत्तर दीजिए।

उत्तर 8:



AB का मध्य बिंदु P है।

DurgaTutorial.com

बिंदु P के निर्देशांक $= \left(\frac{-1-1}{2}, \frac{-1+4}{2}\right)$

$= \left(-1, \frac{3}{2}\right)$

इसीप्रकार, बिंदुओं Q, R और S के निर्देशांक क्रमशः $(2, 4)$, $\left(5, \frac{3}{2}\right)$ और $(2, -1)$ होंगे।

PQ की लंबाई $= \sqrt{(-1-2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}}$

QR की लंबाई $= \sqrt{(2-5)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}}$

PS की लंबाई $= \sqrt{(5-2)^2 + \left(\frac{3}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}}$

SP की लंबाई $= \sqrt{(2+1)^2 + \left(-1 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}}$

PR की लंबाई $= \sqrt{(-1-5)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + 0} = 6$

SQ की लंबाई $= \sqrt{(2-2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{0 + 25} = 5$

चतुर्भुज PQRS की सभी भुजाएँ समान हैं परन्तु विकर्णों की लंबाई समान नहीं है। अतः यह एक समचतुर्भुज है।

Durga Tutorial
Baniapur
DurgaTutorial.com

Durga Tutorial
Baniapur
DurgaTutorial.com