

2. बहुपद

प्रश्नावली 2.1

Q1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन एक चर में बहुपद हैं और कौन-कौन नहीं हैं ? कारण के साथ उत्तर दीजिए :

(i) $4x^2 - 3x + 7$

(ii) $y^2 + \sqrt{2}$

(iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + 2/y$

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

हल:

(i) $4x^2 - 3x + 7$

यह एक चर में बहुपद है क्योंकि चर घात एक प्राकृत संख्या है।

(ii) $y^2 + \sqrt{2}$

यह एक चर में बहुपद है क्योंकि चर घात एक प्राकृत संख्या है।

(iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

यह एक चर में बहुपद नहीं है क्योंकि चर का घात एक भिन्नात्मक संख्या है कोई प्राकृत संख्या नहीं है।

(iv) $y + 2/y$

यह एक चर में बहुपद नहीं है।

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

यह एक चर में बहुपद नहीं है। बल्कि यह तीन चर में बहुपद है।

Q2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए।

(i) $2 + x^2 + x$

(ii) $2 - x^2 + x^3$

(iii) $\pi/2 x^2 + x$

(iv) $\sqrt{2x} - 1$

हल:

(i) $2 + x^2 + x$

x^2 का गुणांक = 1

(ii) $2 - x^2 + x^3$

x^2 का गुणांक = -1

(iii) $\pi/2 x^2 + x$

x^2 का गुणांक = $\pi/2$

(iv) $\sqrt{2x} - 1$

x^2 का गुणांक = 0 [क्योंकि यहाँ x^2 नहीं है इसलिए इसका गुणांक शून्य होगा]]

Q3. 35 घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए ।

हल:

35 घात का एक द्विपदी

$\Rightarrow 2x^{35} + 5y$

Note: द्विपदी का अर्थ दो पदों वाला व्यंजक जैसे - $x + 5$, $3a - 2b$, $3t + 7$ आदि.

100 घात का एक एकपदी

$\Rightarrow 3y^{100}$

Note: एकपदी का अर्थ एक पद वाला व्यंजक जैसे- $3x$, $5t$, y , $3xy$ आदि.

Q4. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक के घात लिखिए:

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$

(ii) $4 - y^2$

(iii) $5t - \sqrt{7}$

(iv) 3

हल:

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$

उत्तर: बहुपद का घात = 3

[नोट: बहुत का घात ज्ञात करने के लिए सभी घातों में से सबसे बड़ी घात को चुना जाता है]]

(ii) $4 - y^2$

उत्तर: बहुपद का घात = 2

(iii) $5t - \sqrt{7}$

उत्तर: बहुपद का घात = 1

(iv) 3

उत्तर: बहुपद का घात = 0

[नोट: चूँकि यहाँ कोई चर नहीं है इसलिए बहुपद का घात शून्य (0) है]]

Q5. निम्नलिखित को रैखिक, द्विघात और त्रिघात बहुपद में वर्गीकृत कीजिए:

(i) $x^2 + x$

(ii) $x - x^3$

(iii) $y + y^2 + 4$

(iv) $1 + x$

(v) $3t$

(vi) r^2

(vii) $7x^2$

हल:

(i) $x^2 + x$

उत्तर: द्विघात बहुपद

(ii) $x - x^3$

उत्तर: त्रिघात बहुपद

(iii) $y + y^2 + 4$

उत्तर: द्विघात बहुपद



(iv) $1 + x$

उत्तर: रैखिक बहुपद

(v) $3t$

उत्तर: रैखिक बहुपद

(vi) r^2

उत्तर: द्विघात बहुपद

(vii) $7x^2$

उत्तर: त्रिघात बहुपद

अभ्यास 2.2

प्र 1. निम्नलिखित पर बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x = 0$

(ii) $x = -1$

(iii) $x = 2$

हल:

(i) $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद $p(x)$ में $x = 0$ रखने पर

$$P(0) = 5(0) - 4(0)^2 + 3$$

$$= 0 - 0 + 3$$

$$= 3$$

अतः बहुपद का मान 3 है।

(ii) $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$$P(1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3$$

$$= -5 - 4 + 3$$

$$= -9 + 3$$

$$= -6$$



अतः बहुपद का मान - 6 है |

$$(iii) p(x) = 5x - 4x^2 + 3$$

बहुपद $p(x)$ में $x = 2$ रखने पर

$$P(2) = 5(2) - 4(2)^2 + 3$$

$$= 10 - 16 + 3$$

$$= -3$$

अतः बहुपद का मान - 3 है |

Q2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक के लिए $p(0)$, $p(1)$ और $p(2)$ ज्ञात कीजिए |

$$(i) p(y) = y^2 - y + 1$$

$$(ii) p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$$

$$(iii) p(x) = x^3$$

$$(iv) p(x) = (x - 1)(x + 1)$$

हल:

$$(i) p(y) = y^2 - y + 1$$

$P(0)$ के लिए

$$P(0) = (0)^2 - 0 + 1$$

$$= 1$$

$P(1)$ के लिए

$$P(1) = (1)^2 - 1 + 1$$

$$= 1 - 1 + 1$$

$$= 1$$

$P(2)$ के लिए

$$P(2) = (2)^2 - 2 + 1$$

$$= 4 - 2 + 1$$



$$= 3$$

$$(ii) p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$$

P(0) के लिए

$$P(0) = 2 + 0 + 2(0)^2 - (0)^3$$

$$= 2$$

P(1) के लिए

$$P(1) = 2 + 1 + 2(1)^2 - (1)^3$$

$$= 4$$

P(2) के लिए

$$P(2) = 2 + 2 + 2(2)^2 - (2)^3$$

$$= 4 + 8 - 8$$

$$= 4$$

$$(iii) p(x) = x^3$$

P(0) के लिए

$$P(0) = (0)^3 = 0$$

P(1) के लिए

$$P(1) = (1)^3 = 1$$

P(2) के लिए

$$P(2) = (2)^3 = 8$$

$$(iv) P(x) = (x - 1)(x + 1)$$

P(0) के लिए

$$P(0) = (0-1)(0+1) = (-1)(1) = -1$$

P(1) के लिए

$$P(1) = (1-1)(1+1) = 0(1) = 0$$

P(2) के लिए



$$P(2) = (2-1)(2+1) = 1(3) = 3$$

Q3. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शून्यक हैं :

$$(i) p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$$

$$(ii) p(x) = 5x - \pi, x = \frac{4}{5}$$

$$(iii) p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$$

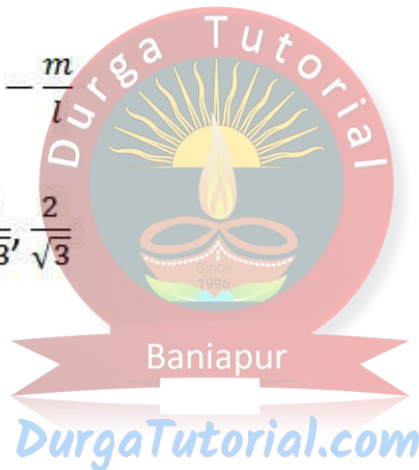
$$(iv) p(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$$

$$(v) P(x) = x^2, x = 0$$

$$(vi) p(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$$

$$(vii) P(x) = 3x^2 - 1, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(viii) p(x) = 2x + 1, x = -\frac{1}{2}$$



हल:

$$(i) P(x) = 3x + 1$$

$$\text{Given } x = -\frac{1}{3}$$

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1$$

$$= -1 + 1$$

$$= 0$$

$p(x) = 0$, अतः दिया गया x का मान बहुपद का शून्यक है।

$$(ii) P(x) = 5x - \pi$$

$$P\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi$$

$$= 5 - \pi$$

$$\therefore P(x) \neq 0$$

$\therefore x$ के लिए दिया गया मान $P(x)$ का शून्यक नहीं है।

$$(iii) P(x) = x^2 - 1$$

$$(iv) P(x) = (x+1)(x-2)$$

$$\text{For } x = -1,$$

$$P(-1) = (-1+1)(-1-2)$$

$$= 0(3) = 0,$$

$$\text{For } x = 2$$

$$P(2) = (2+1)(2-2)$$

$$= (3)(0) = 0,$$

In both the cases $P(x) = 0$,

Therefore $x = -1, 2$ are zeroes of polynomial.

$$(v) p(x) = x^2$$

$$P(0) = (0)^2 = 0,$$

$P(x) = 0$, Therefore $x = 0$ is zero of polynomial.



(vi) $P(x) = lx + m$

$$P\left(-\frac{m}{l}\right) = \left(l \times -\frac{m}{l}\right) + m$$

$$= -m + m = 0,$$

$P(x) = 0$, Therefore $x = -\frac{m}{l}$ is zero of polynomial.

(vii) $P(x) = 3x^2 - 1$

For $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1$$

$$= 1 - 1 = 0,$$

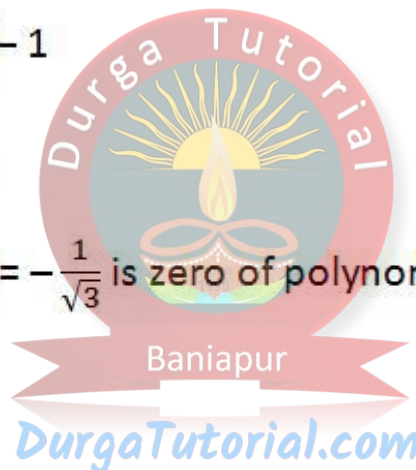
$P(x) = 0$, Therefore $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ is zero of polynomial.

For $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1$$

$$= 4 - 1 = 3$$

$P(x) \neq 0$, Therefore $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ is not zero of polynomial.



$$(viii) P(x) = 2x + 1$$

$$\text{For } x = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$= 1 + 1 = 2,$$

$P(x) \neq 0$, Therefore $x = \frac{1}{2}$ is not zero of polynomial.

Q4. निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में बहुपद का शून्यक ज्ञात कीजिए : (ii) $P(x) = x - 5$

$$(iii) P(x) = 2x + 5$$

$$(iv) P(x) = 3x - 2$$

$$(v) P(x) = 3x$$

$$(vi) P(x) = ax, a \neq 0$$

हल (i) :

$$(i) P(x) = x + 5$$

$$\Rightarrow x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = -5$$

बहुपद का शून्यक - 5 है।

हल (ii) :

$$(ii) P(x) = x - 5$$

$$\Rightarrow x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = 5$$

बहुपद का शून्यक 5 है।



$$(iii) P(x) = 2x + 5$$

$$P(x) = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

$$2x = -5$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

बहुपद का शून्यक $-5/2$ है।

$$(iv) P(x) = 3x - 2$$

$$3x - 2 = 0 \neq$$

$$x = \frac{2}{3}$$

बहुपद का शून्यक $2/3$ है।

$$(v) P(x) = 3x$$

$$3x = 0$$

$$3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} \Rightarrow x = 0.$$

$$(vi) P(x) = ax, a \neq 0$$

$$ax = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{a} \Rightarrow x = 0.$$

The zero of $P(x)$ is 0.

प्रश्नावली 2.3

Q1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए :



(i) $x + 1$

(ii) $x - \frac{1}{2}$

(iii) x

(iv) $x + 0$

(v) $5 + 2x$

हल : (i) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ x + 1 \overline{) x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\ \underline{(-) x^3 + x^2} \\ 2x^2 + 3x + 1 \\ \underline{(-) 2x^2 + 2x} \\ x + 1 \\ \underline{(-) x + 1} \\ 0 \end{array}$$

अतः भाग देने पर शेषफल 0 है | **Ans.**

हल : (ii) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $x - \frac{1}{2}$ से भाग देने पर

$$\begin{array}{r}
 x^2 + \frac{5x}{2} + \frac{7}{4} \\
 \hline
 x + \frac{1}{2} \overline{) x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{(-) x^3 + \frac{x^2}{2}} \\
 \frac{5x^2}{2} + 3x + 1 \\
 \underline{(-) \frac{5x^2}{2} + \frac{5x}{4}} \\
 \frac{7x}{4} + 1 \\
 \underline{(-) \frac{7x}{4} + \frac{7}{8}} \\
 \frac{1}{8}
 \end{array}$$

अतः भाग देने पर शेषफल $\frac{1}{8}$ है | Baniapur Ansh.

DurgaTutorial.com

हल : (iii) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को x से भाग देने पर

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 3x + 3 \\
 x \overline{) x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{x^3} \\
 (-) \\
 3x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{3x^2} \\
 (-) \\
 3x + 1 \\
 \underline{3x} \\
 (-) \\
 1
 \end{array}$$

अतः भाग देने पर शेषफल 1 है | Ans.

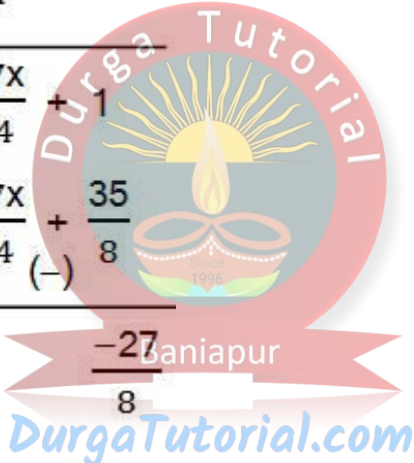
हल : (iv) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $x + \pi$ से भाग देने पर

$$\begin{array}{r}
 x^2 + (-\pi + 3)x + (\pi^2 - 3\pi + 3) \\
 x + \pi \overline{) x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{x^3 + \pi x^2} \\
 (-) \quad (-) \\
 (-\pi + 3)x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{(-\pi + 3)x^2 + (-\pi^2 + 3\pi)x} \\
 (-) \quad (-) \\
 (\pi^2 - 3\pi + 3)x + 1 \\
 \underline{(\pi^2 - 3\pi + 3)x + (\pi^3 - 3\pi^2 + 3\pi)} \\
 (-) \quad (-) \\
 -\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1
 \end{array}$$

अतः भाग देने पर शेषफल $-\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$ है | Ans.

हल : (v) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ को $5 + 2x$ से भाग देने पर

$$\text{यहाँ } 5 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \Rightarrow x + \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \\
 \hline
 x + \frac{5}{2} \overline{) x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{(-) x^3 + \frac{5x^2}{2}} \\
 \frac{x^2}{2} + 3x + 1 \\
 \underline{(-) \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{4}} \\
 \frac{7x}{4} + 1 \\
 \underline{(-) \frac{7x}{4} + \frac{35}{8}} \\
 -\frac{27}{8}
 \end{array}$$


अतः भाग देने पर शेषफल $-\frac{27}{8}$ है | Ans.

Q2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ को $x - a$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए |

हल : $p(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ और $g(x) = x - a$ है |

$g(x) = x - a$ का शून्यक

अतः $x - a = 0$

$$x = a$$

अतः शेषफल प्रमेय से

$p(x)$ को $x - a$ से भाग देने पर शेषफल प्रमेय द्वारा शेषफल $p(a)$ प्राप्त होगा |

इसलिए, $p(a) = (a)^3 - a(a)^2 + 6(a) - a$

$$= a^3 - a^3 + 6a - a$$

$$= 5a$$

अतः शेषफल $5a$ है।

Q3. जाँच कीजिए कि $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ का एक गुणनखंड है या नहीं।

हल : $7 + 3x = 0$

$$\Rightarrow 3x = -7$$

$$\Rightarrow x = \frac{-7}{3}$$

अतः $7 + 3x$ का शून्यक $\frac{-7}{3}$ है।

अब गुणनखंड प्रमेय से

यदि $p(\frac{-7}{3}) = 0$ तो $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ का एक गुणनखंड है अथवा नहीं है।

अतः $p(x) = 3x^3 + 7x$

तो $p(\frac{-7}{3}) = 3(\frac{-7}{3})^3 + 7(\frac{-7}{3})$

$$= \frac{-343}{3} - \frac{49}{3}$$

$$= \frac{-343 - 147}{9}$$

$$= \frac{-490}{9}$$

चूँकि शेषफल $= \frac{-490}{9}$ है।

अतः $p(x) \neq 0$ है।

इसलिए $7 + 3x$, $3x^3 + 7x$ का एक गुणनखंड नहीं है।

Q1. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में से किस बहुपद का एक गुणनखंड $x + 1$ है |

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

(iv) $x^3 - x^3 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

हल : (i) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

माना $g(x) = x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से

$p(x) = 0$ यदि $x = -1$ $p(x)$ का शून्यक है |

अतः $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= -1 + 1 - 1 + 1$

$= 0$

चूँकि $p(-1) = 0$ इसलिए -1 $p(x)$ का शून्यक है और $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है |

हल : (ii) $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

माना $g(x) = x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से

$p(x) = 0$ यदि $x = -1$ $p(x)$ का शून्यक है |

अतः $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$



$$p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1$$

$$= 1$$

चूँकि $p(-1) = 1$ इसलिए -1 $p(x)$ का शून्यक नहीं है इसलिए गुणनखंड प्रमेय से $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड नहीं है।

हल : (iii) $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

माना $g(x) = x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x = -1$$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से

$p(x) = 0$ यदि $x = -1$ $p(x)$ का शून्यक है।

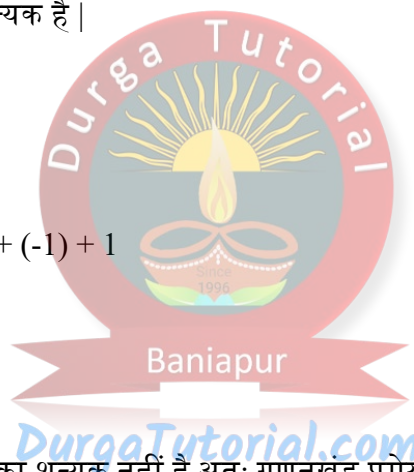
अतः $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$$

$$= 1 - 3 + 3 - 1 + 1$$

$$= 1$$



चूँकि $p(-1) = 1$ इसलिए -1 $p(x)$ का शून्यक नहीं है अतः गुणनखंड प्रमेय से $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड नहीं है।

हल : (iv) $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

माना $g(x) = x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x = -1$$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से

$p(x) = 0$ यदि $x = -1$ $p(x)$ का शून्यक है।

अतः $p(x)$ में $x = -1$ रखने पर

$$p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$$

$$p(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$$

$$= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= -2 + 2 + 2\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

चूँकि $p(-1) = 2\sqrt{2}$ है

इसलिए -1 $p(x)$ का शून्यक नहीं है अतः गुणनखंड प्रमेय से $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड नहीं है।

Q2. गुणनखंड प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है या नहीं :

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

हल : (i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x + 1$

$g(x)$ का शून्यक $\Rightarrow x + 1 = 0$

अतः $x = -1$

गुणनखंड प्रमेय लागू करने पर यदि $p(-1) = 0$, तो गुणनखंड है अथवा नहीं।

अतः $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ दिया है।

अब, $p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$

$$= 2(-1) + 1 + 2 - 1$$

$$= -2 + 1 + 2 - 1$$

$$= 0$$

चूँकि $p(-1) = 0$ है इसलिए -1 $p(x)$ का एक शून्यक है अतः गुणनखंड प्रमेय से $x + 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

हल : (ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 2$

$g(x)$ का शून्यक $\Rightarrow x + 2 = 0$

अतः $x = -2$

गुणनखंड प्रमेय लागू करने पर यदि $p(-2) = 0$, तो गुणनखंड है अथवा नहीं।

अतः $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ दिया है।

अब, $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$

$$= -8 + 12 - 6 + 1$$

$$= 13 - 14$$

$$= -1$$

चूँकि $p(-2) = -1$ है इसलिए -2 $p(x)$ का एक शून्यक नहीं है अतः गुणनखंड प्रमेय से $x + 2$ $p(x)$ का एक गुणनखंड भी नहीं है।

हल : (iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x - 3$

$g(x)$ का शून्यक $\Rightarrow x - 3 = 0$

अतः $x = 3$

गुणनखंड प्रमेय लागू करने पर यदि $p(3) = 0$, तो गुणनखंड है अथवा नहीं।

अतः $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ दिया है।

अब, $p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$

$$= 27 - 36 + 3 + 6$$

$$= 36 - 36$$

$$= 0$$

चूँकि $p(3) = 0$ है इसलिए 3 $p(x)$ का एक शून्यक है अतः गुणनखंड प्रमेय से $x - 3$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

Q3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $(x - 1)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड हो :

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

$$(ii) p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$$

$$(iii) p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$$

$$(iv) p(x) = kx^2 - 3x + k$$

हल : (i) $p(x) = x^2 + x + k$

$x - 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है |

इसलिए $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

अतः 1 $p(x)$ का शून्यक है |

इसलिए $p(1) = 0$

अब $p(x) = x^2 + x + k = 0$

$$p(1) = (1)^2 + (1) + k = 0$$

$$1 + 1 + k = 0$$

$$2 + k = 0$$

$$k = -2$$

हल : (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

चूँकि $x - 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है |

इसलिए $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

अतः 1 $p(x)$ का शून्यक है |

इसलिए $p(1) = 0$

अब $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2} = 0$

$$p(1) = 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$$

$$2 + k + \sqrt{2} = 0$$

$$k = -2 - \sqrt{2}$$

$$k = -(2 + \sqrt{2})$$

हल : (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$



चूँकि $x - 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है |

इसलिए $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

अतः 1 $p(x)$ का शून्यक है |

इसलिए $p(1) = 0$

अब $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$

$$p(1) = k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$$

$$k - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$$k = \sqrt{2} - 1$$

हल : (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

चूँकि $x - 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है |

इसलिए $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

अतः 1 $p(x)$ का शून्यक है |

इसलिए $p(1) = 0$

अब $p(x) = kx^2 - 3x + k = 0$

$$p(1) = k(1)^2 - 3(1) + k = 0$$

$$k - 3 + k = 0$$

$$2k - 3 = 0$$

$$2k = 3$$

$$k = 3/2$$

Q4. गुणनखंड ज्ञात कीजिए :

(i) $12x^2 - 7x + 1$

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$

(iv) $3x^2 - x - 4$



हल : (i) $12x^2 - 7x + 1$

$$\Rightarrow 12x^2 - 3x - 4x + 1$$

$$\Rightarrow 3x(4x - 1) - 1(4x - 1)$$

$$\Rightarrow (4x - 1)(3x - 1)$$

हल : (ii) $2x^2 + 7x + 3$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x + x + 3$$

$$\Rightarrow 2x(x + 3) + 1(x + 3)$$

$$\Rightarrow (x + 3)(2x + 1)$$

हल : (iii) $6x^2 + 5x - 6$

$$\Rightarrow 6x^2 + 9x - 4x - 6$$

$$\Rightarrow 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$$

$$\Rightarrow (2x + 3)(3x - 2)$$

हल : (iv) $3x^2 - x - 4$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 3x - 4$$

$$\Rightarrow x(3x - 4) + 1(3x - 4)$$

$$\Rightarrow (3x - 4)(x + 1)$$



Q5. गुणनखंड ज्ञात कीजिए :

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

हल : (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

बहुपद का संभावित शून्यक हैं - ± 1 और ± 2

अतः बहुपद $x^3 - 2x^2 - x + 2$ में $x = 1$ रखने पर

$$p(x) = (1)^3 - 2(1)^2 - (1) + 2$$

$$= 1 - 2 - 1 + 2$$

$$= 0$$

चूँकि $p(x) = 0$ है, अतः $x - 1$ $p(x)$ का शून्यक है इसलिए $x - 1$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

पहली विधि : $x - 1$ से $x^3 - 2x^2 - x + 2$ में भाग देने पर

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x - 2 \\
 x - 1 \overline{) x^3 - 2x^2 - x + 2} \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 (-) (+) \\
 -x^2 - x + 2 \\
 \underline{-x^2 + x} \\
 (+) (-) \\
 -2x + 2 \\
 \underline{-2x + 2} \\
 (+) (-) \\
 0
 \end{array}$$

$$\text{अतः } x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2) \quad [\text{चूँकि } p(x) = g(x) \times q(x)]$$

$$= (x - 1)(x^2 - 2x + x - 2)$$

$$= (x - 1)[x(x - 2) + 1(x - 2)]$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x + 1)$$

नोट: चूँकि यह त्रिघात बहुपद है इसलिए इसके तीन शून्यक होंगे और तीन गुणनखंड होंगे।

दूसरी विधि : हम यहाँ पर $x - 1$ से भाग की लंबी प्रक्रिया न अपनाकर गुणनखंड विधि से अन्य गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं। चूँकि एक गुणनखंड $x - 1$ प्राप्त है।

$$\begin{aligned}
x^3 - 2x^2 - x + 2 &= x^2(x-1) - x^2 - x + 2 \\
&= x^2(x-1) - x(x-1) - 2x + 2 \\
&= x^2(x-1) - x(x-1) - 2(x-1) \\
&= (x-1)(x^2 - x - 2) \\
&= (x-1)(x^2 - 2x + x - 2) \\
&= (x-1)[x(x-2) + 1(x-2)] \\
&= (x-1)(x-2)(x+1)
\end{aligned}$$

तीसरी विधि : हमें बहुपद का संभावित शून्यक ± 1 और ± 2 ज्ञात है :

$p(x)$ में $x = 1, -1, 2$ और -2 रखने पर

$p(1) = 0$ है | अतः $x - 1$ एक गुणनखंड है |

$$\begin{aligned}
\text{अब } p(-1) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
&= (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 \\
&= -1 - 2 + 1 + 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

अतः $p(-1) = 0$ है अतः $x + 1$ एक गुणनखंड है |

$$\begin{aligned}
\text{अब } p(2) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
&= (2)^3 - 2(2)^2 - (2) + 2 \\
&= 8 - 8 - 2 + 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$p(2) = 0$ है अतः $x - 2$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है |

$$\begin{aligned}
\text{अब } p(-2) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
&= (-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2) + 2 \\
&= -8 - 8 + 2 + 2 \\
&= -16 + 4 = -12
\end{aligned}$$



$p(-2) \neq 0$ अतः -2 $p(x)$ का शून्यक नहीं है |

अतः $x^3 - 2x^2 - x + 2$ के गुणनखंड हैं $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$ उत्तर

हल : (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

बहुपद का संभावित शून्यक ± 1 और ± 5 है |

बहुपद में $x = -1$ रखने पर

$$p(-1) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

$$= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$$

$$= -1 - 3 + 9 - 5$$

$$= 9 - 9$$

$$= 0$$

अतः $x = -1$ $p(x)$ का शून्यक है इसलिए $x + 1$ एक गुणनखंड है |

$$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = x^2(x + 1) - 4x^2 - 9x - 5$$

$$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5x - 5$$

$$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 4x - 5)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 5x + x - 5)$$

$$= (x + 1)[x(x - 5) + 1(x - 5)]$$

$$= (x + 1)(x - 5)(x + 1)$$

अतः त्रिघात बहुपद के गुणनखंड $(x + 1)$, $(x - 5)$ और $(x + 1)$ हैं |

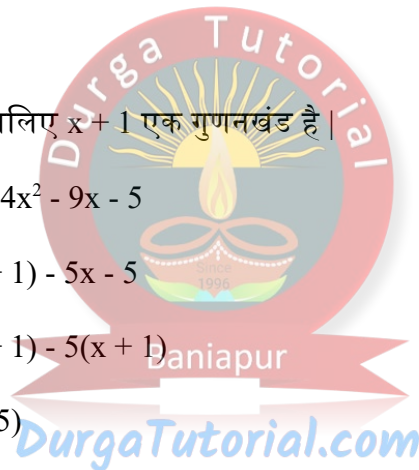
हल : (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

बहुपद का संभावित शून्यक $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10$ और ± 20 हैं |

बहुपद में $x = -1$ रखने पर

$$p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$$

$$= (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$$



$$= -1 + 13 + - 32 + 20$$

$$= 33 - 33$$

$$= 0$$

चूँकि $p(-1) = 0$ है अतः $x + 1$ बहुपद का एक गुणनखंड है।

$$x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = x^2(x + 1) + 12x^2 + 32x + 20$$

$$= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20x + 20$$

$$= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 + 12x + 20)$$

$$= (x + 1)(x^2 + 10x + 2x + 20)$$

$$= (x + 1)[(x(x + 10) + 2(x + 10))]$$

$$= (x + 1)(x + 10)(x + 2)$$

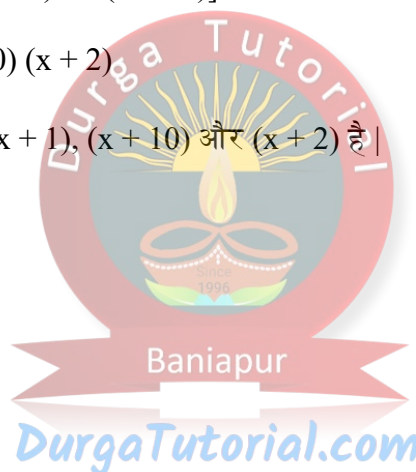
अतः त्रिघात बहुपद के गुणनखंड $(x + 1)$, $(x + 10)$ और $(x + 2)$ हैं।

हल : (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

$$= y^2(2y + 1) - 1(2y + 1)$$

$$= (y^2 - 1)(2y + 1)$$

$$= (y + 1)(y - 1)(2y + 1)$$



बहुपद के गुणनखंड $(y + 1)$, $(y - 1)$ और $(2y + 1)$ हैं।

उपयोगी बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ:

$$(1) (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(2) (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(3) x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$(4) (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(5) (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(6) (x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(7) \ x^3 + y^3 = (x + y) (x^2 - xy + y^2)$$

$$(8) \ x^3 - y^3 = (x - y) (x^2 + xy + y^2)$$

$$(9) \ (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$(10) \ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

अभ्यास 2.5

Q1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i) $(x + 4) (x + 10)$

(ii) $(x + 8) (x - 10)$

(iii) $(3x + 4) (3x - 5)$

(iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right) \left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

(v) $(3 - 2x) (3 + 2x)$

हल:

(i) $(x + 4) (x + 10)$

सर्वसमिका $(x + a) (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$$(x + 4) (x + 10) = x^2 + (4 + 10)x + (4)(10)$$

$$= x^2 + 14x + 40$$

(ii) $(x + 8) (x - 10)$

सर्वसमिका $(x + a) (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$$(x + 8) (x - 10) = x^2 + [8 + (-10)]x + (8)(-10)$$

$$= x^2 - 2x - 80$$

(iii) $(3x + 4) (3x - 5)$

सर्वसमिका $(x + a) (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$$(3x + 4) (3x - 5) = (3x)^2 + [4 + (-5)]3x + (4)(-5)$$



$$= 9x^2 - 3x - 20$$

$$(iv) \left(y^2 + \frac{3}{2}\right) \left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$$

सर्वसमिका $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ का प्रयोग करने पर

$$= (y^2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= y^4 - \frac{9}{4}$$

$$(v) (3 - 2x)(3 + 2x)$$

सर्वसमिका $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ का प्रयोग करने पर

$$(3 - 2x)(3 + 2x) = (3)^2 - (2x)^2$$

$$= 9 - 4x^2$$

Q2. सीधे गुना किये बिना निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए :

$$(i) 103 \times 107$$

$$(ii) 95 \times 96$$

$$(iii) 104 \times 96$$



हल:

$$(i) 103 \times 107 = (100 + 3)(100 + 7)$$

सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$$(100 + 3)(100 + 7) = (100)^2 + (3 + 7)100 + 3 \times 7$$

$$= 10000 + 1000 + 21$$

$$= 11021$$

$$(ii) 95 \times 96 = (90 + 5)(90 + 6)$$

सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ का प्रयोग करने पर

$$(90 + 5)(90 + 6) = (90)^2 + (5 + 6)90 + 5 \times 6$$

$$= 8100 + 990 + 30$$

$$= 9120$$

$$(iii) 104 \times 96 = (100 + 4)(100 - 4)$$

सर्वसमिका $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ का प्रयोग करने पर

$$(100)^2 - (4)^2$$

$$= 10000 - 16$$

$$= 9984$$

3. उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनखंड कीजिए:

$$(i) 9x^2 + 6xy + y^2$$

$$(ii) 4y^2 - 4y + 1$$

$$(iii) x^2 - \frac{y^2}{100}$$

हल:

$$(i) 9x^2 + 6xy + y^2$$

$$= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot y + (y)^2 \quad [\because x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2]$$

$$\therefore = (3x + y)^2$$

$$= (3x + y)(3x + y)$$

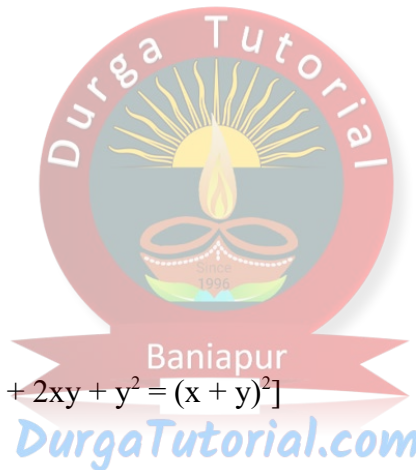
$$(ii) 4y^2 - 4y + 1$$

$$= (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 1 + (1)^2 \quad [\because x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2]$$

$$\therefore = (2y - 1)^2$$

$$= (2y - 1)(2y - 1)$$

$$(iii) x^2 - \frac{y^2}{100}$$



$$= (x)^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{10}\right) \left(x - \frac{y}{10}\right)$$

$$[\because x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)]$$

Q4. उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए:

(i) $(x + 2y + 4z)^2$

(ii) $(2x - y + z)^2$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$

हल:

(i) $(x + 2y + 4z)^2$

यहाँ माना कि $a = x$, $b = 2y$, $c = 4z$ और a , b तथा c का मान सर्वसमिका

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$$\therefore (x + 2y + 4z)^2 = (x)^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2(x)(2y) + 2(2y)(4z) + 2(4z)(x)$$

$$= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx$$

(ii) $(2x - y + z)^2$

यहाँ माना कि $a = 2x$, $b = -y$, $c = z$ और a , b तथा c का मान सर्वसमिका

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$$\therefore (2x - y + z)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x)$$

$$= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx$$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

यहाँ माना कि $a = -2x$, $b = 3y$, $c = 2z$ और a , b तथा c का मान सर्वसमिका

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर



$$\begin{aligned}
 &\therefore (-2x + 3y + 2z)^2 \\
 &= (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2(-2x)(3y) + 2(3y)(2z) + 2(2z)(-2x) \\
 &= 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx
 \end{aligned}$$

$$(iv) (3a - 7b - c)^2$$

यहाँ माना कि $x = 3a$, $y = -7b$, $z = -c$ और x , y तथा z का मान सर्वसमिका

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ में रखने पर

$$\begin{aligned}
 &\therefore (3a - 7b - c)^2 \\
 &= (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2(3a)(-7b) + 2(-7b)(-c) + 2(-c)(3a) \\
 &= 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac
 \end{aligned}$$

$$(v) (-2x + 5y - 3z)^2$$

यहाँ माना कि $a = -2x$, $b = 5y$, $c = -3z$ और a , b तथा c का मान सर्वसमिका

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ में रखने पर

$$\begin{aligned}
 &\therefore (-2x + 5y - 3z)^2 \\
 &= (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2(-2x)(5y) + 2(5y)(-3z) + 2(-3z)(-2x) \\
 &= 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx
 \end{aligned}$$

Q5. गुणनखंड कीजिए:

$$(i) 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$$

$$(ii) 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$$

हल:

$$\begin{aligned}
 (i) &4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz \\
 &= (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(4z) + 2(4z)(2x)
 \end{aligned}$$

$$[\because a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2]$$

$$= (2x + 3y + 4z)^2$$

$$= (2x + 3y + 4z)(2x + 3y + 4z)$$

$$(ii) 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$$

$$= (\sqrt{2}x)^2 + y^2 + (2\sqrt{2}z)^2 - 2(\sqrt{2}x)(y) + 2(y)(2\sqrt{2}z) - 2(\sqrt{2}x)(2\sqrt{2}z)$$

$$= (-\sqrt{2}x)^2 + y^2 + (2\sqrt{2}z)^2 + 2(-\sqrt{2}x)(y) + 2(y)(2\sqrt{2}z) + 2(-\sqrt{2}x)(2\sqrt{2}z)$$

$$[\because a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2]$$

$$\therefore (-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)^2$$

$$= (-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)$$

Q6. निम्नलिखित घनों को विस्तारित रूप में लिखिए :

(i) $(2x + 1)^3$

(ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$

(iv) $\left[x - \frac{3}{2}y\right]^3$



हल:

(i) $(2x + 1)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$]

$$(2x + 1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3$$

$$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

(ii) $(2a - 3b)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$]

$$(2a - 3b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 - (3b)^3$$

$$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$$

$$(iii) \left[\frac{3}{2}x + 1 \right]^3$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$]

$$\begin{aligned} \left[\frac{3}{2}x + 1 \right]^3 &= \left(\frac{3}{2}x \right)^3 + 3 \left(\frac{3}{2}x \right)^2 (1) + 3 \left(\frac{3}{2}x \right) (1)^2 + (1)^3 \\ &= \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1 \end{aligned}$$

$$(iv) \left[x - \frac{3}{2}y \right]^3$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$]

$$\begin{aligned} \left[x - \frac{3}{2}y \right]^3 &= (x)^3 - 3(x)^2 \left(\frac{3}{2}y \right) + 3(x) \left(\frac{3}{2}y \right)^2 - \left(\frac{3}{2}y \right)^3 \\ &= x^3 - \frac{9}{2}x^2y + \frac{27}{4}xy^2 - \frac{27}{8}y^3 \end{aligned}$$

Q7. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(99)^3$

(ii) $(102)^3$

(iii) $(998)^3$

हल :

(i) $(99)^3$

$$= (100 - 1)^3$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$]

$$(100 - 1)^3 = (100)^3 - 3(100)^2(1) + 3(100)(1)^2 - (1)^3$$

$$= 1000000 - 30000 + 300 - 1$$

$$= 1000300 - 30001$$

$$= 970299$$

(ii) $(102)^3$

$$= (100 + 2)^3$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$]

$$(100 + 2)^3 = (100)^3 + 3(100)^2(2) + 3(100)(2)^2 + (2)^3$$

$$= 1000000 + 60000 + 1200 + 8$$

$$= 1061208$$

(iii) $(998)^3$

$$= (1000 - 2)^3$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$]

$$(1000 - 2)^3 = (1000)^3 - 3(1000)^2(2) + 3(1000)(2)^2 - (2)^3$$

$$= 1000000000 - 6000000 + 12000 - 8$$

$$= 1000012000 - 6000008$$

$$= 994011992$$

Q8. निम्नलिखित का गुणनखंड कीजिए :

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

हल:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

$$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = (x + y)^3$]

$$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2 = (2a + b)^3$$

$$= (2a + b)(2a + b)(2a + b)$$

$$(ii) 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$$

$$= (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3]$$

$$= (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2 = (2a - b)^3$$

$$= (2a - b)(2a - b)(2a - b)$$

$$(iii) 27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$$

$$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3]$$

$$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2 = (3 - 5a)^3$$

$$= (3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$$

$$(iv) 64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$$

$$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3]$$

$$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2 = (4a - 3b)^3$$

$$= (4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$$

$$(v) 27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3]$$

$$(3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(3p - \frac{1}{6}\right)^3$$

$$= \left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)$$

Q9. सत्यापित कीजिए :

$$(i) x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

हल :

$$\text{RHS} = (x + y) (x^2 - xy + y^2)$$

$$= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)$$

$$= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3$$

$$= x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} + y^3$$

$$= x^3 + y^3$$

$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$ सत्यापित

$$\text{(ii)} \quad x^3 - y^3 = (x - y) (x^2 + xy + y^2)$$

हल :

$$\text{RHS} = (x - y) (x^2 + xy + y^2)$$

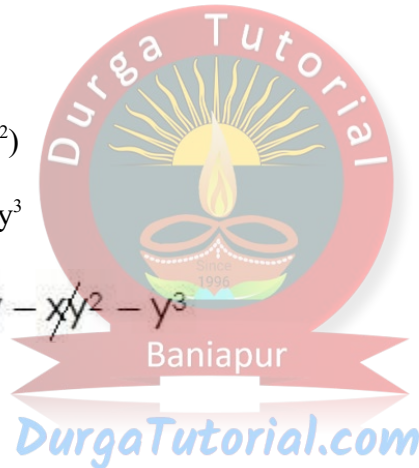
$$x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$$

$$= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$$

$$= x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{x^2y} - \cancel{xy^2} - y^3$$

$$= x^3 - y^3$$

$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$ सत्यापित |



Q10. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंड ज्ञात कीजिए:

$$\text{(i)} \quad 27y^3 + 125z^3$$

$$\text{(ii)} \quad 64m^3 - 343n^3$$

हल :

$$\text{(i)} \quad 27y^3 + 125z^3$$

$$= (3y)^3 + (5z)^3$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से $x^3 + y^3 = (x + y) (x^2 - xy + y^2)$]

$$(3y)^3 + (5z)^3 = (3y + 5z) [(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2]$$

$$= (3y + 5z) (9y^2 - 15yz + 25z^2)$$

(ii) $64m^3 - 343n^3$

हल :

(ii) $64m^3 - 343n^3$

$$= (4m)^3 - (7n)^3$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)]$$

$$(4m)^3 - (7n)^3 = (4m - 7n)[(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2]$$

$$= (4m - 7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2)$$

Q11. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

हल :

$$= (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 9xyz$$

$$\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

सर्वसमिका के प्रयोग से :

$$= (3x + y + z)((3x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (3x)(y) - (y)(z) - (z)(3x))$$

$$= (3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)$$

Q12. सत्यापित कीजिए:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

हल :

$$\text{LHS} = \frac{1}{2}(x + y + z)[x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2xz + x^2]$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad [\text{सर्वसमिका के प्रयोग से}]$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

Q13. यदि $x + y + z = 0$ हो, तो दिखाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ है।

हल : $x + y + z = 0$ दिया है |

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\&= (0)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\&= 0\end{aligned}$$

$$\text{अतः } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

$$\text{या } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \text{ सत्यापित}$$

Q14. वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

हल : (i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

प्रश्न 13. में हमने एक सर्वसमीका प्राप्त किया था कि यदि $x + y + z = 0$ हो तो

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \text{ है |}$$

अतः इस सर्वसमीका में $x = -12$, $y = 7$ और $z = 5$ रखने पर

$$\text{चूँकि } -12 + 7 + 5 \Rightarrow -12 + 12 = 0$$

$$\text{अतः } x + y + z = 0 \text{ है |}$$

अब, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ [x , y , और z का मान रखने पर]

$$\Rightarrow (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3 \times (-12) \times 7 \times 5$$

$$= -1260$$

हल : (ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

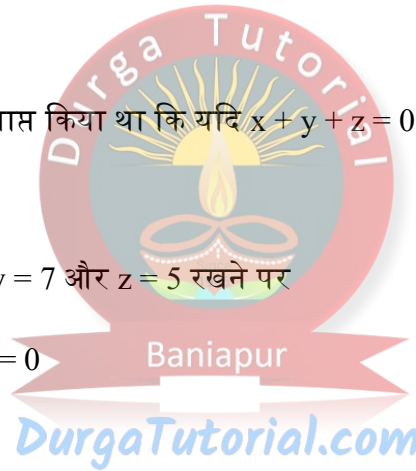
$$28 + (-15) + (-13) = 28 - 28 = 0$$

$$\text{चूँकि } x + y + z = 0 \text{ है |}$$

$$\text{इसलिए } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\text{अब, } (28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3 = 3 \times 28 \times (-15) \times (-13)$$

$$= 133380$$



Q15. नीचे दिए गए आयातों, जिनमें उनके क्षेत्रफल दिए गए हैं, में से प्रत्येक की लंबाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिये |

(i) क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$

(ii) क्षेत्रफल : $35y^2 + 13y - 12$

हल : (i) क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$

क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

अतः $25a^2 - 35a + 12$ के दो गुणखंड होंगे जिसमें एक लंबाई होगा और दूसरा चौड़ाई होगा |

गुणखंड करने पर :

$$25a^2 - 35a + 12 = 25a^2 + 15a + 20a + 12$$

$$= 5a(5a + 3) + 4(5a + 3)$$

$$= (5a + 3)(5a + 4)$$

चूँकि $(5a + 3) < (5a + 4)$ है |

अतः लंबाई = $5a + 4$ और चौड़ाई = $5a + 3$ उत्तर

हल : (ii) क्षेत्रफल : $35y^2 + 13y - 12$

गुणखंड करने पर

$$35y^2 + 13y - 12 = 35y^2 + 28y - 15y - 12$$

$$= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4)$$

$$= (5y + 4)(7y - 3)$$

अतः लंबाई = $5y + 4$ और चौड़ाई = $7y - 3$

Q16. घनाभों (cuboids), जिनके आयतन नीचे दिए गए हैं कि, विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या हैं ?

(i) आयतन : $3x^3 - 12x$

(ii) आयतन : $12ky^2 + 8ky - 20k$

हल : (i) आयतन : $3x^3 - 12x$

गुणखंड करने पर



$$\text{आयतन} = 3x^3 - 12x$$

$$= 3x(x - 4)$$

$$\text{चूँकि आयतन} = L \times B \times H$$

$$\text{अतः } L = 3, B = x \text{ और } H = x - 4 \text{ उत्तर}$$

$$\text{हल : (ii) आयतन : } 12ky^2 + 8ky - 20k$$

$$\text{आयतन} = 12ky^2 + 8ky - 20k$$

$$= 4k(3y^2 + 2y - 5)$$

$$= 4k(3y^2 + 5y - 3y - 5)$$

$$= 4k[y(3y + 5) - 1(3y + 5)]$$

$$= 4k(3y + 5)(y - 1)$$

$$\text{चूँकि आयतन} = L \times B \times H$$

$$\text{अतः } L = 4k, B = (3y + 5) \text{ और } H = (y - 1) \text{ उत्तर}$$

